领略数学传奇，
激发思维潜能

江安海／编
张擎原／审

奇妙的数学

激发大脑潜能的经典名题

MATHS

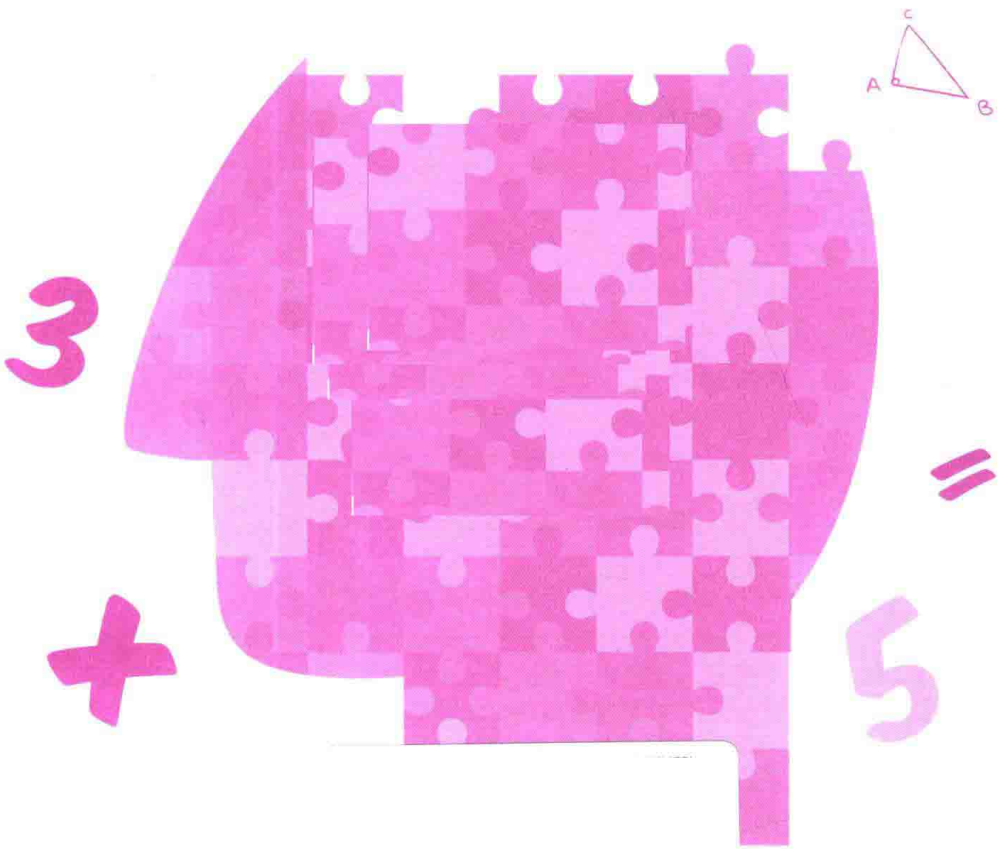
全国百佳图书出版单位
化学工业出版社

MATHS

江安海 / 编
张擎原 / 审

奇妙的数学

激发大脑潜能的经典名题



化学工业出版社
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

奇妙的数学：激发大脑潜能的经典名题 / 江安海编；张擎原审. —北京：化学工业出版社，2017.9
ISBN 978-7-122-30375-2

Ⅰ. ①奇… Ⅱ. ①江… ②张… Ⅲ. ①数学－青少年读物 Ⅳ. ① 01-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 186971 号

责任编辑：旷英姿
责任校对：宋 玮　　　　装帧设计：史利平

出版发行：化学工业出版社（北京市东城区青年湖南街 13 号　邮政编码 100011）
印　　装：高教社（天津）印务有限公司
710mm×1000mm　1/16　印张 16½　字数 189 千字　2017 年 11 月北京第 1 版第 1 次印刷

购书咨询：010-64518888（传真：010-64519686）　售后服务：010-64518899
网　　址：http://www.cip.com.cn
凡购买本书，如有缺损质量问题，本社销售中心负责调换。

定　　价：32.00 元　

前　言

趣味数学题会引发大众的关注而被津津乐道，原因在于这些奇妙的数学题来源于实际的工作和生活，容易被人们理解和接受。

从中国的《周髀算经》《孙子算经》《九章算术》到西方的《希腊诗文集》《计算之书》《让年轻人更机智的问题集》等，从中国的秦九韶、张邱建、程大位到欧洲的高斯、斐波那契、欧拉、牛顿等，历史上经由这些经典著作和名家而出现的数学名题，无不体现出人类的智慧之美、自然界的和谐之美，历经社会变迁，却经久不衰。阅读并思考这些经典的数学问题，对于启迪数学思维、培养兴趣爱好，其作用显而易见。

牛顿曾经说过："在科学的学习中，题目比规则要有用多了。"解决趣味数学题需要一些特定的数学知识和一些基本的推理技巧，但更多的是需要想象力和关注力、兴趣和灵感。学习和研究经典的数学题，重点在于用数学的方法观察问题、思考问题，训练大脑的数学思维能力。数学思维能力就是用最简单的模型来构造、解释及预测自然世界的能力。

本书收录了数百道经典数学习题，精选例题，详细讲解，简要介绍了这些经典名题背后涉及的数学家及其轶事，并后附参考答案，以方便读者阅读。

本书适合在校中小学生作为数学课外读物，并旨在衔接课内知识点、扩展课外知识面、锻炼数学思维能力、帮助学生们形成良好的思维习惯。

因水平和时间有限，书中或有疏漏和不当之处，敬请读者指正。

编者

2017年8月

目录

1 高斯巧算

等差数列及其求和

德国著名的数学家高斯（1777—1855）是近代数学的奠基者之一，享有“数学王子”之称。高斯对数论、代数、统计、分析、微分几何、大地测量学、地球物理学、力学、静电学、天文学、矩阵理论和光学皆有贡献，以“高斯”命名的成果达110个之多。

高斯10岁的时候，他所在的学校开始上算术课。有一天，算术老师比特纳先生出了一道加法题：从81297开始，下一个数比前一个数始终多出198，一直累加到第100个数，和等于多少？

$$81297+81495+81693+\cdots+100503+100701+100899=?$$

拿到这道题，估计大多数人都会这样做题：

$$\begin{array}{r} 81297 \\ +81495 \\ \hline 162792 \end{array} \quad \begin{array}{r} 162792 \\ +81693 \\ \hline 244485 \end{array} \quad \begin{array}{r} 244485 \\ +81891 \\ \hline 326376 \end{array} \quad \cdots$$

考虑到每一项数都要累加198，这样做大概要有200个算式，会耗费很长的时间，并且每一个步骤都不允许算错。这真是一个累人的差事！

比特纳老师刚刚在黑板上写下题目没多久，高斯就算出了答案：

$$9109800$$

高斯是如何做到计算得又快又准呢？首先，把81297、81495、81693、…、

100899在纸上从小到大写成一行，然后再将这100个数按从大到小的顺序再另写一行，并且依次与第一行的数上下对齐：

100

81297	81495	81693		100503	100701	100899
+100899	+100701	+100503	…	+81693	+81495	+81297
182196	182196	182196		182196	182196	182196

这样就会发现上面的100组数的和完全相同，均为182196，所求的答案为：

$$182196\times 100\div 2=9109800$$

比特纳老师出的算术累加习题属于项数有限的等差数列求和问题。

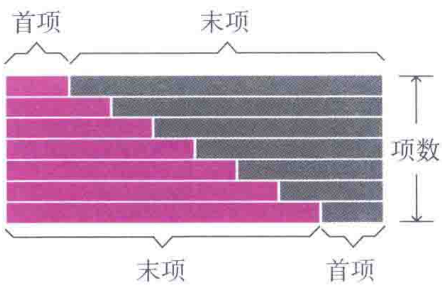


图1–1

对于全部为正的等差数列，可以形象地理解成上面的情形：如图1–1所示，图中条的长短表示每项的大小，按各项的大小，从上到下依次排列成为一个梯形，而两个相同的梯形交错组合在一起，就构成了一个矩形。梯形面积相当于等差数列的和，矩形面积相当于梯形面积的两倍。

类比于梯形的面积公式，就可以得到等差数列的求和公式。

和=(首项+末项)×项数÷2

例题1.1 一个女子不善织布，结果每天织布的数量按相同的数量递减，第一天她织布的数量是5尺，最后一天她织布的数量是1尺，她织布的总天数是30天，那么，她一共织了多少尺布？（改编自北魏的《张邱建算经》）

解答

这个女子每天织布的数量构成等差数列。考虑到递增的等差数列更容易理解，不妨倒过来处理，将最后一天的织布数作为首项，第一天的织布数作为末项，写出已知条件如下：

$$首项=1 \qquad 末项=5 \qquad 项数=30$$

这样，女子织布的总数量为：

$$(首项+末项)\times 项数\div 2=(1+5)\times 30\div 2=90（尺）$$

这个女子一共织了90尺布。

例题1.2 小明在读一本小说，第一天读了10页，以后，他每天都比前一天多读2页，最后一天他读了50页，恰好把这本小说读完了，请问：这本小说一共有多少页？

解答

按题意，列出这个等差数列，即

$$10,12,14,16,\cdots,48,50$$

其首项是10，末项是50，公差是2。

$$末项=首项+(项数-1)\times 公差$$

因此，有

$$项数=(末项-首项)\div 公差+1=(50-10)\div 2+1=21$$

这样，有

$$(10+50)\times 21\div 2=630（页）$$

这本小说的总页数为630页。

例题1.3 聪聪所在的班级一共有35个学生，在一次数学竞赛中，聪聪排在第18名，并且他的成绩是60分。数学老师说，这个班级学生的成绩恰好构成了一个等差数列，你能知道这个班级学生的总分是多少吗？

解答

用首项、末项、项数和公差的公式计算这个班级的总成绩，令人束手无策。

仔细分析会发现，这个班级的人数即等差数列的项数是奇数，并且聪聪的排名恰好是等差数列的中间项，假设等差数列的公差是d，那么，将班级学生的成绩从小到大排列，有

$60-17d$	$\cdots$	$60-2d$	$60-d$	60	$60+d$	$60+2d$	$\cdots$	$60+17d$
第35名		第20名	第19名	第18名	第17名	第16名		第1名

第18名的成绩是等差数列的中间项，第1名和第35名的成绩之和、第2名和第34名的成绩之和、…、第16名和第20名的成绩之和、第17名和第19名的成绩之和均等于中间项的两倍。这样，就得到项数为奇数的等差数列的求和公式：

和=中间项×项数

这个班级学生的总分为60×35=2100（分）。

例题1.4 明明所在的班级组建了数学兴趣小组，包括明明在内，这个小组共有10位同学参加。最近的一次测验中，这个小组每个同学的得分都是整数，并且恰好构成了一组等差数列。明明的成绩是94分，小组的总分是835分。请问：最高分和最低分分别是多少？

解答

只有10个数，不妨直接将这些数列出来，穷举法是解算术题经常用到的技巧。

根据公式：

和=(首项+末项)×项数÷2

可以知道，最高分+最低分=835÷10×2=167，与94分相对应的分数为

167−94=73（分）

以94分和73分为首尾对应关系：

（1）假设公差是1

则最高分和最低分的差是9，而94−73=21>9，这样，可以排除公差为1的可能性。

（2）假设公差是2

明明的分数是94分，则所有的分数将是偶数，73分不会出现，可以排

除公差是2的可能性。

（3）假设公差是3

100 97 94 91 88 85 82 79 76 73 70 67

在94至73之间（包括94和73）一共有8项，说明94并不是最高分。

97 94 91 88 85 82 79 76 73 70

这10个数才是符合条件的得分情况。因此，最高分是97分，最低分是70分。

习题一

第1题 计算下列各算式：

（1）$1+2+3+\cdots+100$

（2）$3+5+7+9+11+13+15+17+19+21+23+25+27$

第2题 有等差数列11,14,17,20,…,请问第30项是多少？

第3题 小明在黑板上写下了若干个数，这些数构成了等差数列。结果，又来了一个同学，他把小明的板书擦了好大一部分，只能看清楚第7个数是28，第30个数是74。请问第1个数是多少？

第4题 一个女子善织布，织布数量每天均匀地增加，刚开始的第一天织布数量为5尺，她30天织布的总数是390尺。请问：这个女子每天增加的织布数量是多少？

第5题 塔楼的木梯有50级，第一级台阶上有1只鸽子，第二级台阶上有3只鸽子，第三级台阶上有5只鸽子，……，台阶上的鸽子数量构成了等差数列。请问：梯上共有多少只鸽子？

第6题 人们走进石榴果园，第1个人摘下2个石榴，第2个人摘下4个石榴，第3个人摘下6个石榴，依此类推，后进来的每个人都比前一个人多摘2个。当果园中的石榴全部被摘下后，平均分配给每个摘石榴的人，每

个人得8个石榴。请问：有多少人参与摘石榴？

第7题 有一棵神奇的树上长了58个果子，第一天会有1个果子从树上掉落，从第二天起，每天掉落的果子数量比前一天多1个，但如果某天树上的果子数量少于这一天本应该掉落的数量时，那么这一天它又重新从掉落1个果子开始，按原规律进行新的一轮。如此继续，那么多少天树上的果子会掉光？

第8题 有600个苹果，分配给5个人，使得每个人得到的苹果数量构成等差数列，并且得到较多的三个人的苹果数量之和的七分之一恰好是较少的两个人的苹果数量之和。请问：每个人获得的苹果数量是多少？

2 芝诺悖论

等比数列的奥妙

芝诺（约公元前490—约公元前425）是古希腊著名的数学家和哲学家，以一系列的“芝诺悖论”而著称。

所谓悖论，就是在同一个推理过程中隐含着两个相互对立的结论，并且这两个结论都能自圆其说。芝诺悖论中较为著名的一个悖论是关于二分法的，说的是一个人永远都无法走到终点：

一个人从A点走到B点，要先走完总路程的$\frac{1}{2}$，再走完剩下路程的$\frac{1}{2}$，再走完剩下的$\frac{1}{2}$，……，如此循环下去，他将永远都不能走到终点。

二分法悖论中，假设这个人的速度恒定，走完总路程所需的时间为单位1。这样，他走完总路程的$\frac{1}{2}$所需的时间是$\frac{1}{2}$；他再走完剩下路程的$\frac{1}{2}$所需的时间为$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$；再走完剩下的$\frac{1}{2}$所需的时间为$\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$；……如此下去，他走到B点的时间为$T$，有

$$T=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n+\cdots\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

其中，$\left(\frac{1}{2}\right)^n$读作“二分之一的$n$次幂”，表示$n$个$\frac{1}{2}$的乘积：

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n=\overbrace{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\cdots\times\frac{1}{2}}^{n}$$

在芝诺看来，这个人从A点到达B点始终要走过剩下路程的一半，虽然剩下的路程越来越少，穿过剩下的路程的一半所需要的时间间隔也越来越小；但是总是比零要大，只要无限地分割下去，时间之和也可以无限地累加，这样，这个人似乎永远都无法到达B点。显然，这与实际发生的现象并不相符，形成悖论。

如图2–1所示，从A点到B点的时间趋近于1，就是说，当n趋近于无限大，$T=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n+\cdots$就无限趋近于1。

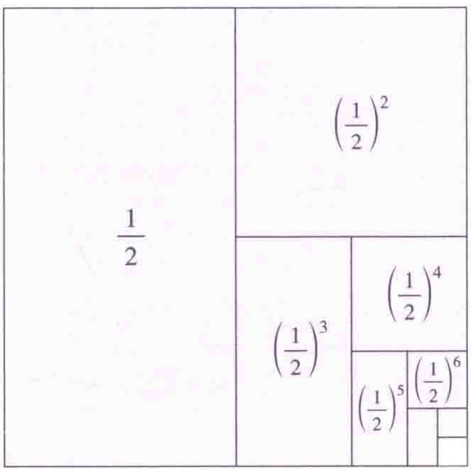


图2–1

芝诺悖论涉及到时间、空间的连续性以及无限大、无限小等概念。中国的古典名著《庄子·天下篇》中也提到：“一尺之棰，日取其半，万世不竭。”就是说，一尺长的木杖，每天只截取它的一半，就可以无休止地截取下去，永远都不可能截完。

现代量子物理学的研究证实，时间和空间不可以无限分割，在理论上彻底解决了芝诺悖论。