从素数到复数的几何意义

高红卫 著

科学出版社

从素数[illegible]意义

高红卫 著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书借助经典数学中数与形、有限与无限、归纳与演绎等分析方法，从研究乘幂及阶乘的几何意义入手，导出对 e 和 π 等超越数的几何意义理解，揭示 e 与 π 之间的内在几何关系，并以此为基础，研究超越数的分类方法及其生成规则. 在研究虚数及复数几何意义基础上揭示了欧拉公式的几何意义，给出了复数开方与乘方的代数公式等系列全新结果，并在研究空间扩张运算和旋转运算规则基础上导出任意维度球性空间中球性几何对象表面积与体积的代数公式. 最后从 n 维几何对象切割与重整角度，研究部分类型高次代数方程复代数解的性质与结构，给出两类高次方程的复代数通解公式.

本书力求通俗易懂，可供有关研究人员、学校师生、科技工作者、中等文化程度以上数学爱好者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

从素数到复数的几何意义/高红卫著. —北京: 科学出版社, 2017. 8

ISBN 978-7-03-054114-7

I. ①从… II. ①高… III. ①代数几何–研究 IV. ①O187

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 196332 号

责任编辑: 李 欣 / 责任校对: 邹慧卿
责任印制: 张 伟 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京教图印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017 年 8 月第 一 版 开本: 720 × 1000 B5
2017 年 8 月第一次印刷 印张: 22 3/4
字数: 443 000

定价: 139.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　言

迄今, 人类社会经历了两次具有文明史上里程碑意义的 “大发现”: “地理大发现” 与 “物理大发现”. 当前我们正在经历第三次具有里程碑意义的大发现: “数理大发现”.

就整体而言, 地理大发现始于 13 世纪, 兴于 14 世纪, 显著收敛于 17 世纪. 物理大发现始于 16 世纪, 兴于 17 世纪, 显著收敛于 20 世纪. 数理大发现始于 19 世纪, 兴于 20 世纪, 预计将显著收敛于 23 世纪. 请注意, 这里讲的 “显著收敛” 是指该领域新的重大发现相对于 “大发现” 前中期而言不再显著. 由此看出, 人类的每次大发现, 从开始到基本完成需要 500 年左右的时间, 虽然不是那么精确, 但宏观而言还是靠谱的.

500 年对于一个人的生命而言, 确实漫长, 但对于数以亿年计的宇宙生命而言, 这只不过是短短一瞬间. 将来的人类社会还会有什么划时代的大发现, 目前不仅难以预见, 而且连想象都很困难, 就像哥伦布时代的人们无法预判和想象 “物理大发现” 时代和 “数理大发现” 时代一样.

19 世纪的代数学显示出两种针锋相对的特征: 一种是越来越专注于一些表达式约束的严格界定, 使得数学变得越来越严谨、缜密; 另一种则使用符号化、形式化的方法使得数学越来越一般化、越来越抽象化. 事实上, 正是 19 世纪上半叶的乔治 · 皮考克和乔治 · 布尔开了数理逻辑学的先河. 乔治 · 皮考克把 “算术” 代数与 “符号” 代数分离开来. 算术代数的基础是数, 它的运算是算术运算. 然而, 符号代数是一门科学, 仅仅依靠确定的法则来看待标记与符号的结合, 完全独立于符号本身的具体值. 乔治 · 布尔则独立地发明了布尔代数, 把符号的组合法则应用于逻辑学, 使得仅仅具有 “0” 与 “1” 两种状态的机器可以按照严格的逻辑进行拟人化的推理与判断. 笔者定义 “数理大发现始于 19 世纪” 正式基于上述历史事实.

以智能化为核心的新科技革命和新产业革命, 正在将人类从繁重的体力劳动与脑力劳动中解放出来, 一切非创造性劳动都将被人工智能机器所替代. 以通信技术、计算技术、网络技术、大数据技术的发展为前奏的人工智能技术 (AIT, artificial intelligence technology) 将成为本轮科技革命和产业革命的核心, 相关学科领域的综合创新将同步推进, 其中新数理基础理论的突破对于 AIT 的发展至关重要.

如果说互联网的发展得益于数据库技术和搜索引擎技术的突破, 那么, 高维度大数据库技术、大数据智能管理引擎和大数据智能解析引擎、信息智能交换引擎技术、智能搜索引擎技术的突破, 对于 AIT 的发展将至关重要. 这五种新技术是人类

从“万维网”时代进入到“万能网”时代的一串“金钥匙”. 当然, 大数据的采集技术与大数据的安全技术必不可少.

大数据具有异构 (非结构化)、全维 (数据种类无限制)、动态 (数据刷新速度快), 以及聚合 (单一数据使用价值低, 聚合数据使用价值高) 等特点, 经典数据管理与分析方法已不够用, 需要一套能够自然容纳异构、多维、动态、聚合数据的概念模型与分析方法提供新的基础支撑. 同时, 由于大数据本身往往并不能直接使用, 需要一套规则将大数据预制成可供直接使用的“应用数据预制模块”(正如砂砾无法直接用来盖楼, 需要将砂砾预制成水泥预制件才可用来盖楼一样), 因此所谓“信息的智能化交换”实际上需要建立一套“应用数据预制模块”交换规则; 所谓智能搜索引擎技术实际上需要引入新的“智能化聚合数据搜索”算法 (区块链技术似乎正在向此方向逼近).

在“高维度大数据库技术、大数据智能管理引擎和大数据智能解析引擎、信息智能交换引擎技术、智能搜索引擎技术”这一串开启“万能网”大门的“金钥匙”中,“高维度大数据库技术”将是需要人类锻造的第一把“金钥匙”. 笔者认为,“数理大发现”的第二个里程碑将以突破二维表单关系型数据库理论的约束、形成适合于“高维度大数据库技术”所需要的相应逻辑法则与算法为起点.

如果让高维度空间的结构对应于高维度大数据库的结构, 让各层级空间中的几何对象及其连接关系对应于各层级大数据组合及数据之间的关系, 让相同层级和不同层级子空间之间的关系对应于相同层级大数据组合与不同层级数据组合之间的关系, 且让各层级几何对象特征量对应于不同类型数据组合所包含的一般潜在信息量 (popularly capacity of potential information), 那么大数据的智能化管理、智能化解析, 以及信息的智能化交换、智能化搜索技术所需要的算法和工具就有可能建立在新的数理逻辑基础之上.

我们知道, 关系型数据库所依赖的数理基础是二维表中蕴含的“种类坐标”关系及其逻辑. 在存储数据时, 首先 (在纵坐标上) 定义数据的“种”、(在横坐标上) 列举数据的各类特性 (定义数据的“类”), 形成 (二维表) 数据库中的一个“元组”, 按一定规则存放到介质上, 完成存储. 读取数据时, 可以使用对满足“种”“类”条件的“与”“或”“非”逻辑, 采取“排除法”或者“摘取法”, 根据包含、并列、除非等逻辑关系从二维表中准确地提取某一个或者某一组数据.

本书以其姊妹篇《空间结构与几何对象》为基础, 进一步研究了高维度空间的结构、各层级空间中的几何对象及其连接关系、相同层级和不同层级子空间之间的关系、各层级几何对象特征量, 以及与这些概念相关联的代数学、几何学、数论等方面的内容, 获得了一系列有趣的新概念. 这些新概念为运用多维空间结构概念分析引导建立多维数据库理论做了较为系统的基础知识铺垫 (当然, 真正建立“多维数据库理论”的工作是一项更为庞大、复杂的科学工程). 这两本书中的观点和概

念对于启发和引导更优秀的研究者开展深入研究、形成更完善的理论体系可以起到敲门砖的作用.

人类正在进入全面数字化、网络化、智能化的全球"信息文明"时代, 迫切需要重新梳理、重新认识支撑"信息文明"发展的数理基础. 大众对于这些数理基础的深入理解将有助于推动全球"信息文明"时代的全面发展. 这些数理基础的精髓可能存在于浅显的数学现象之中, 在数学已经构建起如此宏大、如此精巧体系的今天, 唯有反复回顾数学的发展历程、不断反刍最简单的数学概念才有可能获得一些新数理基础的原初发现.

为了节省读者的时间, 笔者尽可能不重复在《空间结构与几何对象》中已经研究过的内容. 另外, 考虑到可读性, 避免因为词晦涩拗口而使一些读者敬而远之, 笔者尽可能用通俗的表达与归纳推理方式获得结论, 优先使用初等数学和初级方法推演、归纳形成结果, 并且基本上没有证明环节. 虽然这样做显得不十分严谨, 但是有助于起到引导思考、启发研究思路的作用, 希望得到大多数读者的认可.

感谢科学出版社给予的大力支持与帮助, 感谢审稿、编排等专家付出的心血, 感谢我的家人和朋友给予我一贯的理解、支持和鼓励.

由于笔者学识有限, 书中难免存在不妥之处, 望广大读者不吝指正.

邮箱地址: gaohw191@sina.com

高红卫

2017 年 4 月末于北京

目　　录

第 1 章　几何对象形体特征量表达

1.1　几何对象的形体特征量及其表达

为方便研究, 首先定义几个概念.

定义 0　具有位置属性、表面属性和尺度属性的抽象事物, 称为几何对象.

在数学中, 几何对象的属性必可用相应的特征量描述. 其中, 位置属性以形位特征量描述, 表面属性以形数特征量描述, 尺度属性以形体特征量描述.

所谓几何对象形位特征量, 通俗而言是指以特定坐标系原点为参照, 以特定的测量标准为依据, 表达几何对象 (包括点、线、面、体等) 的方向与距离 (两者联合确定几何对象的空间位置) 等几何特征参数. 关于这方面的内容, 经典几何学已经形成了相当系统和完整的概念.

所谓几何对象形数特征量, 通俗而言是指以 0 级表面 (几何对象自身) 为参照, 以 n 维空间中 n 级表面的计数规则为依据, 表达几何对象各个表面层级上表面的数量这一几何特征参数. 关于这方面的初步研究内容, 请参见《空间结构与几何对象》.

所谓几何对象形体特征量, 通俗而言是指以 0 维空间中 (唯一种类) 几何对象 (通常被称为 “点”) 的空间容量大小 (定义恒为 1) 为基础尺度, 在确定的空间维度下, 表达各类几何对象 (诸如线、面、体等) 所占据空间大小 (诸如长度、面积、体积等) 的几何特征参数.

虽然在经典几何学中主要研究几何对象的形位特征量及其运算规则, 但是也广泛地涉及形数特征量、形体特征量及它们的初步运算规则.

上述三种几何概念皆为三元属性, 即某一特定几何属性必然对应三个概念: 维度、形状、特征量. 其中, 维度与形状的概念在三种属性描述中是通用的, 可以相互比较, 而空间位置概念、表面数量概念以及空间体量概念构成了三种几何学属性概念范畴的基本差异性.

本书重点研究描述几何对象形体特征量概念的表达及其运算问题, 所涉及的数学概念范畴与描述几何对象形位特征量概念的表达及其运算、形数特征量概念的表达及其运算一起构成几何学的完整概念系统.

通常, 长度、面积、体积、超体积等是人们对于不同维度几何对象形体特征量的形象化名词表述. 虽然对于低维度空间中的几何对象而言, 这些表述的几何意义

是清楚的，也是够用的，但是对于 5 维及以上维度空间中的几何对象，其形体特征量的形象化表述难以找到合适的名词 (也无必要). 因此在本书后序内容中，我们将"几何对象形体特征量" 简称为 "形体特征量" 或者 "特征量".

谈到几何对象的面积、体积乃至通用的形体特征量，必然要与几何对象边长 (以下称为表达基) 的乘积或者乘幂概念联系起来.

几何对象的形体特征量 (占用空间的容量) 涉及两种参数 —— 表达基以及表达维度，或者说，对于未知的形体特征量而言，它是表达基与表达维度的函数.

表达基与表达维度分别对应于乘幂的底数与指数. 如果乘幂的底数以及指数不限于整数甚至不限于实数，那么乘幂就可以成为表达任一族几何对象形体特征量的通用方式.

几何对象形体特征量一共存在三种表达方式：几何对象的表达基变化而表达维度不变 (称为变表达基几何对象)；几何对象的表达基不变而表达维度变化 (称为变表达维度几何对象)；几何对象的表达维度和表达基皆是变化的 (称为基维双变几何对象).

几何对象的重整：泛指对几何对象进行同维度切割与拼接操作的思维实验过程. 最简单的重整例子是将一个长方形适当切割后拼接为一个正方形.

本章以下的内容仅仅研究变表达维度或者变表达基情形下几何对象表达与重整所对应的特征量变化规则，为后续章节的深入研究提供最基本的概念铺垫.

考虑到 n 维几何对象的形体特征量总可以用任意数 x 的幂指形式 x^n 表达 (其中，x 和 n 不限于整数，甚至不限于实数)，因此我们用 $y = x^n$ 表示一般几何对象的形体特征量. 其中，x 为表达基，n 为表达维度.

由于 $x^0 = 1$，所以 0 维几何对象形体特征量恒为 1. 称 0 维空间中的几何对象为基础几何对象，人们通常称之为 "点".

与前面已经介绍的位置属性形位特征量以及表面属性形数特征量概念相对应，几何对象的尺度属性形体特征量以 0 维几何对象形体特征量 (恒为 1) 为基础，以确定的表达基以及确定表达维度对任意维度几何对象的尺度进行表达.

若 n 为整数，则 $y = x^n$ 称为以 x 为表达基的整维度几何对象形体特征量；若 n 为非整数，则 $y = x^n$ 称为以 x 为表达基的非整维度几何对象形体特征量. 若 x 为整数，则 $y = x^n$ 称为整表达基 n 维几何对象形体特征量；若 x 为非整数，则 $y = x^n$ 称为非整表达基 n 维几何对象形体特征量. 若 x 为整数且 n 为整数，则 $y = x^n$ 称为以 x 为表达基的 n 维整表达基几何对象形体特征量.

除非特别说明，本章所称 "数" 均指正实数.

定义 1　若 y 可由 x 以 n 次幂形式表达，则称 x 为 y 的表达基，n 为 y 基于 x 表达的维度，且称 y 为基于 x 表达的 n 维数 (简称 y 为 x 基 n 维数，记为 $y = x^n$).

根据定义 1 和幂运算规则，可以导出如下结果.

(1) 如果 $x = y$, 则有 n=1 使得 $y = x^n$ 成立.

(2) 如果 $x < y$, 则有 $n > 1$ 使得 $y = x^n$ 成立.

(3) 如果 $x > y$, 则有 $n < 1$ 使得 $y = x^n$ 成立.

当 n=1 时, 称 x 为 y 的本征表达基, 此时的 n 称为 y 的本征表达维度.

当 $n \neq 1$ 时, 称 x 为 y 的非本征表达基, 此时的 n 称为 y 的非本征表达维度.

虽然本征表达维度所表示的几何意义非常简单, 但是它是研究非本征表达维度的重要概念基础.

特别地, 当表达基 $x = 0$, $n \geqslant 0$ 时, $y = x^n = 0^n = 0$, 这意味着在任意维度空间中皆可以存在特征量为 0 的几何对象.

当表达基 $x = 1$, $n \geqslant 0$ 时, $y = x^n = 1^n$=1, 这意味着在任意维度空间中皆可以存在特征量为 1 的几何对象.

以上两种情形下称 y 为幂等 (idempotent) 数. 只有 0 以及 1 为幂等数, 当 x 取其他实数时, y 均为非幂等数. 因此从数所对应的几何对象形体特征量表达性质上看, 整数 0 以及 1 是不同于其他数的两个特殊数.

虽然 0 以及 1 同为幂等数, 但在许多性质上相互之间也存在着重要差别, 这些差别并非毫无意义, 它们决定着数所对应的几何对象形体特征量表达之相关概念基础.

(1) 当几何对象并非 2 个及以上几何对象同维度重整构成 (仅为单一原生几何对象) 时, $y = 0$ 只能由 $x = 0$ 表达 (对应 “0 的任意次幂为 0” 概念); 当几何对象由 2 个及以上几何对象同维度重整构而成 (非单一原生几何对象) 时, $y = 0$ 可以由 $x \neq 0$ 表达 (对应 “任意次多项式求和等于 0”, 即 “方程式” 的概念).

(2) 当 y=1 且表达基 x=1 时, 存在对应的无穷多个表达维度, 使得 $y = x^n = 1^n = 1$ 成立 (对应 “1 的任意次幂为 1” 概念).

(3) 存在对应 y=1 的无穷多个非 0 表达基 x, 使得 $y = x^0 = 1$ 成立, 此时所对应的表达维度为 0, 即当 y=1 且 $x \neq 0$ 时, $n \equiv 0$(对应 “任何非 0 数的 0 次幂为 1” 概念).

小结一下

如果一个非重整几何对象的表达基 x 为 0, 那么这个几何对象的形体特征量 y 必为 0, 在任意维度空间中皆如此. 如果一个重整几何对象的形体特征量 y 为 0, 其表达基 x 不一定为 0(这是由多项式构成代数方程式的前提条件).

不为 0 的任意表达基 x 在 $n = 0$ 维空间中皆是表达特征量为 1 的几何对象, 因此 0 维几何对象被称为几何点 (简称为点). 特别地, 如果一个几何对象表达基 x 为 1, 那么任意维度下这类几何对象的形体特征量 y 恒为 1.

如果一个几何对象形体特征量为非 0 非 1 的任意数 y, 那么这个几何对象的表达基 x 可以为 y(在 $n = 1$ 维空间度量), 也可以为非 0 非 1 的其他数 (在 $n \neq 0$ 以

及 $n \neq 1$ 维空间中度量). 非 0 非 1 的表达基集合 $X = \{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$ 配合不同表达维度形成的若干乘幂可以指向同一个数, 但此时各个乘幂表达式的几何意义各不相同. 比如 $2^4 = 16 = y_1$, $4^2 = 16 = y_2$, 前者代表一个边长为 2 的超立方体体积, 后者为一个边长为 4 的正方形面积, 两者虽然在数值上相同, 但是几何意义截然不同.

通常, 人们比较两个数时总是缺省地认为它们的表达维度相同. 实际上, 即使从数值上看两者相等, 但是它们的表达维度可能并不相同. 因此, 作为几何对象的形体特征量, 在不清楚它们的维度是否相同时, 一般不宜对它们进行直接比较, 除非已知两者对应的几何对象表达维度相同.

在后续讨论中, 表达基 x 为 0 以及 1 的情形称为特殊情形, 表达基 x 不为 0 以及 1 的情形称为一般情形. 讨论特殊情形时将会事先申明, 若无事先申明, 即可认为是讨论一般情形.

定义 2　对于任意两个特征量, 若表达基相同且表达维度相同, 则它们为全同特征量; 若表达基相同但表达维度不同, 则它们为同基特征量; 若表达基不同但表达维度相同, 则它们为同维特征量; 若表达基不同且表达维度也不同, 则它们为全异特征量.

为了统一表述标准, 基于表达式 $y = x^n$ 表示 y 为一个维度为 n 的几何对象特征量, 我们用 $z = |y| = |x^n|$ 表示 z 为几何对象特征量的去维度值 (简称为纯量), 纯量 $z = |y| = |x^n|$ 简记为 $z = |x^n|$. 换言之, z 是特征量 y 的纯量. 从这个意义上讲, 所谓纯量实际上是一种表达基和维度皆未标定的数 (非标定数). 考虑到前述 y 已经作为特征量符号, x 已经作为表达基符号, n 已经作为维度符号, z 已作为特征量 y 的纯量符号, 这意味着在本书中, 字母 z, n, y 和 x 均被赋予了特定的意义.

由定义 2 可推出以下性质:

(1) 两个全同特征量对应的纯量一定相同;

(2) 两个同维特征量各自对应的纯量不一定相同;

(3) 两个同基特征量各自对应的纯量不一定相同;

(4) 两个全异特征量各自对应的纯量不一定相异.

比如, $4^2=16$, $2^4=16$, $16^1=16$, 虽然它们的运算结果从数值上看相同, 但从几何意义上看, 它们是全异特征量. 第一种特征量的表达基为 4, 表达维度为 2; 第二种特征量的表达基为 2, 表达维度为 4; 而特征量 16^1 的表达基为 16, 维度为 1, 它们的确对应着表达基和表达维度各不相同的 3 种几何对象.

从几何意义上看, 两个全同特征量要求表达基和表达维度都相同, 这实际上要求两者同时对应同维空间中的同表达基几何对象. 如果两个几何对象在同一空间中的坐标值也相同, 则两个全同特征量对应同一个几何对象; 如果两个几何对象在同一空间中的坐标值不同, 则两个全同特征量对应同一空间中两个具有相同形体特征量的几何对象.

两个同维不同基特征量必然分别对应同维度空间中的两个不同几何对象 (哪怕从坐标上看其中嵌套于另一个之中).

两个同基不同维特征量必然分别对应不同维度空间中具有相同表达基的两个几何对象.

两个全异特征量虽然所对应的纯量不一定相异, 但由于它们的表达基和维度都不相同, 表明两者必然分别对应不同维度空间中具有不同表达基的几何对象.

一般地, 设两个任意特征量 $y_1 = x^n$ 及 $y_2 = w^m$, 若 $x = w$ 且 $n = m$, 则 $y_1 = y_2$, 此时称 y_1 与 y_2 全同, 记为 $w^m \equiv x^n$. 若 $x = w$ 但 $n \neq m$, 则 $y_1 \neq y_2$, 此时称 y_1 与 y_2 同基不同维. 若 $n = m$ 但 $x \neq w$, 则 $y_1 \neq y_2$, 此时称 y_1 与 y_2 同维不同基. 若 $n \neq m$ 且 $x \neq w$, 则此时称 y_1 与 y_2 全异.

定义 3 当 $y_1 = y_2$ 时, 若 $y_2 = w^m = y_1 = x^n$, 称表达基 w 可由表达基 x 跨 $n - m$ 维表达.

当 $n = m$ 时, 表达基 w 是表达基 x 的跨 0 维表达, 此时必有 $w = x$.

特别地, 当 $m = 1$ 且 $n > 1$ 时, 如果 $w = x^n$, 则表达基 w 是表达基 x 的跨 $n - 1$ 维表达.

显然, 当 $n = 1$ 且表达基 $x > 0$ 时, 几何对象特征量 x^1 皆与其对应的纯量 z 相同, 此时 $z = |x^1| = x$. 换言之, 当 $n = 1$ 且表达基 $x > 0$ 时, 几何对象的特征量就是纯量. 这是一种非常特殊的情形.

一般情况下, 当 $n \neq 1$ 且 $x \neq 1$ 时, $z = |x^n| \neq x$, 即当维度和表达基皆不为 1 时, n 维几何对象的形体特征量所对应的纯量与几何对象的表达基不同. 关于这一点很容易证明: 因为表达基 x 不等于 1, 如果 $n \neq 1$, 则根据对数公式 $n = \log_x z$ 知, $x \neq z$.

因此, 同一个实数 z 作为一个纯量可以对应不同维度几何对象的形体特征量, 如果它不是出现在形体特征量的纯量表达式 $z = |x^n|$ 中, 无法判定它对应的几何对象表达基与维度.

1.2 对数换底公式的几何意义

我们可以用几何对象形体特征量解释对数概念如下: 当 $n \geqslant 1$ 时, 表达基 x 对应对数概念中的底数, 表达维度 n 就是通常所说的对数, 而特征量 y 则是对数概念中的真数, 即

$$n = \log_x y \tag{1-1}$$

根据定义 3 可以认为, 真数 y 是底数 x 的跨 $n - 1$ 维表达. 据此, 我们可以直观地解释真数 y 和底数 x 的几何关系: y 是以 x 为表达基的几何对象经 $n - 1$ 次递

进扩张后所获几何对象之形体特征量, 而 n 则是以 x 为表达基的几何对象经 $n-1$ 次递进扩张后所获几何对象所在空间的维度.

"递进扩张" 概念的几何含义定义：设 $n \geqslant 0$, 在 $n+1$ 维空间中, 相对距离为 x, 形体特征量皆为 x^n 的两个 n 维几何对象相耦合, 形成一个形体特征量为 x^{n+1} 的 $n+1$ 维几何对象, 称此过程为 n 维几何对象的递进扩张.

最基本地, 当 $n=0$ 时, 一个特征量为 1 的 0 维几何对象与特征量同为 1 的另一个 0 维几何对象在 1 维空间相耦合 (两者间的耦合距离为 x), 必然在 1 维空间形成一个特征量为 x 的 1 维几何对象. 这意味着在 1 维空间中, 距离为 x 的任意两个几何对象相耦合, 必然形成一条长度为 x 的线段.

在欧氏空间中, 我们称 "点" 为基础几何对象, 直线段为基本几何对象.

这也意味着, 虽然两个 n 维几何对象在 $n+1$ 维空间中相耦合的结果只能在 $n+1$ 维空间中观察其全貌、测量其形体特征量, 但 n 维几何对象是 $n+1$ 维递进扩张几何对象的构造要素, 仅需定义 n 维几何对象 (作为扩张基础), 就可以推导出由递进扩张过程所形成的 $\geqslant n+1$ 维几何对象的几何特征量.

这个概念很重要, 可以推广至 $n>0$ 的任意维度空间. 后续内容将反复使用这个概念.

我们进一步讨论对数运算的几何意义.

在对数运算中存在一种称为 "换底运算" 的特殊运算规则. 对特征量 y(真数) 取对数的方法, 不仅可以用来将不同特征量 y(真数) 之间的乘除及乘方与开方运算简化为同一表达基 (底数) 前提下的维度 (对数) 之加减及乘除运算, 还可以借助于一个既不同于真数也不同于底数的公共表达基来研究特征量 y(真数) 与其表达基 (底数) 之间的表达关系 (通常称为换底运算). 这意味着借助于底数作为表达基, 可考察不同特征量所对应的几何对象维度之间的关系.

例如, 设 $y=x^n$ 表示 y 是一个 x 基 n 维几何对象特征量, 而 $\log_{\mathrm{e}} y=n_1$ 求出的是以 e 为表达基情形下形体特征量 y 所对应的几何对象维度 n_1. 因此, y 既可以是 n 维数, 也可以是 n_1 维数, 这取决于表达基是取 x 还是取 e.

如果我们得到两个对数表达式：$\log_x y_1=n_1$, $\log_x y_2=n_2$, 那么所求出的分别是以 x 为表达基情形下形体特征量 y_1 所对应的几何对象维度 n_1 以及形体特征量 y_2 所对应的几何对象维度 n_2.

对数运算中的所谓 "换底公式"$\log_{y_2} y_1=\dfrac{\log_x y_1}{\log_x y_2}$ 指出, 以 y_2 为表达基的几何对象特征量 y_1 之维度 n, 等于选择 x 作为表达基的几何对象特征量 y_1 之维度 n_1 除以同样选择 x 作为表达基的几何对象特征量 y_2 之维度 n_2. 这意味着如果一个特征量及其表达基可同时被另一个表达基表达时, 两者的表达维度之比存在, 且有

$n = \dfrac{n_1}{n_2}$. 显然, “维度之比” 为有理数, 但有理数不一定是整数, 这实际上引出了几何对象特征量的 “非整维度” 或 “分维度” 的概念.

1.3 形体特征量的非整维度表达

由于选定某个表达基表达任意特征量时其维度 n 并不一定是整数 (n 为整数仅仅对应一些特殊情形), 于是有必要仔细研究形体特征量的非整维度表达问题.

比如, 纯量 z=16 可以对应的特征量 y 是 2 基 4 维数, 也可以对应特征量 y 是 4 基 2 维数, 因为 $\log_2 16 = 4; \log_4 16 = 2$, 即 $16 = 2^4 = 4^2$.

而对于特征量 $y = 8$ 而言, 在以 $x = 2$ 为表达基时可以与整维度 3 联合表达之, 即 $y = 8 = x^n = 2^3$, 但是若以 $x = \mathrm{e}$ 为表达基, 则无法用一个整维度准确地表达之. 换言之, 在以 e 为表达基时, 特征量 8 所对应的几何对象维度必然大于 1; 又由于 8 不是 e 的整指数幂, 因此以 e 为表达基的特征量 8 所对应的几何对象具有大于 1 的非整维度. 同样地, 若以 $x = 10$ 为表达基, 因为 $10 > 8$, 所以特征量 8 所对应的几何对象此时维度必然小于 1; 又由于 8 不是 10 的整指数幂, 所以以 10 为表达基的特征量 8 所对应的几何对象具有小于 1 的非整维度.

为研究方便, 我们总是假定空间维度是整数, 而空间中几何对象的维度可以为整数或非整数. 即作为参照系, 空间维度必须保持为整数, 以便于对整维度几何对象、非整维度几何对象及它们的表达基、形体特征量加以准确描述和区别. 当某几何对象具有非整维度时, 并不意味着该几何对象所在空间为非整维度.

我们同时规定, 几何对象的维度总是小于或等于其所在空间的维度; 几何对象所在空间的维度简称为空间维度, 几何对象自身所具有的维度简称为几何维度.

进一步地延伸上述概念: 一个形体特征量 y 对应着具有特定几何维度和确定表达基的某种几何实体. 由于一个纯量可以对应若干个几何对象的形体特征量, 所以一个纯量可以对应具有不同维度和 (或) 不同表达基的若干种几何实体, 即纯量对应着表达基和表达维度均未标定的几何实体. 我们称形体特征量 y 为几何标定量, 称纯量 z 为几何非标定量.

作为一种逻辑上的拓展, 几何标定量除了包含维度和表达基皆已标定这种情形外, 还应该包含表达基未标定但维度已标定, 以及表达基已标定但维度未标定这两种情形.

以上四类量所对应的几何实体各自具有什么样的性质呢?

以几何的观点看, 表达基未标定但维度已标定的几何对象就是通常所谓的 “空间”; 表达基已经标定但维度未标定的几何对象可称为 “泛几何实体”, 表达基和维度均已标定的几何对象称为 “几何实体”, 表达基和维度均未标定的量所对应的几

何对象称为“泛空间”.

这样, 我们就有了四种概念定义: 泛空间、空间、泛几何实体和几何实体.

我们知道, 当 x, n 皆为变量时, $y = x^n$ 是一个幂指数函数; 当 n 为常量而 x 为变量时, $y = x^n$ 是一个幂函数; 当 x 为常量而 n 为变量时, $y = x^n$ 是一个指数函数; 当 x, n 皆确定时, $y = x^n$ 是一个幂指数. 其中, 泛空间的形体特征量可用表达基以及维度皆为变量的幂指数函数表达, 空间的形体特征量可用确定维度下以表达基为变量的幂函数表达, 泛几何实体的形体特征量可用确定表达基下以维度为变量的指数函数表达, 几何对象的形体特征量可用具有确定表达基以及确定维度的幂指数表达.

由上述概念可以推出: 泛空间包含各种可能的表达基与各种可能的维度相匹配所共同表达的几何对象之集合 (确定泛空间全部可能表达基与全部可能表达维度的过程就是求幂指数函数方程解的过程); 空间包含确定维度与全部可能表达基所共同表达的几何对象之集合 (确定空间全部可能表达基的过程就是求一元 n 次幂函数方程解的过程); 泛几何实体包含确定表达基与全部可能表达维度所共同表达的几何实体之集合 (确定泛几何实体全部可能表达维度的过程就是求指数方程解的过程); 几何实体则是一个由确定维度与确定表达基所共同表达的几何对象.

回到分维度概念研究话题.

特征量表达式 $y = 2^1$ 对应着一个 1 维空间中的一个 1 维几何实体, 而特征量表达式 $y = 2^{\frac{2}{5}} \times 2^{\frac{1}{5}} \times 2^{\frac{2}{5}}$ 则对应着 3 维空间中的一个几何实体.

虽然我们也可以用特征量表达式 $y = 2^1 \times 2^0 \times 2^0$ 对应 3 维空间中另一个几何实体, 但它仅仅是在 3 维空间中“观察”一个 1 维几何实体所得到的结果. 也可以这样理解: 当 1 维几何实体被视为 3 维空间中一个几何对象时, 仅仅在第一维度上存在一条长度为 2 的线段, 另外在直线上还蜷缩着两种具有逻辑几何维度的逻辑几何对象, 这两种“逻辑几何对象”寄生于 1 维几何对象之中, 因此它们的特征量具有非显性.

这种特征量具有非显性的逻辑几何对象并非子虚乌有, 它们是存在的, 并且是有意义的. 如果我们让一元 m 次代数方程 $a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_mx^0 = 0$ 中的变量 x 最高次项对应于 a_0 个相同的 m 维几何对象之特征量, $m \geqslant 1$, 则 m 次多项式中的每一项都可以写成在 m 维空间中观察到的几何实体特征量表达式的形式: 变量 x 的指数小于 m 的各次项皆与因子 x^0 相乘“补齐”, 即方程可以改写为 $a_0x^m + a_1x^{m-1} \times x^0 + \cdots + a_m(\underbrace{x^0 \times x^0 \times \cdots \times x^0}_{\text{共 } m \text{ 个}}) = 0$, 此时由于表达基是未知的变量, 而 m 总是确定的值, 所以方程左边各项求和的结果对应于一组 m 维空间特征量之和, 变量 x 对应着空间的“全部可能表达基”集合 (一个 m 维空间, 必然存在至少存在一个、至多存在 m 个不同的表达基, 使得最多 m 组不同形态的几何实