# 概率论与数理统计

刘国祥　解锋昌　主编

科学出版社

# 概率论与数理统计

刘国祥　解锋昌　主编

科学出版社

北京

## 内 容 简 介

本书是专为数学、统计院系各专业及金融数学专业编写的. 全书共十章，前五章属于概率论部分，内容包括事件与概率、随机变量及其分布、随机向量及其分布、随机变量的数字特征和特征函数、大数定律和中心极限定理；后五章属于数理统计部分，内容包括数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析、回归分析. 另外，书后的附录一对 SPSS 统计软件及其应用做了介绍，附录二列出了一些重要的数值.

本书适合作为高等院校数学、统计院系各专业及金融数学专业概率论与数理统计课程的教材，也可供其他各专业学生和自学者学习参考.

**图书在版编目（CIP）数据**

概率论与数理统计 / 刘国祥，解锋昌主编. —北京：科学出版社，2017.6
ISBN 978-7-03-053168-1

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①刘… ②解… Ⅲ. ①概率论-高等学校-教材 ②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 128138 号

责任编辑：李淑丽 李香叶 / 责任校对：李 影
责任印制：吴兆东/ 封面设计：华路天然工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
北京教图印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2017 年 6 月第 一 版 开本：787 × 1092 1/16
2017 年 6 月第一次印刷 印张：20
字数：400 000

**定价：49.00 元**

# 前言

“概率论与数理统计”是全国高等院校数学、统计院系及金融数学专业的基础课程. 我们在 2002 年就编写出版了该课程的教材, 并在数学各专业、统计学专业使用至今, 在金融数学专业也已使用多年.

在原教材的编写过程中我们特别注意了以下两点: ①尽量根据学生数学基础课的进程, 能详则详, 不能详则简. 例如, 由于实变函数与概率论一般是同时开设的, 因此, 概率的定义尽量避免直接构建在学生尚未学到的测度论的框架上, 而是通过逐步引入概率的统计定义、古典定义和几何定义, 然后才总结性地给出概率的公理化定义, 以使学生有一个逐步适应的过程. 又如, 为使学生对大数定律在数理统计中的应用有清晰的理解, 我们详述了随机变量序列的四种收敛性并给出了相关证明; 为拓展学生学习的空间, 有的地方我们增加了相对本科生具有前瞻性的内容, 如统计决策、最佳检验等. ②在编排上做适当的调整, 以利于学生的学习. 例如, 我们把数字特征的概念放在随机变量(向量)及其分布的内容之后, 这样可以避免学生在尚未弄清随机变量(向量)的概念就陷入有关数字特征繁杂的微积分运算的尴尬局面之中.

这次我们重新修订出版该教材, 将结合十多年的教学经验, 除保留以上两点并对原教材中错漏之处进行修订之外, 主要做了以下三方面的工作: ①对部分内容作了调整, 如分布函数定义中的左连续性调整为了右连续性; ②增加了统计软件(SPSS)应用举例作为附录, 便于学生对统计软件的学习和初步应用训练; ③增加了各章的练习题, 希望有助于读者更好地对概念与方法的理解和掌握.

本书在编写过程中参考了国内外多种教材, 特别是从中摘取了不少好的例题和习题. 为此, 我们向这些编著者表示诚挚的谢意.

本书的编写分工如下: 第一章, 王晓谦、何志芳; 第二章, 姚奕; 第三章, 杜秀丽; 第四章, 梁志彬; 第五、六章, 杨纪龙; 第七章, 赵媛媛; 第八章, 冯玉英; 第九、十章, 刘国祥; 附件一, 解锋昌、高启兵. 全书由刘国祥统稿.

本书建议学时数为 160 学时, 其中概率论 80 学时、数理统计为 80 学时; 一般分两个学期; 统计学专业、金融数学专业建议去掉第十章回归分析.

由于编者水平所限, 难免有不当之处, 敬请读者批评、指正.

编　者

2016 年 12 月 18 日

# 目　　录

# 第一章　事件与概率

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律的一门数学学科. 那么, 什么是随机现象呢? 为此先引入如下基本概念.

## 一、必然现象与随机现象

当我们多次观察自然现象和社会现象时, 会发现许多结果在一定条件下必然发生. 例如, 在标准大气压下, 纯水加热到 100℃ 时必然会沸腾; 又如在没有外力作用的条件下, 做匀速直线运动的物体必然继续做匀速直线运动; 再如掷一颗骰子, 出现点数为 7 是不可能的, 等等. 它们的共同特征是, 现象的某个结果在给定条件下能否发生是完全可以预言的. 所有这种现象被称为**必然现象**. 它们表达了条件和结果之间的确定性联系. 概率论与数理统计以外的数学分支研究的是必然现象的数量规律.

但是在自然现象和社会现象中, 也广泛存在着与确定性现象有着本质区别的另一类现象, 例如, 当掷一枚硬币时, 可能出现“正面朝上”, 也可能出现“反面朝上”, 在掷硬币之前不能确定哪一面朝上; 某地 110 报警台每一小时内接到的报警次数可能是 0 次, 也可能是 1 次, 2 次, …, 事先不能确定哪种结果会出现. 一般地, 在一定条件下可能发生这样的结果, 也可能发生那样的结果, 即预先不能确定到底发生哪种结果的现象称为**随机现象**.

## 二、随机试验

为探索随机现象的规律性, 常常需要进行一系列试验. 试验是一个很广泛的术语, 但在概率论与数理统计中, 试验有它独特的含义. 一个试验如果满足下述条件:

(1) 试验可以在同一条件下重复进行;

(2) 试验的所有可能结果是明确可知道的, 而且往往不止一个;

(3) 每次试验总是恰好出现这些可能结果中的某一个, 但在试验之前不能确定哪个结果将会出现.

就称这样的试验是一个**随机试验**, 为方便起见, 也简称为试验.

显然, 一种随机现象就对应一个随机试验. 随机试验常用 $E$ 或 $E_1, E_2, \cdots$ 表示.

## 三、随机现象的统计规律性

通过实践我们了解到, 随机现象虽然在少数几次试验中, 时而出现这样的结果, 时而出现那样的结果, 表现出一种不确定性或偶然性, 但在大量重复试验中却是有其规律性的. 例如, 将一枚质料均匀、形状对称的硬币(通常称为均匀的硬币)投掷一次, 可能出现正面朝上, 也可能出现反面朝上, 其结果事先无法肯定. 但是在大量次数的投掷中, 出现正面朝上的次数几乎总是投掷总次数的一半, 呈现出明显的规律性.

物理学上这样的例子也很多. 例如, 波义耳—马略特定律就是其中的一个, 这个定律告诉我们, 构成气体的每个分子在运动过程中是杂乱无章的, 然而大量分子运动总体的压强、体积与温度之间是有规律性的. 通常把随机现象在大量重复试验下所呈现的这种规律性称为随机现象的**统计规律性**.

概率论与数理统计就是研究随机现象的统计规律性的数学学科. 由于随机现象的普遍性, 使得概率论与数理统计具有极其广泛的应用. 近年来, 一方面它为科学技术、社会经济发展等作出了重要的贡献; 另一方面, 广泛的应用也促进了概率论与数理统计的快速发展.

本章我们主要介绍概率论的基本概念.

## 第一节　随机事件和样本空间

### 一、随机事件

对于随机试验, 人们通常关心的是试验的结果中可能会发生哪些事情, 以及发生这些事情的可能性有多大. 我们把随机试验的结果中可能发生, 也可能不发生的事情称为**随机事件**, 简称为**事件**. 随机事件通常用大写字母 $A, B, \cdots$ 来表示.

如果在每次试验中, 某件事一定发生, 则称这件事为**必然事件**; 相反地, 如果在每次试验中, 某件事一定不发生, 则称这件事为**不可能事件**. 必然事件和不可能事件同属确定性范畴, 都不是随机事件. 但是为了方便起见, 我们还是把它们看作随机事件, 稍后我们会理解, 它们不过是随机事件的两个极端情形而已.

**例 1.1.1**　掷一枚均匀的硬币, 观察哪面朝上, 则 $A$={正面朝上}, $B$={反面朝上}都是随机事件. $\Omega$={正面朝上或反面朝上}是必然事件, $\varnothing$={正反面两面都朝上}是不可能事件.

**例 1.1.2**　掷一颗均匀的骰子, 观察朝上一面的点数, 则 $A_i$={掷出点数为 $i$ 点}, $i=1, 2,\cdots, 6$; $C$={掷出点数为奇数点}; $G$={掷出点数大于 1 且小于 5}, 等等都是随机事件. 而 $\Omega$={掷出点数小于 7}是必然事件, $\varnothing$={掷出点数小于 1}是不可能事件.

再进一步比较分析例 1.1.2 中的随机事件后, 不难发现事件 $A_1, A_2, \cdots, A_6$ 与事件 $C$, $G$ 在结构上有本质的区别, 前者是不可再细分的, 而后者则可以分解, 比如 $C$ 可以分解为 $A_1, A_3, A_5$; $G$ 可分解为 $A_2, A_3, A_4$. 把不可再分解的事件称为**基本事件**, 而可分解的事件称为**复合事件**. 复合事件可由若干基本事件复合而成. 这样例 1.1.2 中的 $A_1, A_2, \cdots, A_6$ 均为基本事件, 而 $C$, $G$ 和 $\Omega$ 均为复合事件.

作为特例, 显然, 必然事件是由所有的基本事件复合而成的. 因为在每次试验中, 有且只有一个基本事件发生, 所以必然事件必然发生. 而不可能事件不包括任何基本事件, 所以在每次试验中一定不会发生.

### 二、样本空间

为了研究随机试验 $E$, 首先需要知道这个试验 $E$ 可能出现的结果, 这些结果称为**样本点**, 一般用 $\omega$ 表示; 样本点全体所成的集合称为**样本空间**, 记为 $\Omega$.

对于给定条件下的试验, 由于所有结果是明确的, 因而样本空间也是确定的.

例如, 例 1.1.1 中, $\Omega=\{\omega_1, \omega_2\}$, 其中$\omega_1$表示正面朝上, $\omega_2$表示反面朝上; 例 1.1.2 中, $\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, 其中$\omega_i$表示掷出点数为 $i$, $i=1,\cdots, 6$.

以上只包含有限个样本点的样本空间称为**有限样本空间**.

**例 1.1.3**　考察某地 110 报警台在单位时间内接到的报警次数, 则其所有的样本点为

$$\omega_i= \text{“单位时间内接到 } i \text{ 次报警”}, \quad i= 0, 1, 2,\cdots.$$

所以样本空间为$\Omega=\{\omega_0, \omega_1, \omega_2,\cdots\}$.

以上包含无限可列多个样本点的样本空间称为**可列样本空间**.

有限样本空间、可列样本空间统称为**离散样本空间**.

**例 1.1.4**　测量某电器元件的寿命 $T$, 则样本空间$\Omega= [0, +\infty)$.

以上包含无限不可列个样本点的样本空间称为**不可列样本空间**.

有了样本空间$\Omega$的概念, 就可把任意一个随机事件 $A$ 看作$\Omega$的一个子集, $A$ 发生当且仅当 $A$ 所包含的一个样本点在试验中出现. 这样, 基本事件可看作只包含一个样本点的单点集, 而复合事件为含有多个样本点的$\Omega$ 的子集. 特别地, 样本空间$\Omega$是事件, 且是必然事件; 空集$\varnothing$也是事件, 且是不可能事件. 在不致混淆时, 我们也称单个样本点为基本事件.

例如, 例 1.1.1 中, $A, B$ 是单点集; 例 1.1.2 中, $C=\{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$, $G=\{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}$; 例 1.1.4 中, $D=\{$某电器元件的寿命不小于 1000 小时$\}=[1000, +\infty)$.

引入样本空间后, 一个随机事件就与样本空间的某一子集相对应. 这样, 我们就可以依照集合的关系和运算来定义事件的关系和运算.

## 三、事件间的关系与运算

如果没有特别的声明, 在以下的叙述中总认为样本空间$\Omega$已经给定, 并且还给定了$\Omega$中的一些事件, 如 $A, B, A_i(i=1, 2,\cdots)$.

### 1. 包含与相等

若事件 $A$ 发生必然导致事件 $B$ 发生, 则称 $B$ **包含了** $A$ 或 $A$ **包含于** $B$ 中, 记为 $B\supset A$ 或 $A\subset B$.

如在例 1.1.2 中, 令 $A=\{$掷出点数为 4 点$\}$, $B=\{$掷出点数为偶数$\}$, 则 $A\subset B$.

可以给上述的含义以一个直观的几何解释. 设样本空间$\Omega$是一个正方形, $A$ 与 $B$ 是两个事件, 也就是$\Omega$的某两个子集, “$A$ 发生必然导致 $B$ 发生”意味着“属于 $A$ 的样本点$\omega$必然属于 $B$”, 即 $A$ 中的点全在 $B$ 中, 如图 1-1 所示. 由此可知, 事件 $A\subset B$ 的含义与集合论中的含义是一致的.

规定: 对于任意事件 $A$, 有$\varnothing\subset A$ .

如果 $A\subset B$ 与 $A\supset B$ 同时成立, 则称 $A$ 与 $B$ **相等**(或等价), 记为 $A=B$.

显然, 两个相等的事件含有相同的样本点.

### 2. 并(或和)

称{事件 $A, B$ 中至少有一个发生}这一事件为事件 $A, B$ 的**并(或和)**, 记作 $A\cup B$. 如图 1-2

中的阴影部分.

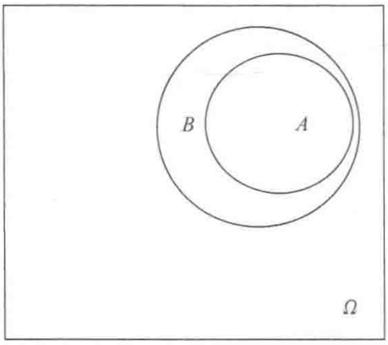


图 1-1

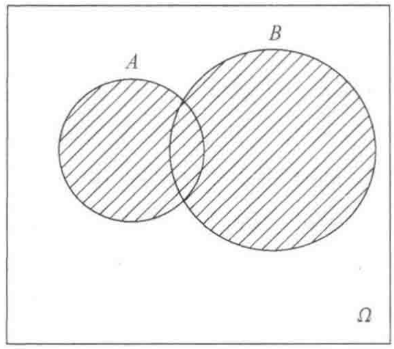


图 1-2

如在例 1.1.2 中, 令 $A$={掷出点数≤3}, $B$={掷出点数为偶数}, 则 $A\cup B$={掷出点数为 1, 2, 3, 4, 6}.

3. 交(或积)

称{事件 $A$, $B$ 同时发生}这一事件为事件 $A$, $B$ 的**交**(**或积**), 记作 $A\cap B$ 或 $AB$. 如图 1-3 中的阴影部分.

如在例 1.1.2 中, 若 $A$, $B$ 同上, 则 $A\cap B$={掷出点数为 2}.

**例 1.1.5** 掷两枚均匀的硬币, 若 $A$={恰有一个正面朝上}, $B$={恰有两个正面朝上}, $C$={至少有一个正面朝上}, 则有 $A\cup B=C$, $AC=A$, $BC=B$, $AB=\varnothing$.

另外, 显然对于任意事件 $A$, $B$, 有

$$A\subset A\cup B,\quad B\subset A\cup B,\quad AB\subset A,\quad AB\subset B.$$

4. 互斥(或互不相容)

如果两事件 $A$, $B$ 不可能同时发生, 即 $AB=\varnothing$, 则称 $A$, $B$ 是**互斥**的(或**互不相容**的). 如图 1-4 表示了这种情形.

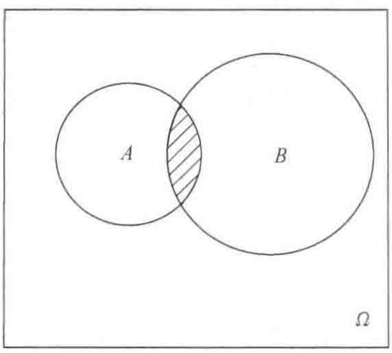


图 1-3

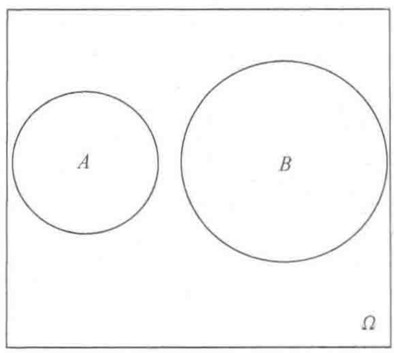


图 1-4

如在例 1.1.2 中, $A$={掷出点数为 3}, $B$={掷出点数为偶数}, 则显然 $AB=\varnothing$, 即 $A, B$ 是互斥的.

5. 差

称{事件 $A$ 发生而 $B$ 不发生}这一事件为事件 $A$ 与 $B$ 的**差**, 记作 $A-B$. 如图 1-5 中阴影部分.

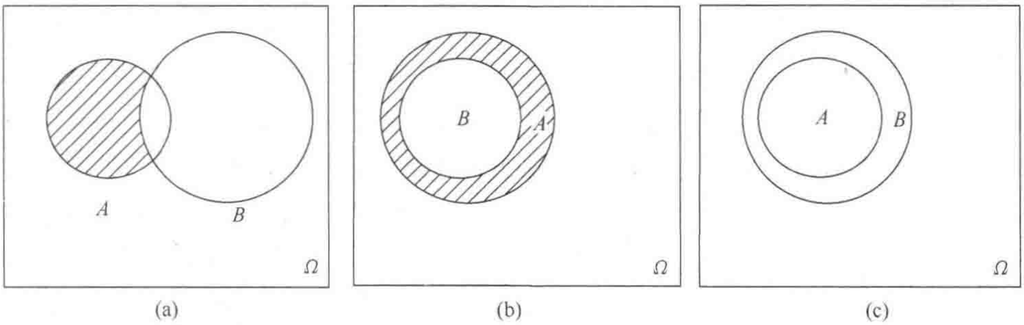


图 1-5

如在例 1.1.2 中, 若 $A$={掷出点数≤3}, $B$={掷出点数为偶数}, 则 $A-B$={掷出点数为 1, 3}.

6. 对立事件(或逆事件)

设 $A$ 为任一事件, 称 $\Omega-A$ 为 $A$ 的**对立事件**(或**逆事件**), 记作 $\overline{A}$, 即 $\overline{A}=\Omega-A$. 如图 1-6 中阴影部分.

显然, 在一次试验中, $A$ 与 $\overline{A}$ 必然有一个发生且仅有一个发生, 即 $A\cup\overline{A}=\Omega$ $A\cap\overline{A}=\varnothing$, 且 $\overline{\overline{A}}=A$, 即 $A$ 也是 $\overline{A}$ 的对立事件.

另外, 还有 $A-B=A-AB=A\overline{B}$.

如在例 1.1.2 中, 若 $A$={掷出点数为偶数}, 则 $\overline{A}$= {掷出点数为奇数}.

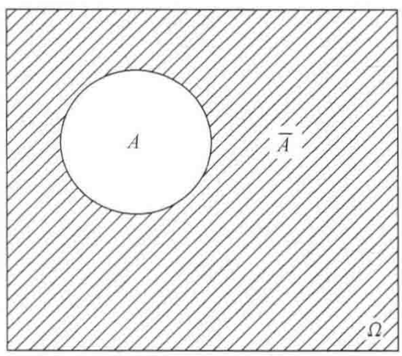


图 1-6

7. 事件的关系与运算的拓广

设 $A_1, A_2,\cdots, A_n$, …是一列随机事件, 则

(1) {$A_1, A_2,\cdots, A_n$ 中至少有一个发生}这一事件称为 $A_1, A_2,\cdots, A_n$ 的并, 记作 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$; {$A_1, A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中至少有一个发生}这一事件称为 $A_1, A_2,\cdots, A_n,\cdots$ 的**可列并**, 记作 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

(2) {$A_1, A_2,\cdots, A_n$ 同时发生}这一事件称为 $A_1, A_2,\cdots, A_n$ 的交, 记作 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 或 $A_1A_2\cdots A_n$; {$A_1, A_2,\cdots, A_n,\cdots$ 同时发生}这一事件称为 $A_1, A_2,\cdots, A_n,\cdots$ 的**可列交**, 记作 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 或 $A_1A_2\cdots$.

(3) 如果 $n$ 个事件 $A_1, A_2,\cdots, A_n$ 中任意两个事件都不可能同时发生，即

$$A_i A_j=\varnothing \quad (i\neq j,\ i,j=1,2,\cdots,n),$$

则称这 $n$ 个事件 $A_1, A_2,\cdots, A_n$ 是互斥的；

如果可列个事件 $A_1,A_2,\cdots, A_n,\cdots$ 中任意两个事件都不可能同时发生，即

$$A_i A_j=\varnothing \quad (i\neq j,\ i,j=1,2,\cdots,n,\cdots),$$

则称这可列个事件 $A_1, A_2,\cdots, A_n,\cdots$ 是互斥的.

**例 1.1.6**　若 $A, B, C$ 是三个随机事件，则

(1) $A$ 发生而 $B$ 与 $C$ 都不发生可表示为：$A\bar{B}\bar{C}$ 或 $A-B-C$ 或 $A-(B\cup C)$；

(2) $A$ 与 $B$ 都发生而 $C$ 不发生可表示为：$AB\bar{C}$ 或 $AB-C$ 或 $AB-ABC$；

(3) 这三个事件恰好发生一个可以表示为：$A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$；

(4) 这三个事件中至少有两个发生可表示为：$AB\cup AC\cup BC$ 或 $A\bar{B}C\cup\bar{A}BC\cup AB\bar{C}\cup ABC$.

从上可知，概率论中事件之间的关系与运算和集合论中集合之间的关系与运算是一致的，从而常常把事件的分析转化为对集合的分析，利用集合间的运算来分析事件间的运算.

事件的运算满足下述规律，它们的证明留给读者.

(1) **交换律**　$A\cup B=B\cup A,\ AB=BA;$　　(1.1.1)

(2) **结合律**　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),$　　(1.1.2)

$(AB)C=A(BC);$　　(1.1.3)

(3) **分配律**　$(A\cup B)\cap C=(AC)\cup(BC),$　　(1.1.4)

$(AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C);$　　(1.1.5)

(4) **德摩根(De Morgan)定理**

$$\overline{A\cup B}=\bar{A}\bar{B}, \tag{1.1.6}$$

$$\overline{AB}=\bar{A}\cup\bar{B}; \tag{1.1.7}$$

对于 $n$ 个事件，甚至对于可列个事件，德摩根定理也成立. 即

$$\overline{\bigcup_i A_i}=\bigcap_i\overline{A_i}, \tag{1.1.8}$$

$$\overline{\bigcap_i A_i}=\bigcup_i\overline{A_i}. \tag{1.1.9}$$

## 第二节　概率及其性质

对于随机试验下的随机事件，我们首先关心的是，它在一次试验中发生的可能性是否是客观存在的，是否可以度量？答案是肯定的. 这在后续内容的学习中将逐步得到证实. 那么，又如何来度量一个事件 $A$ 发生的可能性大小呢？

概率论中把度量事件 $A$ 发生可能性大小的数，叫做事件 $A$ 的**概率**，记作 $P(A)$.

下面，我们从不同的角度出发，来给出概率的若干定义及其计算方法和性质.

## 一、概率的统计定义

### 1. 频率

**定义 1.2.1** 对于随机事件 $A$，若在 $n$ 次试验中 $A$ 发生了 $\mu_n$ 次，则称

$$f_n(A)=\frac{\mu_n}{n}$$

为随机事件 $A$ 在 $n$ 次试验中发生的**频率**.

一般地，如果 $A$ 发生的可能性较大，那么相应的频率也较大. 反之，频率就较小. 在这一点上，它与概率极为相似. 因而频率在一定程度上也刻画了事件 $A$ 发生的可能性大小，这将成为建立统计定义的出发点.

### 2. 频率的基本性质

频率具有以下基本性质:

(1) 非负性: $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$;

(2) 正规性: $f_n(\Omega)=1$;

(3) $f_n(\varnothing)=0$;

(4) 若两事件 $A, B$ 互斥，即 $AB=\varnothing$，则 $f_n(A\cup B)=f_n(A)+f_n(B)$.

**证明** 性质(1)～(3)是显然的，下证(4).

分别以 $\mu_A$，$\mu_B$，$\mu_{A\cup B}$ 来记 $n$ 次试验中 $A$, $B$, $A\cup B$ 发生的次数. 因为 $AB=\varnothing$，所以 $\mu_{A\cup B}=\mu_A+\mu_B$. 从而由频率的定义得

$$f_n(A\cup B)=\frac{\mu_{A+B}}{n}=\frac{\mu_A+\mu_B}{n}$$

$$=\frac{\mu_A}{n}+\frac{\mu_B}{n}=f_n(A)+f_n(B).$$

证毕

性质(4)可推广到任意有限个互斥事件的场合. 即设事件 $A_1, A_2,\cdots, A_m$ 互斥，则

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_m).$$

这条性质也称为频率的有限可加性.

### 3. 频率的稳定性

经验表明，当试验重复多次时，随机事件 $A$ 的频率具有一定的稳定性. 也就是说，当试验次数充分大时，随机事件 $A$ 的频率在一个确定的数附近摆动.

通常，把随机试验次数 $n$ 增大，频率越来越稳定于一个确定的数值的规律说成是**频率具有稳定性**.

频率具有稳定性这个特征，揭示了随机事件发生的可能性大小是客观存在的，是随机事件本身固有的属性，同时也为我们提供了度量这种可能性大小的一种方法.