高等代数考研600题精解

GAODENG DAISHU KAOYAN 600TI JINGJIE

高金泰 ◎ 编著

西南交通大学出版社

高等代数考研600题精解

高金泰◎编著

西南交通大学出版社
·成　都·

图书在版编目（C I P）数据
高等代数考研 600 题精解 / 高金泰编著.—成都：
西南交通大学出版社，2017.6
ISBN 978-7-5643-5566-1

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①高… Ⅲ. ①高等代数－研究生－入
学考试－题解 Ⅳ. ①O15-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 146396 号

高等代数考研 600 题精解 | 高金泰　　编著 | 责任编辑　张宝华
封面设计　何东琳设计工作室

印张：16.75　　字数：395千
成品尺寸：185 mm × 260 mm
版次：2017 年 6 月第 1 版
印次：2017 年 6 月第 1 次
印刷：成都蓉军广告印务有限责任公司
书号：ISBN 978-7-5643-5566-1

出版发行：西南交通大学出版社
网址：http://www.xnjdcbs.com
地址：四川省成都市二环路北一段111号
西南交通大学创新大厦21楼
邮政编码：610031
发行部电话：028-87600564　028-87600533
定价：39.80元

课件咨询电话：028-87600533

前 言

高等代数是大学数学专业的基础课程，也是研究生入学考试的两门专业课程之一，其重要性不言而喻. 高等代数的一个显著特点就是：定理及结论不是很多，但习题千变万化，总有一些习题不会做. 因此，要想取得考研高等代数的一个好成绩，其前提就是多看多练.

本人从事高等代数教学多年，尤其是近十年来一直从事代数选讲的教学工作，积累了大量的教研资料，本书就是在对这些资料进行整理筛选的基础上编写完成的，其中绝大多数习题都是部分高校（华东师范大学，兰州大学，华南理工大学，西南大学，华中科技大学，新疆大学等）先后考过的真题，对考生具有较高的参考价值.

本书草稿在天水师范学院数学与应用数学专业“创新班”已连续使用了四届，均取得较好的效果，学生考研高等代数的成绩一直良好.

本书可作为代数选讲课程的教材使用，也可作为高等代数、线性代数等课程的学习参考书.

由于作者水平有限，不足与缺点之处在所难免，望使用者批评，斧正！

高金泰

2017 年春于天水

目 录

第一部分　多项式

一　常用定理及结论

1　数域 P 上的全体一元多项式之集 $P[x]$ 对多项式的加法及乘法作成环，称为一元多项式环.

2　次数定理：设 $f(x),g(x)\in R[x]$ 均不等于 0，R 为含数 1 的数环，则

（1）当 $f(x)\pm g(x)\neq 0$ 时，$\partial^0(f(x)\pm g(x))\leqslant\max\{\partial^0 f(x),\partial^0 g(x)\}$.

（2）$\partial^0(f(x)g(x))=\partial^0 f(x)+\partial^0 g(x)$.

3　带余除法定理：设 $f(x),g(x)\in P[x]$，且 $g(x)\neq 0$，则存在 $q(x),r(x)\in P[x]$，使

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x)\text{，其中 } r(x)=0\text{，或 }\partial^0 r(x)<\partial^0 g(x).\qquad (*)$$

符合条件（*）的 $q(x),r(x)$ 唯一，分别称为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的商式及余式.

4　$g(x)\mid f(x)\Leftrightarrow g(x)$ 除 $f(x)$ 的余式等于零.

5　设 $f(x)=g(x)q(x)+r(x)$，则 $f(x),g(x)$ 的公因式与 $g(x),r(x)$ 的公因式相同. 进而有：$f(x),g(x)$ 的最大公因式与 $g(x),r(x)$ 的最大公因式相同.

6　设 $d(x)$ 是 $f(x),g(x)\in P[x]$ 的一个最大公因式，则

（1）对任意的非零常数 $c\in P$，$c\cdot d(x)$ 也是 $f(x),g(x)$ 的一个最大公因式.

（2）若 $d_1(x)$ 也是 $f(x),g(x)$ 的一个最大公因式，则存在非零常数 $c_0\in P$，使 $d_1(x)=c_0 d(x)$.

7　Bouzt 公式：设 $d(x)$ 是 $f(x),g(x)\in P[x]$ 的一个最大公因式，则存在 $u(x),v(x)\in P[x]$，使得 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=d(x)$. 反之，若 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=d(x)$，且 $d(x)$ 是 $f(x),g(x)$ 的一个公因式，则 $d(x)$ 是 $f(x),g(x)$ 的一个最大公因式.

8　$f(x),g(x)$ 互素 $\Leftrightarrow f(x),g(x)$ 只有零次公因式

$\Leftrightarrow (f(x),g(x))=1$

$\Leftrightarrow$ 存在 $u(x),v(x)$，使得 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=1$.

9　设不可约多项式 $p(x)$ 是多项式 $f(x)$ 的 k 重因式，则 $p(x)$ 是 $f(x)$ 导数多项式的 $k-1$ 重因式. 反之，若 $p(x)$ 是 $f(x)$ 导数多项式的 $k-1$ 重因式，$p(x)$ 未必是多项式 $f(x)$ 的 k 重因式.

10　$f(x)$ 无重因式 $\Leftrightarrow (f(x),f'(x))=1$.

11　$f(x)=ap_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_t^{r_t}(x)$ 为 $f(x)$ 在数域 P 上的典型分解式 $\Leftrightarrow$

（1）$a\in P$；

（2）$p_1(x),p_2(x),\cdots,p_t(x)$ 均在 P 上不可约；

（3）$p_1(x),p_2(x),\cdots,p_t(x)$ 首次项系数均为 1；

（4）$p_1(x),p_2(x),\cdots,p_t(x)$ 两两不同.

12　数环 R 上的 $n(>0)$ 次多项式在 R 中最多有 n 个根.

13　R 是数环，$c\in R$ 为 $f(x)$ 的根 $\Leftrightarrow f(c)=0\Leftrightarrow$ 若 $f(x)=(x-c)q(x)+r$，则 $r=0$.

14　代数学基本定理：复数域 C 上的任一 $n(>0)$ 次多项式在 C 中至少有一个根.

由此得出：复数域 C 上的任一 $n(>0)$ 次多项式在 C 中必有 n 个根.

15　Vieta 定理：设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 在复数域中的 n 个根为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，则

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=-\dfrac{a_1}{a_0}\\ \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\cdots+\alpha_{n-1}\alpha_n=(-1)^2\dfrac{a_2}{a_0}\\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+\cdots+\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n=(-1)^3\dfrac{a_3}{a_0}\\ \cdots\cdots\\ \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1}+\cdots+\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n=(-1)^n\dfrac{a_n}{a_0}\end{cases}.$$

16　复数域 C 上只有一次多项式不可约.

17　虚根成对原理：设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 为实系数多项式，则 $f(x)$ 的非实复根成对出现. 即 α 为 $f(x)$ 的根时，$\bar{\alpha}$ 也是 $f(x)$ 的根，且 α 与 $\bar{\alpha}$ 有相同的重数.

18　实数域 R 上除一次多项式不可约外，判别式小于 0 的二次多项式也不可约.

19（1）有理系数多项式 $f(x)$ 在有理数域 Q 上不可约 $\Leftrightarrow$ 整系数多项式 $kf(x)$ 在 Q 上不可约.

（2）整系数多项式 $f(x)$ 在 Q 上不可约 $\Leftrightarrow f(x)$ 能分解成低次整系数多项式的乘积.

20　有理数域 Q 存在任意次不可约多项式.

21　Eisenstein 判别法：设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 是一个整系数多项式，若存在素数 p，满足：（1）$p\nmid a_0$；（2）$p\mid a_i,i=1,2,\cdots,n$；（3）$p^2\nmid a_n$，则 $f(x)$ 在有理数域 Q 上不可约.

22　有理根筛选定理：设有理数 $\dfrac{u}{v}$ $(u,v$ 互质$)$ 是整系数多项式 $f(x)=a_0x^n+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 的根，则（1）$v\mid a_0,\ u\mid a_n$；（2）$f(x)=\left(x-\dfrac{u}{v}\right)q(x)$，$q(x)$ 是整系数多项式.

23　设函数 f,g 分别为多项式 $f(x),g(x)$ 所决定的多项式函数，则 $f(x)=g(x)\Leftrightarrow f=g$.

24　对称多项式基本定理：数环 R 上的任一 n 元对称多项式必能表成 n 元初等对称多项式的多项式.

25　设 $f(x)=a_0x^n+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 是数域 P 上的一个 n 次多项式，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是其在复数域中的 n 个根，则关于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的任一对称多项式都可以表成关于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的初等对称多项式的多项式，因而必为 P 中的一个数.

26　设 $f(x)=a_0x^n+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 是复数域 C 上的一个 $n(>0)$ 次多项式，其在 C 中的 n 个根为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$. 称

$$
\begin{aligned}
D(f) = a_0^{2n-2}(\alpha_2-\alpha_1)^2(\alpha_3-\alpha_1)^2\cdots(\alpha_n-\alpha_1)^2 \\
\cdot(\alpha_3-\alpha_2)^2\cdots(\alpha_n-\alpha_2)^2 \\
\cdots\cdots \\
\cdot(\alpha_n-\alpha_{n-1})^2 \\
= a_0^{2n-2}\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(\alpha_i-\alpha_j)^2 \text{ 为 } f(x) \text{ 的判别式.}
\end{aligned}
$$

27　设 $R(f,f')$ 表示多项式 $f(x)=a_0x^n+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ 与其导数多项式 $f'(x)$ 的结式，D 表示 $f(x)$ 的判别式，则 $D=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\dfrac{1}{a_0}R(f,f')$.

28　$f(x)=ax^2+bx+c$ 的判别式为 b^2-4ac.

29　$f(x)$ 有重根 $\Leftrightarrow$ 它的判别式等于 0.

二　常见题型及解答

（一）多项式的定义，整除，带余除

问题 1.01　设 $f(x)$ 为数域 F 上的多项式，$x\in F$ 是任意数，$c\neq 0$ 是 F 中的常数. 证明：$f(x-c)=f(x)\Leftrightarrow f(x)$ 是常数.

证明　$\Leftarrow$ 若 $f(x)=k$，k 为常数，则 $f(x-c)=k=f(x)$.

$\Rightarrow$ 若 $f(x)=0$，则结论显然成立，下设 $f(x)\neq 0$.

若 $f(x)$ 不是常数，令 $\partial^0 f(x)=n>0$，并设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是 $f(x)$ 在复数域中的 n 个根. 则

$$f(x_i-c)=f(x_i)=0\text{，}\ i=1,2,\cdots,n.$$

即 $x_1-c,x_2-c,\cdots,x_n-c$ 也是 $f(x)$ 在复数域中的 n 个根. 于是由 Vieta 定理知

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=(x_1-c)+(x_2-c)+\cdots+(x_n-c)\text{，}$$

从而 $c=0$，这与 $c\neq 0$ 矛盾. 故 $f(x)=k$ 是常数.

问题 1.02　设 $f(x)$ 为数域 F 上的多项式，x,y 是 F 中的任意数，$c\neq 0$ 是 F 中的常数. 证明：$f(x+y)=f(x)f(y)\Leftrightarrow f(x)=0$ 或 $f(x)=1$.

证明　$\Leftarrow$ 若 $f(x)=0$，则 $f(x+y)=0=0\cdot 0=f(x)f(y)$；

若 $f(x)=1$，则 $f(x+y)=1=1\cdot 1=f(x)f(y)$.

$\Rightarrow$ 若 $f(x)=0$，则证毕. 若 $f(x)\neq 0$，由于

$$f(2x)=f(x+x)=f(x)f(x)=f^2(x)\text{，}$$

比较次数知，$\partial^0 f(x)=0$. 令 $f(x)=c\neq 0$，因 $c=f(0)=f(0+0)=f(0)f(0)=c^2$ 得 $c=1$. 从而 $f(x)=1$.

问题 1.03　设 $f(x)$ 为数域 F 上的多项式，x,y 是 F 中的任意数，$c\neq 0$ 是 F 中的常数. 试

证明：$f(x+y)=f(x)+f(y)\Leftrightarrow f(x)=kx$.

证明 $\Leftarrow$ 若 $f(x)=kx$，则 $f(x+y)=k(x+y)=kx+ky=f(x)+f(y)$.

$\Rightarrow$ **证法 1** 设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$. 因

$$f(2y)=f(y+y)=f(y)+f(y)=2f(y),$$

即

$$f(2y)-2f(y)=0.$$

亦即

$$\begin{aligned}&(a_0(2y)^n+a_1(2y)^{n-1}+\cdots+a_{n-1}(2y)+a_n)-2(a_0y^n+a_1y^{n-1}+\cdots+a_{n-1}y+a_n)\\&=(2^n-2)a_0x^n+(2^{n-1}-2)a_1x^{n-1}+\cdots+(2^2-2)a_{n-2}x^2-a_n=0.\end{aligned}$$

于是 $a_0=a_1=\cdots=a_{n-2}=a_n=0$，此时 $f(x)=a_{n-1}x=kx$，其中 $k=a_{n-1}$.

$\Rightarrow$ **证法 2** 对 $\forall b\in F$，由 $f(b)=f(0+b)=f(0)+f(b)$ 知 $f(0)=0$，即 0 是 $f(x)$ 的根.

若 α 是 $f(x)$ 的根，$f(2\alpha)=f(\alpha+\alpha)=f(\alpha)+f(\alpha)=0$，即 2α 是 $f(x)$ 的根；

$f(3\alpha)=f(\alpha+2\alpha)=f(\alpha)+f(2\alpha)=0$，即 3α 是 $f(x)$ 的根；

……

如此下去知，对任意正整数 m，$m\alpha$ 是 $f(x)$ 的根. 但当 $f(x)\neq 0$ 时，$f(x)$ 不可能有无穷多根，因此 $f(x)\neq 0$ 时，$\alpha=0$. 故 $f(x)$ 只有零根，或 $f(x)=0$. 于是可设

$$f(x)=x^np(x)\text{，其中 }p(x)\in F[x]\text{且在 }F\text{ 中无根.}$$

因 $f(m)=mf(1)$，$f(1)=p(1)$，于是

$$f(m)=m^np(m)=mf(1)=mp(1).$$

故

$$m^{n-1}p(m)=p(1)\text{，即 }m^{n-1}p(m)-p(1)=0.$$

于是多项式 $x^{n-1}p(x)-p(1)$ 有无穷多个整数根 m. 从而 $x^{n-1}p(x)=p(1)$. 代入 $f(x)=x^np(x)$ 中得 $f(x)=xp(1)$. 记 $p(1)=k$, 则 $f(x)=kx$.

$\Rightarrow$ **证法 3** 对 $\forall b\in F$，由 $f(b)=f(0+b)=f(0)+f(b)$ 知 $f(0)=0$，即 $f(x)$ 的常数项为零. 于是可设

$$f(x)=a_1x+\cdots+a_nx^n.$$

记 $f(1)=a_1+a_2+\cdots+a_n=k$. 将 $1,2,\cdots,n$ 依次代入上式得：

$$\begin{cases}a_1+a_2+\cdots+a_n=k\\2a_1+2^2a_2+\cdots+2^na_n=2k\\\cdots\cdots\\na_1+n^2a_2+\cdots+n^na_n=nk\end{cases}. \qquad ①$$

视①中的 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个解，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\2&2^2&\cdots&2^n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\n&n^2&\cdots&n^n\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}k\\2k\\\vdots\\nk\end{pmatrix}$.

记 $D=|\boldsymbol{A}|=1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot\cdots\cdot(n-1)!\neq 0$，$D_j$ 为用 b 替换 D 的第 j 列所得的行列式，$j=1,2,\cdots,n+1$. 由 Cramer 法则知，$a_1=\dfrac{D_1}{D}=k$，$a_j=\dfrac{D_j}{D}=0$ $(j=2,3,\cdots,n)$. 故 $f(x)=kx$.

问题 1.04 设 $f(x)\neq 0$，证明：$f(x^2)=f^2(x)\Leftrightarrow f(x)=x^n$.

证明 $\Leftarrow$ 若 $f(x)=x^n$，则 $f(x^2)=(x^2)^n=(x^n)^2=f^2(x)$.

$\Rightarrow$ 设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$，$a_0\neq 0$. 因 $f(x^2)=f^2(x)$，则

$$a_0x^{2n}+a_1x^{2n-2}+\cdots+a_{n-1}x^2+a_n=(a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n)^2.$$

对比系数得：$a_0=a_0^2$，$2a_0a_1=0$, $2a_0a_2=a_1$, $2a_0a_3+2a_1a_2=0$, $\cdots$, $a_n=a_n^2$.
由于 $a_0\neq 0$，所以 $a_0=1$. 进而 $a_1=0$，逐步代入其后的式子中得 $a_2=a_3=\cdots=a_{n-1}=a_n=0$. 于是 $f(x)=x^n$.

问题 1.05 设 $f(x)=2x^2-3$，$g(x)=8x^4-6x^2+4x-7$，求 $f^3(x)g(x)$ 所有系数的和.

解 $f(1)=-1$，$g(1)=-1$，故 $f^3(x)g(x)$ 所有系数的和为 $f^3(1)g(1)=(-1)^3(-1)=1$.

注：多项式 $f(x)$ 的所有系数之和为 $f(1)$，$f(x)$ 的常数项为 $f(0)$.

问题 1.06 设 $f_1(x)=1$，$f_{i+1}(x)=1-xf_i(x), i=1,2,\cdots$. 求 $F(x)=1+f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_{2017}(x)$ 所有系数的和.

解 易见，

$$f_1(x)=1,\quad f_2(x)=1-x,\quad f_3(x)=1-x+x^2,\quad f_4(x)=1-x+x^2-x^3,\cdots$$

可以看出，当 i 为奇数时，$f_i(x)$ 的所有系数之和为 1；当 i 为偶数时，$f_i(x)$ 的所有系数之和为 0. 从而 $F(x)=1+f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_{2015}(x)$ 所有系数的和为 1009+1=2010.

问题 1.07 设 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_{n-1}(x)$ 是 $n-1$ 个多项式. 证明：若

$$1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}\mid f_1(x^n)+xf_2(x^n)+\cdots+x^{n-2}f_{n-1}(x^n),$$

则 $f_i(x)$ 的所有系数之和为 0. $i=1,2,\cdots,n-1$.

证明 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_{n-1}$ 是不等于 1 的全部 n 次单位根，则 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_{n-1}$ 互不相同. 由

$$1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}\mid f_1(x^n)+xf_2(x^n)+\cdots+x^{n-2}f_{n-1}(x)$$

知，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_{n-1}$ 是 $f_1(x^n)+xf_2(x^n)g(x)+\cdots+x^{n-2}f_{n-1}(x)$ 的根. 于是有

$$\begin{cases} f_1(1)+\varepsilon_1f_2(1)+\varepsilon_1^2f_3(1)+\cdots+\varepsilon_1^{n-2}f_{n-1}(1)=0\\ f_1(1)+\varepsilon_2f_2(1)+\varepsilon_2^2f_3(1)+\cdots+\varepsilon_2^{n-2}f_{n-1}(1)=0\\ \cdots\cdots\\ f_1(1)+\varepsilon_{n-1}f_2(1)+\varepsilon_{n-1}^2f_3(1)+\cdots+\varepsilon_{n-1}^{n-2}f_{n-1}(1)=0 \end{cases} \quad ①$$

将①式看成以 $f_1(1),f_2(1),\cdots,f_{n-1}(1)$ 为未知量的齐次线性方程组，其系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix}1 & \varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_1^{n-2}\\ 1 & \varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_2^{n-2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \varepsilon_{n-1} & \cdots & \varepsilon_{n-1}^{n-2}\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(\varepsilon_i-\varepsilon_j)\neq 0,$$

①只有零解. 故 $f_i(1)=0$，从而 $f_i(x)$ 的所有系数之和为 0，$i=1,2,\cdots,n-1$.

注：若 $f(x)$ 的根都是 $g(x)$ 的根且 $f(x)$ 无重根，则 $f(x)\mid g(x)$.

问题 1.08 设 $f(x)=(x^{50}-x^{49}+x^{48}-x^{47}+\cdots-x+1)(x^{50}+x^{49}+x^{48}+\cdots+x+1)$，求 $f(x)$ 的奇次项系数之和.

解法 1 由于
$$x^{51}+1=(x+1)(x^{50}-x^{49}+x^{48}-x^{47}+\cdots-x+1);$$
$$x^{51}-1=(x-1)(x^{50}+x^{49}+x^{48}+x^{47}+\cdots+x+1),$$
两式相乘得：$x^{102}-1=(x^2-1)f(x)$. 由于 $x^{102}-1$，x^2-1均无奇数次项，故 $f(x)$ 的奇数次项系数之和为 0.

解法 2 因
$$f(-x)=(x^{50}+x^{49}+x^{48}+\cdots+x+1)(x^{50}-x^{49}+x^{48}-x^{47}+\cdots-x+1)=f(x),$$
故 $f(x)$ 为偶函数，于是 $f(x)$ 的奇次项系数之和为 0.

问题 1.09 a,b,c 满足什么条件时，$(x^2+ax+1)\mid(x^4+bx^2+c)$.

解 令 $x^4+bx^2+c=(x^2+ax+1)(x^2+mx+n)$，比较两端系数得：
$$a+m=0,\quad am+n+1=b,\quad an+m=0,\quad n=c.$$
将 $m=-a,\ n=c$ 代入 $an+m=0$ 中得：
$$a(c-1)=0.$$
若 $a=0$，则 $b=c+1$；若 $c=1$，则 $b=2-a^2$. 故 $(x^2+ax+1)\mid(x^4+bx^2+c)$ 的条件是
$$\begin{cases}a=0\\b=c+1\end{cases}\text{或}\begin{cases}c=1\\b=2-a^2\end{cases}.$$

问题 1.10 设 $f_1(x),f_2(x)$ 是两个多项式. 证明：如果 x^2+x+1 整除 $f_1(x^3)+xf_2(x^3)$，则 $x-1$ 整除 $f_1(x),f_2(x)$.

证明 易见，x^2+x+1 的根为 3 次单位原根 ϖ 及它的共轭数 $\bar{\varpi}$. 因 x^2+x+1 整除 $f_1(x^3)+xf_2(x^3)$，故
$$f_1(\varpi^3)+\varpi f_2(\varpi^3)=0,\quad f_1(\bar{\varpi}^3)+\bar{\varpi}f_2(\bar{\varpi}^3)=0.$$
即
$$f_1(1)+\varpi f_2(1)=0,\quad f_1(1)+\bar{\varpi}f_2(1)=0.$$
由以上两式可得 $f_1(1)=f_2(1)=0$. 从而 $(x-1)\mid f_1(x),(x-1)\mid f_2(x)$.

问题 1.11 设 x^2+1整除 $x^k+x^{k-1}+\cdots+x+1$，求 k 的值.

解 因 $(x-1)(x^k+x^{k-1}+\cdots+x+1)=x^{k+1}-1$，又 x^2+1的两根为 $\pm\mathrm{i}$，故由所给条件知，$\pm\mathrm{i}$ 必为 $x^k+x^{k-1}+\cdots+x+1$的根. 于是 $k+1$为 4 的倍数，故 $k\equiv 3\bmod 4$.

问题 1.12 设 $f(x)=1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n}$，$g(x)=1+x^4+x^8+\cdots+x^{4n}$. 证明：$f(x)\mid g(x)\Leftrightarrow n$ 为偶数.

证明 因 $(x^2-1)f(x)=x^{2n+2}-1$，$(x^4-1)f(x)=x^{4n+4}-1$，则
$$f(x)=\frac{x^{2n+2}-1}{x^2-1},\ g(x)=\frac{x^{4n+4}-1}{x^4-1}.$$
于是
$$\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{x^{4n+4}-1}{x^4-1}\cdot\frac{x^2-1}{x^{2n+2}-1}=\frac{x^{2n+2}+1}{x^2+1}=\frac{x^{2(n+1)}+1}{x^2+1}.$$
故 $f(x)\mid g(x)\Leftrightarrow(x^2+1)\mid(x^{2(n+1)}+1)\Leftrightarrow(\pm\mathrm{i})^{2(n+1)}+1=0\Leftrightarrow n$ 为偶数.

问题 1.13 证明：$x^2+x+1\mid x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$ (m,n,p 为任意正整数).

证法 1 因 $x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}=(x^{3m}-1)+x(x^{3n}-1)+x^2(x^{3p}-1)+x^2+x+1$，而

$$x^{3k}-1=(x^3)^k-1=(x^3-1)(x^{3(k-1)}+x^{3(k-2)}+\cdots+x^3+1)$$
$$=(x-1)(x^2+x+1)(x^{3(k-1)}+x^{3(k-2)}+\cdots+x^3+1),$$
所以 $(x^2+x+1)\mid(x^{3m}-1)$, $(x^2+x+1)\mid(x^{3n}-1)$, $(x^2+x+1)\mid(x^{3p}-1)$. 故
$$x^2+x+1\mid x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}.$$

证法 2 x^3-1 的两个虚根 ϖ_1,ϖ_2 满足 $1+x+x^2=0$，将 ϖ_1,ϖ_2 分别代入 $x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$ 中得：
$$\varpi_1^{3m}+\varpi_1^{3n+1}+\varpi_1^{3p+2}=1+\varpi_1+\varpi_1^2=0,\quad \varpi_2^{3m}+\varpi_2^{3n+1}+\varpi_2^{3p+2}=1+\varpi_2+\varpi_2^2=0.$$
又 $x-\varpi_1$ 与 $x-\varpi_2$ 互素，所以 $(x-\varpi_1)(x-\varpi_2)\mid x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$，即 $x^2+x+1\mid x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$.

问题 1.14 设 $f_1(x),f_2(x)\cdots,f_s(x)$ 有公共根 1，证明：对任意多项式 $g_1(x),g_2(x)\cdots,g_s(x)$，
$$(x^{n-1}+\cdots+x+1)\mid g_1(x)f_1(x^n)+g_2(x)f_2(x^n)+\cdots+g_s(x)f_s(x^n).$$

证明 设 α 是 $x^{n-1}+\cdots+x+1$ 的任一根，则 $\alpha^n=1$. 由 $f_1(x),f_2(x),\cdots,f_s(x)$ 有公共根 1 可知，
$$0=f_i(1)=f_i(\alpha^n),i=1\cdots s,$$
即 α 是每一个 $f_i(x^n),i=1,2,\cdots,s$ 的根. 因而 α 也是 $g_1(x)f_1(x^n)+g_2(x)f_2(x^n)+\cdots+g_s(x)f_s(x^n)$ 的根. 又因 $x^{n-1}+\cdots+x+1$ 无重根，故
$$(x^{n-1}+\cdots+x+1)\mid g_1(x)f_1(x^n)+g_2(x)f_2(x^n)+\cdots+g_s(x)f_s(x^n).$$

问题 1.15 用 $x-1,x-2,x-3$ 除 $f(x)$ 的余式分别为 4,8,16，试求用 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 除 $f(x)$ 的余式.

解 令 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)q(x)+ax^2+bx+c$. 由 $f(1)=4,f(2)=8,f(3)=16$ 知，
$$a+b+c=1,\ 4a+2b+c=8,\ 9a+3b+c=16.$$
以上三式联立求出 $a=2,b=-2,c=4$. 故 $(x-1)(x-2)(x-3)$ 除 $f(x)$ 的余式为 $2x^2-2x+4$.

问题 1.16 用 $x-a,x-b,x-c$ 除 $f(x)$ 的余式分别为 r,s,t，试求用 $g(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$ 除 $f(x)$ 的余式.

解 因 $f(a)=r$，$f(b)=s$，$f(c)=t$，可设
$$f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)q(x)+d(x)\text{，其中 }\partial^0 d(x)\leqslant 2\text{ 且 }d(a)=r,\ d(b)=s,\ d(c)=t.$$
由 Lagrange 插值公式得：$d(x)=r\cdot\dfrac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+s\cdot\dfrac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+t\cdot\dfrac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$.

问题 1.17 求一个 3 次多项式 $f(x)$，使 $f(x)+1$ 能被 $(x-1)^2$ 整除，$f(x)-1$ 能被 $(x+1)^2$ 整除.

解 因 $x=1$ 为 $f(x)+1$ 的最少 2 重根，故 $x=1$ 为 $f'(x)$ 的最少 1 重根. 同理，$x=-1$ 为 $f'(x)$ 的最少 1 重根. 又因 $\partial^\circ f'(x)=2$，故可设
$$f'(x)=a(x-1)(x+1)=a(x^2-1).$$
积分得
$$f(x)=a\left(\frac{1}{3}x^3-x\right)+b.$$
因 $f(1)=-1,f(-1)=1$，即
$$a\left(\frac{1}{3}-1\right)+b=-1,\quad a\left(-\frac{1}{3}+1\right)+b=1.$$
解得 $a=\dfrac{3}{2},b=0$，从而所求 3 次多项式为 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^3-\dfrac{3}{2}x$.

问题 1.18 求一个 7 次多项式 $f(x)$，使 $f(x)+1$ 能被 $(x-1)^4$ 整除，$f(x)-1$ 能被 $(x+1)^4$ 整除.

解 因 $x=1$ 为 $f(x)+1$ 的最少 4 重根，故 $x=1$ 为 $f'(x)$ 的最少 3 重根. 同理，$x=-1$ 为 $f'(x)$ 的最少 3 重根. 又因 $\partial^0 f'(x)=6$，故可设

$$f'(x)=a(x-1)^3(x+1)^3=a(x^6-3x^4+3x^2-1).$$

积分得
$$f(x)=a\left(\frac{1}{7}x^7-\frac{3}{5}x^5+x^3-x\right)+b.$$

因 $f(1)=-1, f(-1)=1$，即

$$a\left(\frac{1}{7}-\frac{3}{5}\right)+b=-1,\quad a\left(-\frac{1}{7}+\frac{3}{5}\right)+b=1.$$

解得 $a=\dfrac{35}{16}$，$b=0$. 从而所求 7 次多项式为 $f(x)=\dfrac{5}{16}x^7-\dfrac{21}{16}x^5+\dfrac{35}{16}x^3-\dfrac{35}{16}x.$

问题 1.19 证明：$(x^d-1)\mid(x^n-1)$ 的充要条件是 $d\mid n$.

证法 1 $\Leftarrow$ 设 $d\mid n$，令 $n=md$，则

$$x^n-1=(x^d)^m-1=(x^d-1)(x^{d(m-1)}+x^{d(m-2)}+\cdots+x^d+1),$$

故 $(x^d-1)\mid(x^n-1)$.

$\Rightarrow$ 设 $n=dq+r\ (0\leqslant r<d)$，则

$$x^n-1=x^{dq+r}-1=(x^{dq}-1)x^r+x^r-1.$$

因 $(x^d-1)\mid(x^n-1)$，$(x^d-1)\mid(x^{dq}-1)$，所以 $(x^d-1)\mid(x^r-1)$，而 $0\leqslant r<d$，所以 $r=0$. 从而 $n=dq$，即 $d\mid n$.

证法 2 $\Leftarrow$ 同证法 1.

$\Rightarrow$ $x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$，$x^d-1=(x-1)(x^{d-1}+x^{d-2}+\cdots+x+1)$.

因 $(x^d-1)\mid(x^n-1)$，所以 $(x^{d-1}+x^{d-2}+\cdots+x+1)\mid(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$. 则

$$x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1=(x^{d-1}+x^{d-2}+\cdots+x+1)q(x),$$ 其中 $q(x)$ 是整系数多项式.

取 $x=1$，则 $n=dq(1)$，而 $q(1)$ 为整数，故 $d\mid n$.

问题 1.20 设 P 是一个数域，$f(x),g(x)\in P[x]$ 且 $\partial^0 f(x)\geqslant 1$. 证明：存在唯一的多项式序列 $f_0(x),f_1(x),\cdots,f_r(x)\in P[x]$，使

$$f(x)=f_0(x)+f_1(x)g(x)+f_2(x)g^2(x)+\cdots+f_r(x)g^r(x).$$

其中 $\partial^0 f_i(x)<\partial^0 g(x)$ 或 $f_i(x)=0$，$0\leqslant i\leqslant r$.

证明 由带余除法定理知 $f(x)=g(x)p(x)+f_0(x)$，这里 $\partial^0 f_0(x)<\partial^0 g(x)$ 或 $f_0(x)=0$.

如果 $\partial^0 p(x)\geqslant\partial^0 g(x)$，再令 $p(x)=g(x)p_1(x)+f_1(x)$，这里 $\partial^0 f_1(x)<\partial^0 g(x)$ 或 $f_1(x)=0$. 那么

$$f(x)=g(x)[g(x)p_1(x)+f_1(x)]+f_0(x)=f_0(x)+f_1(x)g(x)+p_1(x)g^2(x).$$

如果 $\partial^0 p_1(x)\geqslant\partial^0 g(x)$，再设 $p_1(x)=g(x)p_2(x)+f_2(x)$，这里 $\partial^0 f_2(x)<\partial^0 g(x)$ 或 $f_2(x)=0$. 那么

$$\begin{aligned}f(x)&=f_0(x)+f_1(x)g(x)+[g(x)p_2(x)+f_2(x)]g^2(x)\\&=f_0(x)+f_1(x)g(x)+f_2(x)g^2(x)+p_2(x)g^3(x).\end{aligned}$$

如此下去，$f(x)=f_0(x)+f_1(x)g(x)+f_2(x)g^2(x)+\cdots+f_r(x)g^r(x)$.

设另有多项式序列 $h_0(x),h_1(x),\cdots,h_r(x)\in P[x]$，符合 $\partial^0 h_i(x)<\partial^0 g(x)$ 或 $h_i(x)=0$，$0\leqslant i\leqslant r$，使

$$f(x)=h_0(x)+h_1(x)g(x)+h_2(x)g^2(x)+\cdots+h_r(x)g^r(x),$$

则 $$0=[f_0(x)-h_0(x)]+[f_1(x)-h_1(x)]g(x)+[f_2(x)-h_2(x)]g^2(x)+\cdots+[f_r(x)-h_r(x)]g^r(x).$$

由于多项式序列 $f_0(x)-h_0(x),[f_1(x)-h_1(x)]g(x),[f_2(x)-h_2(x)]g^2(x),\cdots,[f_r(x)-h_r(x)]g^r(x)$ 的次数是严格升序，不能相互抵消，所以只能有

$$f_i(x)-h_i(x)=0,i=0,1,2,\cdots,r\text{，即 }f_i(x)=h_i(x)=0,i=0,1,2,\cdots,r.$$

唯一性得证.

问题 1.21 设 $f(x),g(x)$ 是数域 P 上的非零多项式，且 $g(x)=s^m(x)g_1(x)$. 其中 $m\geqslant 1$，$(s(x),g_1(x))=1,s(x)\mid f(x)$. 证明：不存在 $f_1(x),r(x)\in P[x]$，且 $r(x)\neq 0,\partial^0 r(x)<\partial^0 s(x)$，使得 $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{r(x)}{s^m(x)}+\dfrac{f_1(x)}{s^{m-1}(x)g_1(x)}$.

证明 反证. 若存在 $f_1(x),r(x)\in P[x]$，使

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{r(x)}{s^m(x)}+\frac{f_1(x)}{s^{m-1}(x)g_1(x)}\text{，其中 }r(x)\neq 0,\ \partial^0 r(x)<\partial^0 s(x).$$

两端同乘 $g(x)$ 得： $$f(x)=r(x)g_1(x)+f_1(x)s(x).$$

因 $s(x)\mid f(x),s(x)\mid f_1(x)s(x)$，故 $s(x)\mid r(x)g_1(x)$，而 $(s(x),g_1(x))=1$，故 $s(x)\mid r(x)$. 这不可能.

故不存在 $f_1(x),r(x)\in P[x]$，且 $r(x)\neq 0,\ \partial^0 r(x)<\partial^0 s(x)$，使得 $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{r(x)}{s^m(x)}+\dfrac{f_1(x)}{s^{m-1}(x)g_1(x)}$.

问题 1.22 设 $f(x),g(x)$ 是数域 F 上的多项式，证明：$f(x)\mid g(x)$ 当且仅当对任意大于 1 的自然数 n，都有 $f^n(x)\mid g^n(x)$.

证明 $\Rightarrow$ 若 $f(x)\mid g(x)$，则 $f^n(x)\mid g^n(x)$.

$\Leftarrow$ 令 $f(x)=ap_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_t^{r_t}(x)$，$g(x)=bq_1^{s_1}(x)q_2^{s_2}(x)\cdots q_l^{s_l}(x)$ 分别为 $f(x),g(x)$ 在 F 的典型分解式，因 $f^n(x)\mid g^n(x)$，故 $t\leqslant l$，且每一个 $[p_i^{r_i}(x)]^n$ 必然整除 $[q_1^{s_1}(x)]^n,[q_2^{s_2}(x)]^n,\cdots,[q_l^{s_l}(x)]^n$ 中的某一个，不妨设 $[p_i^{r_i}(x)]^n\mid[q_i^{s_i}(x)]^n$，$i=1,2,\cdots,t$. 于是 $p_i^{r_i}(x)\mid q_i^{s_i}(x)$，$i=1,2,\cdots,t$，从而 $f(x)\mid g(x)$.

问题 1.23 设 $f(x)=x^2-4x+a$，存在唯一的 3 次首 1 多项式 $g(x)$，使 $f(x)\mid g(x)$ 且 $g(x)\mid f^2(x)$，求出 a 与 $g(x)$.

解 由 $f(x)\mid g(x)$ 可设 $g(x)=(x^2-4x+a)(x-b)=x^3-4x^2+(a+4b)x-ab$. 易算出：

$$f^2(x)=x^4-8x^3+(2a+16)x^2-8ax+a^2.$$

用 $g(x)$ 除 $f^2(x)$ 得：$f^2(x)=g(x)(x-4)+[(a-4b)x^2+(ab-4a+16b)x+a^2-4ab]$.

由 $g(x)\mid f^2(x)$ 知，$(a-4b)x^2+(ab-4a+16b)x+a^2-4ab=0$. 从而求出 $a=b=0$. 此时

$$g(x)=x^3-4x^2.$$

（二）最大公因式，互素

问题 1.24 设 $f(x),g(x),h(x)$ 都是数域 P 上的多项式，满足：

$$(x^2+1)h(x)+(x-1)f(x)+(x-2)g(x)=0\text{，}(x^2+1)h(x)+(x+1)f(x)+(x+2)g(x)=0.$$

证明：(x^2+1) 是 $f(x),g(x)$ 的公因式.

证明 两式相减得 $f(x)=-2g(x)$. 两式相加得 $(x^2+1)h(x)+xf(x)+xg(x)=0$. 于是得

$$(x^2+1)h(x)-xg(x)=0，\ 即\ (x^2+1)\mid xg(x).$$

因 x^2+1,x 互素，故 $(x^2+1)\mid g(x)$，进而 $(x^2+1)\mid f(x)$. 从而 (x^2+1) 是 $f(x),g(x)$ 的公因式.

问题 1.25 求多项式 $f(x)=\underbrace{x^m\cdot x^m\cdot\cdots\cdot x^m}_{m}-x$ 与 $g(x)=(x^4+1)(x^2+1)(x+1)(x-1)x$ 的最大公因式，其中 $m(\neq 1)$ 为正奇数.

解 由所给条件知，$g(x)=x(x^8-1)$，$f(x)=x^{m^2}-x=x(x^{m^2-1}-1)$. 因 m 为正奇数且 $m\neq 1$，令 $m=2n+1$，$n>0$ 为整数，则

$$m^2-1=4n^2+4n=4n(n+1).$$

又因 $n,n+1$ 中必有一个偶数，则 $n(n+1)=2k$，于是 $m^2-1=8k$，$k>0$ 为整数. 则

$$f(x)=x^{m^2}-x=x(x^{8k}-1).$$

从而 $(f(x),g(x))=x(x^8-1)$.

问题 1.26 设 $f(x),g(x)$ 都是多项式，且 $F(x)=\dfrac{f(x)}{(f(x),g(x))}$ 和 $G(x)=\dfrac{g(x)}{(f(x),g(x))}$ 的次数都大于 0. 证明：唯一地存在多项式 $u(x),v(x)$ 使

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))\ 并且满足\ 0<\partial^0u(x)<\partial^0G(x)，\ 0<\partial^0v(x)<\partial^0F(x).$$

证明 只需证：唯一地存在满足 $0<\partial^0u(x)<\partial^0G(x)$，$0<\partial^0v(x)<\partial^0F(x)$ 的多项式 $u(x),v(x)$，使 $u(x)F(x)+v(x)G(x)=1$. 其后等式两端同乘以 $(f(x),g(x))$ 即得出欲证明的等式.

因 $(F(x),G(x))=1$，所以存在 $u_1(x),v_1(x)$ 使

$$u_1(x)F(x)+v_1(x)G(x)=1.$$

又因 $\partial^0F(x)>0,\partial^0G(x)>0$，故 $F(x)$ 不整除 $v_1(x)$，$G(x)$ 不整除 $u_1(x)$. 令

$$v_1(x)=F(x)q_1(x)+v(x),\partial^0v(x)<\partial^0F(x)，\ u_1(x)=G(x)q_2(x)+u(x),\partial^0u(x)<\partial^0G(x),$$

将以上两式代入 $u_1(x)F(x)+v_1(x)G(x)=1$ 中得：

$$[G(x)q_2(x)+u(x)]F(x)+[F(x)q_1(x)+v(x)]G(x)=1.$$

整理即得：

$$u(x)F(x)+v(x)G(x)+[q_1(x)+q_2(x)]F(x)G(x)=1.$$

由于 $\partial^0u(x)<\partial^0G(x),\partial^0v(x)<\partial^0F(x)$，故必有 $q_1(x)+q_2(x)=0$. 于是

$$u(x)F(x)+v(x)G(x)=1，\ 且\ \partial^0u(x)<\partial^0G(x),\partial^0v(x)<\partial^0F(x).$$

再证唯一性. 若另有 $m(x),n(x)$ 使得

$$m(x)F(x)+n(x)G(x)=1\quad 且\quad \partial^0m(x)<\partial^0G(x),\ \partial^0n(x)<\partial^0F(x),$$

则

$$[u(x)-m(x)]F(x)=[n(x)-v(x)]G(x).$$

于是 $F(x)\mid[n(x)-v(x)]G(x)$. 但 $(F(x),G(x))=1$，故 $F(x)\mid[n(x)-v(x)]$. 又 $\partial^0v(x),\partial^0n(x)<\partial^0F(x)$，故

$$n(x)-v(x)=0，\ 即\ n(x)=v(x).$$

进而，$m(x)=u(x)$，从而唯一性得证.

问题 1.27 设 $f(x),g(x)$ 为数域 F 上的非零多项式，且 $(f(x),g(x))=1$．令

$$\varphi(x)=(x^3-1)f^n(x)+(x^3-x^2+x-1)g^m(x)\text{，}\quad \psi(x)=(x^2-1)f^n(x)+(x^2-x)g^m(x)\text{，}$$

证明：$(\varphi(x),\psi(x))=x-1$．

证明 易见
$$\varphi(x)=(x-1)[(x^2+x+1)f^n(x)+(x^2+1)g^m(x)],$$
$$\psi(x)=(x-1)[(x+1)f^n(x)+xg^m(x)].$$

故只需证 $(x^2+x+1)f^n(x)+(x^2+1)g^m(x)$ 与 $(x+1)f^n(x)+xg^m(x)$ 互素．

若 $(x^2+x+1)f^n(x)+(x^2+1)g^m(x)$ 与 $(x+1)f^n(x)+xg^m(x)$ 不互素，则 $\exists\, p(x)\in F[x]$ 不可约，使
$$p(x)\mid[(x^2+x+1)f^n(x)+(x^2+1)g^m(x)] \quad 且 \quad p(x)\mid[(x+1)f^n(x)+xg^m(x)].$$

从而 $(x^2+x+1)f^n(x)+(x^2+1)g^m(x)-x[(x+1)f^n(x)+xg^m(x)]$ 可被 $p(x)$ 整除．即
$$p(x)\mid(f^n(x)+g^m(x)).$$

又因 $(x+1)f^n(x)+xg^m(x)=x[f^n(x)+g^m(x)]+f^n(x)$，所以，$p(x)\mid f^n(x)$，进而 $p(x)\mid g^m(x)$．而 $p(x)$ 在 F 上不可约，故 $p(x)\mid f(x),p(x)\mid g(x)$．这与 $(f(x),g(x))=1$ 矛盾．故 $(\varphi(x),\psi(x))=x-1$．

问题 1.28 设 $f(x),g(x)$ 都是首 1 多项式，证明：$[f(x),g(x)]\cdot(f(x),g(x))=f(x)g(x)$．

证明 令 $(f(x),g(x))=d(x)$，则 $d(x)\neq 0$．再令 $f(x)=d(x)f_1(x),\ g(x)=d(x)g_1(x)$，则 $(f_1(x),g_1(x))=1$．取

$$m(x)=d(x)f_1(x)g_1(x)=f(x)g_1(x)=f_1(x)g(x)\text{，}$$

则 $m(x)$ 为 $f(x),g(x)$ 的一个公倍式．

设 $k(x)$ 为 $f(x),g(x)$ 的任意一个公倍式，且令 $k(x)=r(x)f(x)=s(x)g(x)$，则

$$r(x)f_1(x)d(x)=s(x)g_1(x)d(x).$$

约掉 $d(x)$ 后为 $r(x)f_1(x)=s(x)g_1(x)$．于是 $g_1(x)\mid r(x)f_1(x)$．由于 $(f_1(x),g_1(x))=1$，所以 $g_1(x)\mid r(x)$．于是又有

$$r(x)=g_1(x)t(x).$$

从而 $k(x)=r(x)f(x)=g_1(x)t(x)f_1(x)d(x)=t(x)m(x)$，即 $k(x)$ 为 $m(x)$ 的倍式. 从而 $m(x)=[f(x),g(x)]$．进而

$$[f(x),g(x)]\cdot(f(x),g(x))=f_1(x)g_1(x)d(x)d(x)=f(x)g(x).$$

问题 1.29 证明：$(x^m-1,x^n-1)=x^d-1$．其中 $d=(m,n)$．

证明 记 $g(x)=(x^m-1,x^n-1),\quad (m,n)=d$，易见 $(x^d-1)\mid g(x)$．

另一方面，$\exists r,t\in Z$ 使 $rm+tn=d$．因 $(x^m-1)\mid(x^{rm}-1)$，$(x^n-1)\mid(x^{tn}-1)$，所以

$$g(x)\mid(x^{rm}-1)(x^{tn}-1).$$

而 $(x^{rm}-1)(x^{tn}-1)=x^{rm+tn}-(x^{rm}-1)-(x^{tn}-1)-1=(x^d-1)-(x^{rm}-1)-(x^{tn}-1)$，所以 $g(x)\mid(x^d-1)$．

又 $g(x),x^d-1$ 均首 1，故 $(x^m-1,x^n-1)=g(x)=x^d-1$．

问题 1.30 设 m,n 都是大于 1 的整数，

$$f(x)=x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1,\ g(x)=x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1,$$

证明：$f(x),g(x)$ 互素的充要条件是 $(m,n)=1$．

证明 $\Rightarrow$ 若 $(m,n)=d\neq 1$，设 $m=ds,n=dt$，则