



国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书
丛书主编 王梓坤

CHAPLYGIN THEOREM

Chaplygin 定理

刘培杰数学工作室 编译



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书
丛书主编 王梓坤

CHAPLYGIN THEOREM

Chaplygin 定理

刘培杰数学工作室 编译



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书从一道全国大学生力学竞赛试题谈起,阐述了恰普雷金定理在力学中的应用及推广.

本书适合大学数学及物理学专业学有余力的同学及老师阅读和收藏.

图书在版编目(CIP)数据

Chaplygin 定理/刘培杰数学工作室编译. —哈尔滨:
哈尔滨工业大学出版社, 2017. 2

ISBN 978 - 7 - 5603 - 6491 - 9

I. ①C… II. ①刘… III. ①稳定性(数学)
IV. ①O175.13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 042338 号

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 张永芹 齐新宇

封面设计 孙茵艾

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451 - 86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 牡丹江邮电印务有限公司

开 本 787mm × 960mm 1/16 印张 11.75 字数 420 千字

版 次 2017 年 2 月第 1 版 2017 年 2 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978 - 7 - 5603 - 6491 - 9

定 价 88.00 元



(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

◎
代
序

读书的乐趣

你最喜爱什么——书籍。

你经常去哪里——书店。

你最大的乐趣是什么——读书。

这是友人提出的问题和我的回答。真的，我这一辈子算是和书籍，特别是好书结下了不解之缘。有人说，读书要费那么大的劲，又发不了财，读它做什么？我却至今不悔，不仅不悔，反而情趣越来越浓。想当年，我也曾爱打球，也曾爱下棋，对操琴也有兴趣，还登台伴奏过。但后来却都一一断交，“终身不复鼓琴”。那原因便是怕花费时间，玩物丧志，误了我的大事——求学。这当然过激了一些。剩下来唯有读书一事，自幼至今，无日少废，谓之书痴也可，谓之书橱也可，管它呢，人各有志，不可相强。我的一生大志，便是教书，而当教师，不多读书是不行的。

读好书是一种乐趣，一种情操；一种向全世界古往今来的伟人和名人求

教的方法，一种和他们展开讨论的方式；一封出席各种活动、体验各种生活、结识各种人物的邀请信；一张迈进科学宫殿和未知世界的入场券；一股改造自己、丰富自己的强大力量。书籍是全人类有史以来共同创造的财富，是永不枯竭的智慧的源泉。失意时读书，可以使人重整旗鼓；得意时读书，可以使人头脑清醒；疑难时读书，可以得到解答或启示；年轻人读书，可明奋进之道；老年人读书，能知健神之理。浩浩乎！洋洋乎！如临大海，或波涛汹涌，或清风微拂，取之不尽，用之不竭。吾于读书，无疑义矣，三日不读，则头脑麻木，心摇摇无主。

潜能需要激发

我和书籍结缘，开始于一次非常偶然的機會。大概是八九岁吧，家里穷得揭不开锅，我每天从早到晚都要去田园里帮工。一天，偶然从旧木柜阴湿的角落里，找到一本蜡光纸的小书，自然很破了，屋内光线暗淡，又是黄昏时分，只好拿到大门外去看。封面已经脱落，扉页上写的是《薛仁贵征东》。管它呢，且往下看。第一回的标题已忘记，只是那首开卷诗不知为什么至今仍记忆犹新：

日出遥遥一点红，飘飘四海影无踪。

三岁孩童千两价，保主跨海去征东。

第一句指山东，二、三两句分别点出薛仁贵（雪、人贵）。那时识字很少，半看半猜，居然引起了极大的兴趣，同时也教我认识了许多生字。这是我有生以来独立看的第一本书。尝到甜头以后，我便千方百计去找书，向小朋友借，到亲友家找，居然断断续续看了《薛丁山征西》《彭公案》《二度梅》等，樊梨花便成了我心

中的女英雄。我真入迷了。从此，放牛也罢，车水也罢，我总要带一本书，还练出了边走田间小路边读书的本领，读得津津有味，不知人间别有何事。

当我们安静下来回想往事时，往往会发现一些偶然的小事却影响了自己的一生。如果不是找到那本《薛仁贵征东》，我的好学心也许激发不起来。我这一生，也许会走另一条路。人的潜能，好比一座汽油库，星星之火，可以使它雷声隆隆、光照天地；但若少了这粒火星，它便会成为一潭死水，永归沉寂。

抄，总抄得起

好不容易上了中学，做完功课还有点时间，便常光顾图书馆。好书借了实在舍不得还，但买不到也买不起，便下决心动手抄书。抄，总抄得起。我抄过林语堂写的《高级英文法》，抄过英文的《英文典大全》，还抄过《孙子兵法》，这本书实在爱得狠了，竟一口气抄了两份。人们虽知抄书之苦，未知抄书之益，抄完毫末俱见，一览无余，胜读十遍。

始于精于一，返于精于博

关于康有为的教学法，他的弟子梁启超说：“康先生之教，专标专精、涉猎二条，无专精则不能成，无涉猎则不能通也。”可见康有为强烈要求学生把专精和广博（即“涉猎”）相结合。

在先后次序上，我认为要从精于一开始。首先应集中精力学好专业，并在专业的科研中做出成绩，然后逐步扩大领域，力求多方面的精。年轻时，我曾精读杜布（J. L. Doob）的《随机过程论》，哈尔莫斯（P. R. Halmos）的《测度论》等世界数学名著，使我终身受益。简言之，即“始于精于一，返于精于博”。正如中国革命一

样,必须先有一块根据地,站稳后再开创几块,最后连成一片。

丰富我文采,澡雪我精神

辛苦了一周,人相当疲劳了,每到星期六,我便到旧书店走走,这已成为生活中的一部分,多年如此。一次,偶然看到一套《纲鉴易知录》,编者之一便是选编《古文观止》的吴楚材。这部书提纲挈领地讲中国历史,上自盘古氏,直到明末,记事简明,文字古雅,又富于故事性,便把这部书从头到尾读了一遍。从此启发了我读史书的兴趣。

我爱读中国的古典小说,例如《三国演义》和《东周列国志》。我常对人说,这两部书简直是世界上政治阴谋诡计大全。即以近年来极时髦的人质问题(伊朗人质、劫机人质等),这些书中早就有了,秦始皇的父亲便是受害者,堪称“人质之父”。

《庄子》超尘绝俗,不屑于名利。其中“秋水”“解牛”诸篇,诚绝唱也。《论语》束身严谨,勇于面世,“己所不欲,勿施于人”,有长者之风。司马迁的《报任少卿书》,读之我心两伤,既伤少卿,又伤司马;我不知道少卿是否收到这封信,希望有人做点研究。我也爱读鲁迅的杂文,果戈理、梅里美的小说。我非常敬重文天祥、秋瑾的人品,常记他们的诗句:“人生自古谁无死,留取丹心照汗青”“休言女子非英物,夜夜龙泉壁上鸣”。唐诗、宋词、《西厢记》《牡丹亭》,丰富我文采,澡雪我精神,其中精粹,实是人间神品。

读了邓拓的《燕山夜话》,既叹服其广博,也使我动了写《科学发现纵横谈》的心。不料这本小册子竟给我招来了上千封鼓励信。以后人们便写出了许许多多

的“纵横谈”。

从学生时代起,我就喜读方法论方面的论著。我想,做什么事情都要讲究方法,追求效率、效果和效益,方法好能事半功倍。我很留心一些著名科学家、文学家写的心得体会和经验。我曾惊讶为什么巴尔扎克在51年短短的一生中能写出上百本书,并从他的传记中去寻找答案。文史哲和科学的海洋无边无际,先哲们的明智之光沐浴着人们的心灵,我衷心感谢他们的恩惠。

读书的另一面

以上我谈了读书的好处,现在要回过头来说说事情的另一面。

读书要选择。世上有各种各样的书:有的不值一看,有的只值看20分钟,有的可看5年,有的可保存一辈子,有的将永远不朽。即使是不朽的超级名著,由于我们的精力与时间有限,也必须加以选择。决不要看坏书,对一般书,要学会速读。

读书要多思考。应该想想,作者说得对吗?完全吗?适合今天的情况吗?从书本中迅速获得效果的好办法是有的放矢地读书,带着问题去读,或偏重某一方面去读。这时我们的思维处于主动寻找的地位,就像猎人追找猎物一样主动,很快就能找到答案,或者发现书中的问题。

有的书浏览即止,有的要读出声来,有的要心头记住,有的要笔头记录。对重要的专业书或名著,要勤做笔记,“不动笔墨不读书”。动脑加动手,手脑并用,既可加深理解,又可避忘备查,特别是自己的灵感,更要及时抓住。清代章学诚在《文史通义》中说:“札记之功必不可少,如不札记,则无穷妙绪如雨珠落大海矣。”

许多大事业、大作品，都是长期积累和短期突击相结合的产物。涓涓不息，将成江河；无此涓涓，何来江河？

爱好读书是许多伟人的共同特性，不仅学者专家如此，一些大政治家、大军事家也如此。曹操、康熙、拿破仑、毛泽东都是手不释卷，嗜书如命的人。他们的巨大成就与毕生刻苦自学密切相关。

王梓坤

◎
目
录

引言 从一道全国大学生力学竞赛试题
谈起 //1

第1章 恰普雷金论非完整约束系统 //14

§1 论重旋转体在水平面上的运
动 //14

§2 非全定系统的运动理论的研究.
关于简化乘数的定理 //31

§3 论面积定理的某种可能的推广,
及其在球的滚动问题中的应
用 //42

§4 论球体在水平面上的滚动 //73

附录 关于 C. A. 恰普雷金的非全定
系统的动力学的工作 //100

编者的注解 //107

第2章 约束力学系统的欧拉-拉格朗日体
系的方程及其研究进展 //111

§1 完整力学系统的拉格朗日方
程 //112

§ 2	非完整系统带乘子的拉格朗日方程	//113
§ 3	麦克米伦方程	//114
§ 4	沃尔泰拉方程	//115
§ 5	恰普雷金方程	//118
§ 6	玻尔兹曼 - 哈梅尔方程	//120
第 3 章	董光昌论恰普雷金方程	//122
§ 1	恰普雷金方程的唯一性定理(I)	//122
§ 2	恰普雷金方程的唯一性定理(II)	//131
§ 3	恰普雷金方程的唯一性定理(III)	//150

从一道全国大学生力学竞赛试题谈起

引

言

北京大学力学系教授武际可曾撰文指出:在中国明末,由西方传教士邓玉函(瑞士人)口授、王徵笔录,于1627年出版的《远西奇器图说》中讲到数学和力学的关系时说:“造物主之生物,有数、有度、有重,物物皆然。数即算学,度乃测量学,重则此力艺之重学(注:中国早期将力学翻译为重学)。重有重之性,以此重较彼重之多寡,则资算学;以此重之形体较彼重之形体之大小,则资测量学。故数学、度学、重学之必须,盖三学皆从性理而生,为兄弟内亲,不可相离者也。”这里数学是计算的意思,和现今数学的含义不同;度学是指测量学,更广泛一点,指的是几何学。

我国著名力学家谈镐生先生在1977年上书中国科学院说:“按照近代观点,

物理、化学、天体物理、地球物理、生物物理可以全部归纳为物理科学。力学是物理科学的基础,数学又是所有学科的共同工具,力学和数学原是科学发展史上的孪生子,因此,可以形象地认为,物理科学是一根梁,力学和数学是它的两根支柱。”他曾更为简练地说:“数、理、化、天、地、生中的五大科学可以统一归纳为‘物理科学’。力学当然就是物理科学的共同基础,而数学则是物理科学和所有科学的共同工具。”

基于对力学在各部门科学中的重要性的认识,推动我国科学技术实现现代化与推动青少年在学习打好力学基础和数学基础具有同等重要的意义。因此,力学学会决定从1988年开始在大学生中举办力学竞赛是十分重要的举措。它对于推动作为基础课的力学学科的教学,增加学生对力学学科学习的兴趣,活跃教学与学习环境,发现人才,吸引全社会对力学学科的关注与投入,都是非常重要的。

事实证明,全国周培源大学生力学竞赛举办以来,愈来愈受到各界的重视,一届比一届规模大,一届比一届受到更多的支持。1988年举办的首届竞赛(原名青年力学竞赛),原定每四年举办一次(1988年第一届竞赛的参赛者只有62人,而2007年第六届的参赛者有近万人),后来受到周培源基金会的支持,改名为周培源大学生力学竞赛,还受到教育部高教司的支持,并且从原来的每四年举办一次改为每两年举办一次。

与数学竞赛试题的难度越来越大不同,力学竞赛的试题难度却在逐年降低,原因是它要吸引更多的大学生参加,而数学竞赛没有这种担忧。所以首届试题最难,下面是首届竞赛的第9题。

【题目】半径为 a , 质量为 m 的均匀圆球在半径为 b 的完全粗糙的另一固定圆球的外表面上滚动, 试建立动球的运动微分方程. 当动球转速超过多少时, 动球可以在定球的最高点处稳定地转动.

【解】本题中动球受非完整约束, 故不能应用第二类拉格朗日方程; 又因要求动球在最高点处转动的稳定条件, 所以也不能用球坐标描述球心的位置. 如图 1 所示, 用卡尔丹角 α, β 描述动球质心 C 的位置; 建立动坐标系 $O - xyz$, 它相对定坐标系的方位由 α, β 确定, 其角速度为 Ω . 坐标系 $[C, e_1, e_2, e_3]$ 过动球质心 C , 且与坐标系 $O - xyz$ 相平行. 动球质心 C 的速度为 v_C , 动球绝对角速度为 ω , 动球所受力为 mg, F_N, F_1, F_2 .

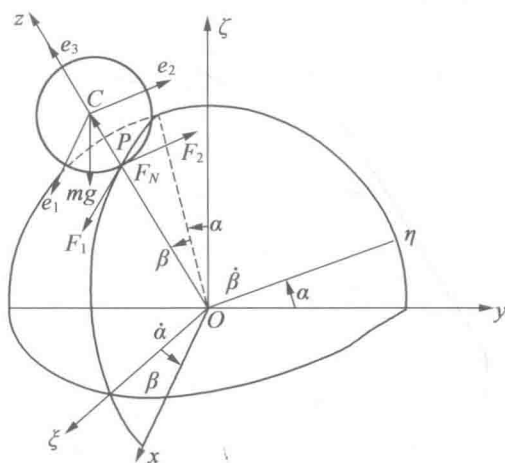


图 1

由质心运动定理向动坐标系 $O - xyz$ 各轴的投影式得

恰普雷金定理

$$m(\dot{v}_{C_1} - \Omega_3 v_{C_2} + \Omega_2 v_{C_3}) = F_1 + mg \cos \alpha \sin \beta \quad (1)$$

$$m(\dot{v}_{C_2} - \Omega_1 v_{C_3} + \Omega_3 v_{C_1}) = F_2 - mg \sin \alpha \quad (2)$$

$$m(\dot{v}_{C_3} - \Omega_2 v_{C_1} + \Omega_1 v_{C_2}) = F_N + mg \cos \alpha \cos \beta \quad (3)$$

由相对质心的动量矩定理在动坐标系 $[C, e_1, e_2, e_3]$ 各轴的投影式得

$$\begin{cases} \frac{2}{5}ma^2(\dot{\omega}_1 - \Omega_3\omega_2 + \Omega_2\omega_3) = F_2a \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} \frac{2}{5}ma^2(\dot{\omega}_2 - \Omega_1\omega_3 + \Omega_3\omega_1) = -F_1a \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} \frac{2}{5}ma^2(\dot{\omega}_3 - \Omega_1\omega_2 + \Omega_2\omega_1) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

运动学关系为

$$v_C = \Omega \times (a + b)e_3$$

$$\Omega_1 = \dot{\alpha} \cos \beta, \Omega_2 = \dot{\beta}, \Omega_3 = \dot{\alpha} \sin \beta \quad (7)$$

所以

$$v_{C_1} = (a + b)\dot{\beta}, v_{C_2} = -(a + b)\dot{\alpha} \cos \beta, v_{C_3} = 0 \quad (8)$$

约束条件为

$$v_p = v_C + \omega \times (-ae_3) = 0$$

$$v_{C_1} - a\omega_2 = 0, v_{C_2} + a\omega_1 = 0$$

所以

$$\omega_1 = -\frac{v_{C_2}}{a} = \frac{(a + b)\dot{\alpha} \cos \beta}{a}, \omega_2 = \frac{v_{C_1}}{a} = \frac{(a + b)\dot{\beta}}{a} \quad (9)$$

将式(7), 式(9)代入式(6)得到关于自转角速度 ω 的特性

$$\dot{\omega}_3 = 0 \text{ 或 } \omega_3 = \text{const} \quad (10)$$

将式(7), 式(9)代入式(1), 式(2), 式(4), 式(5), 得

$$m(a + b)(\ddot{\beta} + \dot{\alpha}^2 \cos \beta \sin \beta) = F_1 + mg \cos \alpha \sin \beta \quad (11)$$

$$m(a+b)(-\ddot{\alpha}\cos\beta+2\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\beta)=F_2-mg\sin\alpha \quad (12)$$

$$\frac{2}{5}m(a+b)(\ddot{\alpha}\cos\beta-2\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\beta)+\frac{2}{5}ma\omega_3\dot{\beta}=F_2 \quad (13)$$

$$\frac{2}{5}m(a+b)(\ddot{\beta}+\dot{\alpha}^2\sin\beta\cos\beta)-\frac{2}{5}ma\omega_3\dot{\alpha}\cos\beta=F_1 \quad (14)$$

从上面四式中消去 F_1, F_2 , 即得动球的运动微分方程为

$$7(a+b)(\ddot{\alpha}\cos\beta-2\dot{\alpha}\dot{\beta}\sin\beta)+2a\omega_3\dot{\beta}-5g\sin\alpha=0 \quad (15)$$

$$7(a+b)(\ddot{\beta}+\dot{\alpha}^2\sin\beta\cos\beta)-2a\omega_3\dot{\alpha}\cos\beta-5g\cos\alpha\sin\beta=0 \quad (16)$$

此方程有特解 $\alpha^*=0, \beta^*=0$, 代表动球在固定球的最高点处做角速度为 ω_3 的自转. 为研究此运动的稳定性, 将 α, β 看成小量, 并在式(15), 式(16)中略去二阶以上的小量, 得到线性化的受扰运动方程

$$7(a+b)\ddot{\alpha}+2a\omega_3\dot{\beta}-5g\alpha=0 \quad (17)$$

$$7(a+b)\ddot{\beta}+2a\omega_3\dot{\alpha}-5g\beta=0 \quad (18)$$

其特征方程为

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} 7(a+b)\lambda^2-5g & 2a\omega_3 \\ -2a\omega_3 & 7(a+b)\lambda^2-5g \end{vmatrix}=0$$

或

$$49(a+b)^2\lambda^4+[4a^2\omega_3^2+70(a+b)g\lambda^2]+25g^2=0 \quad (19)$$

上式 4 个特征根都没有正实部的条件是

$$[4a^2\omega_3^2-70(a+b)g]^2-4\times 25\times 49(a+b)^2g^2\geq 0 \quad (20)$$

或

$$\omega_3^2 \geq \frac{35g(a+b)}{a^2} \quad (21)$$

这就是动球在最高点自转运动的稳定条件(严格地讲,这样求得的只是稳定的必要条件).

清华大学的高云峰教授和北京航空航天大学的蒋持平教授点评如下:第9题涉及刚体的一般运动,但是动球受非完整约束,故不能应用拉氏二类方程;又动球在最高点附近运动,所以也不能用球坐标描述球心的位置(在最高点时,球坐标的经度角没有定义),这是本题的难点之一.另外多自由度系统的稳定性条件也是难点.列出动力学方程并不难,因此本题的陷阱包括:学生可能不注意前提条件,上来就列方程,因此根本没注意方程是否能成立;或是做了一半发现出现奇点要重做.即使排除这些难点,本题的计算量也很大.从目前的教学要求看,刚体的一般运动超出了基本要求.

从数学的角度看,此题是苏联数学家恰普雷金所奠基的非完整约束系统理论的一个特例.

恰普雷金(1869—1942, Чаплыгин Сергей Алексеевич), 苏联人. 1869年4月5日出生. 1890年毕业于莫斯科大学. 1902年获莫斯科大学博士学位,同时成为该校教授. 1929年成为苏联科学院院士. 1942年10月8日逝世. 恰普雷金在数学上的贡献主要在微分方程理论、复变函数论方面;他创立了微分方程近似解法的恰普雷金方法. 恰普雷金还在理论力学和流体力学方面做出了更重要的贡献.

作为力学家的恰普雷金远比作为数学家的恰普雷金著名. 在中国大百科全书的力学卷中专门有由我国

