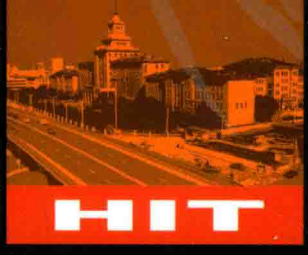
Number Theory—An Introduction to Mathematics, 2e



数论经典著作系列

数论——数学导引（第2版）

[澳]W. A. 科佩尔 著　　冯贝叶 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

数论经典著作系列

数论——数学导引

Number Theory—An Introduction to Mathematics, 2e

（第2版）

●［澳］W. A. 科佩尔 著

●冯贝叶 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

黑版贸审字 08 - 2016 - 117 号

内 容 简 介

本书由浅入深地介绍了古典数论与近代数论的基本内容和研究方法，揭示了数学各分支与数论之间的深刻联系。本书共 13 章，包括：数的扩张，整除，再谈整除，连分数及其应用，哈达玛行列式问题，亨塞尔的 p - adic 数，二次型的算数，数的几何，素数定理，特征，一致分布和遍历论，椭圆函数，椭圆函数和数论的联系。

图书在版编目(CIP)数据

数论：数学导引：第 2 版/(澳)W. A. 科佩尔著；冯贝叶译. —2 版. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2018. 1

书名原文：Number Theory：An Introduction to Mathematics

ISBN 978 - 7 - 5603 - 6809 - 2

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①W… ②冯… Ⅲ. ①数论 - 高等学校 - 教材 Ⅳ. ①O156

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 182637 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 王勇钢
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开 本 787mm × 1092mm 1/16 印张 43.25 字数 776 千字
版 次 2018 年 1 月第 1 版 2018 年 1 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978 - 7 - 5603 - 6809 - 2
定 价 68.00 元

第2版序

大学的数学课通常可分为两类。一类如线性代数和实分析被公认为是每个数学专业的学生都必须学的。另一类是专业领域的讲座，其目的是为将来希望作研究的学生作准备。然而，某些原因使我相信学生们还需要更广泛的材料。

首先，尽管由于今日数学研究的内容如此之广泛，以致每个单个的个人几乎不可能精通其每一个分支而只能深入了解他自己研究的一个很窄的方向，但是了解和欣赏其他人的工作仍然是很重要的。的确，有时数学的不同分支之间的令人意想不到的关系和类比确实构成了这些分支的应用和刺激它们进一步发展的基础。其次，数学的不同分支经常以不同的方式产生，并需要不同的天赋。同一所大学中的学生也不太可能对他们所学的课程有相同的兴趣和才能。他们只有在更广泛的范围的探索中才能发现自己的兴趣是什么并表现出天赋的才能。第三，很多学数学的学生实际上最后不一定去作一个专业的数学研究者，可能会成为一个工程师或者数学教师。对他们来说，对数学的特点和数学的轮廓有一个清晰的了解是有用的，同时在社会中存在一些能对数学有这种了解的人群对数学家本身也是有益的。

本书企图提供一个对数学的特点和数学的轮廓的理解。把本书内容编织起来的话题是数论，一个数学中第一眼看起来最为深奥且与其他的数学分支毫不相干的数学分支。然而通过探索数论与其他数学分支的多种联系，我们就可能得到一个数学的全景图。

我们所选的题目都不是平凡的并且要求读者阅读时付出一定的努力。正如欧几里得(Euclid)曾经说过的那样:(在数学家的面前)没有捷径。通常我都会把自己的注意力放在那些曾对很多问题产生过影响的已经获得的成果上。如果有人指责我有时选择了一些不符合上述原则的课题,我除了说:"这是多么美丽的眼睛啊"外,就实在找不到其他的理由来辩解了。

本书分为两个部分。部分A的内容是初等数论,大学一年级的学生应该是可以接受的。为了给下面的内容提供一个基础,第1章中包含了各种数学结构的定义和性质。然而,读者可以简单地浏览一下这一章的内容,并在需要时再回来查找相关的内容即可。第5章的内容是关于哈达玛(Hadamard)行列式问题的,这一章的内容表明初等数论可能会有出人意料的应用。

部分B涉及更高级的课题,这一部分企图给大学生提供对今天数学的某些思想的一种理解。这一部分中除了第10章依赖于第9章,第13章依赖于第12章之外,其余各章的内容基本上是独立的。

尽管本书的大部分内容与所有介绍数论的书大致都是相同的,但我希望自己更关注于二次域和椭圆曲线课题的讨论。这两个课题都是代数数域和代数曲线的特例。有人可能会问,为什么在今天对这两个课题的一般情况已经有了很好的理解而且甚至可能已有了平行的进展的情况下,还要把自己的注意力限于这种特殊的情况?我的回答如下:首先,完全严格地处理一般情况对很多人来说将需要花费他们无法承受的时间。第二,解决这些特殊情况时可能会发现一些比解决一般情况更具有构造性的方法。还有一个原因是,在数学中,有些推广比起作为他们特例的特殊情况可以是如此简单和向前推的如此深远,然而,对于我在上面所提到的两种特殊情况,其推广却更加复杂。因此,在我看来更适于首先深入地理解它们所得以发展的特殊情况。

在每一章的末尾,我都添加了一些选编的文献,这些文献将有助于读者按照自己所选的方向更深入地进一步钻研下去。由于文献的数量是巨大的,这就使得任何选编都将有所省略,但是我希望,我所选的文献是有趣和有用的。

计算机的发展已使得我们现在可以以一个世纪之前不敢梦想的尺度和速度来计算。其后果之一就是"试验数学"——探索模式的数学的可观增长。然而,本书致力于"理论数学"——对模式的解释。我不想否认前者通常来说要比后者先行一步的事实。但我同样不想不提的是本书的某些结果已被证明是某些最伟大的思想家多年来思考的结果,以后他们的证明又不断被其他的数学家加以改进和简化。一旦我们获得了一个好的证明,我们就可用它来对海量的数据加以组织和提供理解。这种证明也常常指引进一步的发展方向。

本书确实可以看成“证明的宝藏”。我们关注于问题的数学方面，不仅是由于它可以区分出对象的性质，也由于翻着一本书考虑这些证明要比仅在黑板上或计算机屏幕上单纯地阅读效果更好。为了保持上述原则，我在选择证明时特别关注所用的方法是否与此原则相一致，并且我希望甚至那些不再是学生的读者也会对其中的某些证明感兴趣。依赖于一般原理的证明本身就比那种不能提供特别洞察力的证明优越。

数学是文明的一部分，并且是人类可以以此为骄傲的一种成就。它不是任何民族、政治或宗教团体以及任何企图使它成为终极摧毁性工具的人的私有物。目前，存在一种让科学研究更加“相关”的强大压力，然而，同时在某些大学中用所谓“引用数”来评价其教学人员，以致使有的人胡乱开设一些明显是在胡扯的课程来应付。

数论提供了丰富的证据表明一些本来是追求自己内在兴趣的课题后来会找到有意义的应用。我不坚持好奇一直是人们研究问题的唯一驱动力。某些更实用的动机，像以此成名、出人头地或作为谋生的必要手段也可以起作用。同样真实的是数学家们追求应用他们研究成果得来的好处的潮流一直都使像数论这样的课题受益。这是一种互相受益的交易。然而，这也表现出一种忽略历史和人类追求精神享受的危险。

本书的原型是我 1975 年在新西兰威灵顿的维克多利亚大学所开设的课程的讲义。迄今为止我自己所进行的研究工作使我一直不能完成它，然而我一直没有中断收集材料的工作。如果本书成功地表达了一些数学思想的力量和美丽，那么我为写作这本书所付出的劳累就是值得的。

我必须感谢海尔格·特沃尔伯格(Helge Tverberg)，他已经阅读了大部分手稿并给出了很多有益的建议。

本书的第一版由费兰格(Phalanger)出版社在 2002 年出版。2006 年，斯普林格(Springer)出版社重新出版了包含了一些变动的修正版。在这一版中，我更正了一些叙述中的错误和第 2 章性质 12 的证明并补充了第 3 章性质 12 证明中的某些过于省略之处。修正了第 9 章中威尔(Weil)猜想和第 10 章中海斯－布劳恩(Heath-Brown)的结果的叙述。根据瑟尔(J. -P. Serre)的评论，我也更正了一些笔误，做了很多小的说明性更改。

在现在这一版中我做了更多的说明性更改，在有的章末添加了一些参考文献以适应目前的进展。对新的东西，互联网要比书本更优越。读者可登录美国数学会的数学科学网站(MathSciNet，www. ams. org/mathscinet)和由基思·马修斯(Keith Mathews)主持的数论网页(www. maths. uq. edu. au/ ~ krm/)以了解最

新的进展。

我极为感谢斯普林格出版社承担了本书出版的商业业务并希望你也如此。还有很多在这个软件版中做出了贡献的人士我因叫不出名而无法一一罗列，但是，在此，我特别想对阿丽莎. 罗斯. 瑞易斯（Alicia los Reyes）和我的儿子尼古拉斯（Nicholas）和菲利普（Philip）表示感谢。

W. A. 科佩尔

2009 年 5 月

澳大利亚 堪培拉

◎译者说明

历时一年多，终于将 W. A. 科佩尔的《数论——数学导引》翻译完了。完成了一件有意义的工作，身体感到放松，心情亦很愉快。

首先解释一下本书的题目，刚一看到这个题目，我亦感到相当不理解，你写数论，怎么又变成数学导引了呢，后者的范围可比前者大得多，这怎么可能做到呢。待到译完之后，我才明白此书名的含义，原来作者是把数论能有应用的地方几乎都连上了，而为了给这些应用作准备，又把诸如数学分析、高等代数、图论等方面的内容从头讲了一些，构成一本自成体系的书，所以所涉及的数学领域远比单纯的数论多，从这个意义来说，称本书为数学导引也未尝不可。但译者仍然觉得这个书名的后半部分不是十分确切，真正要做到数学导引，还是要看苏联科学院院士亚历山大罗夫等人编的《数学——它的内容，方法和意义》或数学百科全书那样的著作。不过也不必过于苛求这种名词问题，读者只需明白此书名的含义和缘起即可。

其次谈谈本人接手翻译这本书的动机。当然第一位的是译者本人对数论有一定的兴趣，因此翻译工作就不是一件单纯的枯燥工作，同时也是一种乐趣。不过感兴趣是一回事，是否有能力翻译又是另一回事。本人不是数论方面的专家（本人愿意翻译此书的另一个原因是这种好书很多，而真正的专家愿意做翻译工作的并不多，例如 T. M. Apostol 所著的 *Modular Functions and Dirichlet Series in Number Theory* 也是一本好书，但至今未见有中译本（译者注：现已有哈尔滨工业大学出版社出版的冯贝叶翻译的中译本）。

此外还有一种说法是根本没有必要去翻译这些书，理由是真正做研究工作的人直接看原文即可，凡看不懂原文的都是些没有能力作研究也没有必要看这种书的人。对此说法，译者不敢苟同。首先科研工作需要广泛的人才作基础，很多走上科研道路的人正是当初看了大师们的科普作品的译本，大感兴趣才最后走上这条道路的。其次即使不专门搞科研，有一定人数的数学爱好者阅读此类书籍对提高我国公民的科学文化素质也是有益的，更何况在规定期限内从图书馆借一本原著再还回去，时间一长，很多内容就忘掉了，与长年手捧一本译本可以完全不必为语言问题分心而专心欣赏令人感兴趣的内容完全是两种不同的味道和感受。当然从出版社的角度看，是希望他们所出版的书有人买，有所收益，至少是不赔钱的。我是希望本书既能对感兴趣的读者有益也能使出版社得到收益。因此，即使有些数学爱好者不一定真的能做出什么创新和成果，但也希望自己能看到更高级一点的材料，使自己有所提高，那么只要有出版社认为出这种书不是赔钱买卖，翻译出版这类高级科普读物也是值得和有价值的），因此绝不敢自称翻译此书绝对有信心。但为什么又敢于接手呢？这来自于我和恩师钱敏先生的一次聊天。记得去英国之前，应钱先生之招，去他家谈数学问题并送去一些资料，正题谈完后，谈到出国后可能为增加收入做一些例如助教之类的工作，该选什么课时，钱先生曾一语惊人，他的建议是什么课你不会就去教什么课，这样等你教完这门课后，你也就学会了一门新的专业，不至于单纯地为了赚钱，浪费了时间。这话我刚一听时，脊背上是颇有些凉意的。但仔细一想，也有他的道理，这可称为背水一战式的压力学习法吧。学了这个学习的“法术”，翻译这本书也算是对此方法的一次实践，以此态度翻译此书，我取战略上藐视，战术上重视的态度，尽自己的努力做得最好。翻译完后，我自己当然是感到不虚此译，大有收获。但瑕疵和失误肯定在所难免，这期盼有关的专家和行家里手给以指正了。

这本书的特点除了所涉及的范围相当广泛，在内容上也是相当前卫的。与老的初等数论方面的书相比，本书最后的关于椭圆函数的两章无疑是比较新的内容。此外哈达玛行列式问题，p - adic 数，二次型的算数，特征与一致分布和遍历论课题也都是目前国内的初等数论教科书中没有的内容。本书的另一特点是只要是作者认为可以谈到的问题，就谈的相当细。比如在很多初等数论书中都讲到一个引理：如果正整数 n 可表示成两个有理数的平方和，则它必可表示成两个整数的平方和。但是一般就到此为止，而本书在证明了这一引理后又特别举例说明如果把引理中的平方换成四次方，则此性质不再成立，这就使得读者对此性质的认识更加深入。再比如 Wilson 定理，一般的初等数论教科书中都有证明，但也只是到此为止，而本书则还谈到了这一定理的发现过程，这个

定理的名称尽管一般都称为 Wilson 定理，但首次发表的证明是由拉格朗日(Lagrange，1773)给出的。特别是拉格朗日还注意到仅当 n 是素数时，n 才能整除 $(n-1)!+1$。这就是说 n 整除 $(n-1)!+1$ 是 n 为素数的充要条件，这当然要使我们对 Wilson 定理的认识又更深刻了一步。而当 n 是合数时 n 不可能整除 $(n-1)!+1$ 的证明也是饶有兴趣的，不难，但需要分几种情况讨论。这个问题完全可以作为一道初等数学的练习题，也可以作为一道数学竞赛题。(译者注：潘承洞，潘承彪的《初等数论》第三章习题四第 1 题就是这个问题)本书中这种小问题非常多，不但使阅读增加了兴趣，而且也可以在中学的数学课外活动小组和数学竞赛中借用。比如第 11 章偏差一节中的性质 11 和性质 13 都是这种有意思的小问题，其中性质 13 等价于以下问题：设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 和 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 是区间 $[0,1]$ 中的两组数(译者注：其实此条件可以去掉)，现在按照大小顺序分别将它们重排为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 和 $y_1,y_2,\cdots,y_n$，证明

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i-y_i|\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\xi_i-\eta_i|$$

我还想指出本书中另一个有特色的材料。许多初等数论的教材和书籍一般都会提到费马大定理，并给出 $n=3$ 和 $n=4$ 情况时的证明，一般都是在讲完 $x^2+y^2=z^2$ 的整数解后，用无穷递降法证明方程 $x^4+y^4=z^2$ 没有非零的整数解，从而证明 $n=4$ 时的费马大定理。本书中也有这一部分内容，但是在最后一章讲完同余数后，先全文引用了费马在丢番图(Diophantus)的书的空白处上所写一小段证明 1 不是同余数(也是用的无穷递降法)的文字后，立刻说明如果方程 $x^4+y^4=z^4$ 有非零的整数解，那就可以通过一个这组解构造出另一个不定方程的 $u^2+v^2=w^2,uv=2$ 的一组非零的有理数解，从而得出 1 是一个同余数，(但是似乎这两个命题并不等价，即从 1 是一个同余数并不能得出方程 $x^4+y^4=z^4$ 有非零的整数解)这就给出了 $n=4$ 时费马大定理的另一种证明，并且显示出，在有些情况下，同余数问题的结论要比费马大定理给出的结论更强。另外，本书中还包含了一些公开问题，可以作为有兴趣的读者的研究题目。

如果有数学爱好者能从本书中有所收获和感到有帮助，那将是对译者莫大的安慰和鼓励，我希望现在还会有这样的数学爱好者。

冯贝叶

2015 年 12 月 15 日

于北京中关村

目录

部 分 A

部 分 B

部 分 A