科普
名家
经典

22
Denkwerkzeuge
für ein besseres Leben

像数学家一样思考

[德] 克里斯蒂安·黑塞 / 著
何秉桦 黄建纶 / 译

让生活和工作更美好的22个数学思维方式

Das kleine Einmaleins des klaren Denkens

22个简单且极为有效的思考工具
教会你用数学的思想和方法，培养良好的思维品质
去面对这个纷繁复杂的世界

海南出版社

22
Denkwerkzeuge
für ein besseres Leben

像数学家一样思考

[德] 克里斯蒂安 · 黑塞 / 著
何秉桦 黄建纶 / 译

海南出版社
HAINAN PUBLISHING HOUSE

版权合同登记号： 图字： 30-2017-103 号

图书在版编目（CIP）数据

像数学家一样思考 /（德）克里斯蒂安·黑塞 (Christian Hesse) 著；何秉桦，黄建纶译．-- 海口：海南出版社，2018.5

ISBN 978-7-5443-7973-1

Ⅰ．①像… Ⅱ．①克… ②何… ③黄… Ⅲ．①数学－普及读物 Ⅳ．① 01-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 054491 号

像数学家一样思考

作　　者：（德）克里斯蒂安·黑塞
译　　者：何秉桦　黄建纶
监　　制：冉子健
责任编辑：孙　芳
策划编辑：李继勇
责任印制：杨　程
印刷装订：北京盛彩捷印刷有限公司
读者服务：蔡爱霞　郯亚楠
出版发行：海南出版社
总社地址：海口市金盘开发区建设三横路 2 号　邮编：570216
北京地址：北京市朝阳区黄厂路 3 号院 7 号楼 101 室
电　　话：0898-66830929　010-64828814-602
邮　　箱：hnbook@263.net
经　　销：全国新华书店经销
出版日期：2018 年 5 月第 1 版　2018 年 5 月第 1 次印刷
开　　本：787mm × 1092mm　1/16
印　　张：18
字　　数：230 千
书　　号：ISBN 978-7-5443-7973-1
定　　价：42.00 元

序
SEQUENCE

思考是一种精神活动。在思考过程中，我们获取信息加以消化、理解且进一步掌握、找出问题并寻求解答。特别是要从既有的信息中，找出有助于解题的有用见解。

从问题中寻找解答的过程，极为特别又颇具创造性。想得出最后的答案，必须通过循序渐进的理解。思索必须如同知识载体一样，先有概念，接着产生作用，再进一步达到成功的结果。思考运作不能强求而得，但总可借由捷思法，也就是一般人所称的创意的方式，产生更多的概念，提供更多的成功机会。一般公认捷思法为相当有效的思考工具。换句话说，当我们遭遇不知如何解决的问题时，捷思法是最好的导引工具。

每一个人都能思考。就像跑步、游泳与跳高，有些人擅长，有些人表现平平，有些人则很差。但是思考就像前述的技能，可借由练习让技巧纯熟，并运用辅助加强。如同游泳选手穿上蛙鞋后能够加速，思考者也可使用思考工具，充分提升解题能力。

这就是本书的目标。这本书将介绍 22 个容易理解但极为有效的思考工具。读者们只需具备基础数学知识，即可轻松读懂。这些经过证明的思考技巧形式，可让你思路更加活络，帮助你解决定量问题。

思考能造就快乐的感受，每一个灵光乍现都像一次完美的演出，每一个成功的理解都是从大脑皮质绽放出的烟火。

数学是展现思考的最纯粹形式的科学。数学是一种“思想体系”，是从概念中衍生而出的理论。日常生活中到处都找得到数学的踪迹，数学不仅无所不在、随处可用，更是引人入胜，甚至极富美感。近代所有的科技成就都用到了数学，它帮助我们更理解这个宇宙，也是我们能继续存活在宇宙中的不可或缺的要素。此外，数学还拥有许多令人屏息的美丽元素。

本书的目的，是为读者提供至少双重的激励：参与一个使你变得更加聪明的冒险旅程，以及享受解题过程所产生的美感。这本书凭借着引人入胜且分段体验的方式，为读者提供了数学上的阅读、思考以及进一步的深思熟虑。这本书可视为数学与生活最令人惊喜的融合。何不试着挑战一下我们的数学能力，并补足我们的缺陷？

不可避免地，这本书有着作者本人的主观因素。虽说数学是实事求是的，但它不仅是心智活动，同时也是热情所在；不仅是已知事实的总和，同时也是卓越思考的殿堂。我们可以将数学理解为一种叙述性的科学。人们可以轻易地察觉且确认，数学是门特别且内容丰富的学问。尤其是在引人注意的问题陈述、巧妙的策略运用、迷人的数学证明和极为有效的结果论证上更能体认到。这本书也纳入了很多格言、启示、轶事、历史背景，就像同类型的数学书，我们以轻松有趣的原则使内容更加丰富多彩，生动活泼。所以这本书的风格是轻松的，有趣又愉悦的。

* * *

这本书分成两个不同的部分。第一部分是导言，广泛介绍什么是问题、思考以及数学思维。数学家遇到问题时，他们不会马上陷入恐慌，而是大胆果决地着手处理它。对数学家来说，问题的存在是智识生活的一部分。面对问题时，他们也会遇到挫折，但他们却会不断地重新站起来，带着更多的伤口继续处理、面对。这是因为，他们已经

受过非常密集的基础训练，加强了挫折承受力以及解题能力。

在第二部分将提出 22 个思考小工具，其中包括了模拟原则、归谬法、穷举法等等。在内容上与问题的难度上，我们做了粗略的区分，针对解题思考法分为基础、进阶、高阶三种类型。

此外，除了有丰富生动的数学思维小故事外，书里还举出了许多例子，让读者们进一步了解思考小工具的实际运用。

写这本书花了很长一段时间，甚至可以说是汇集了超过四分之一世纪的数学研究成果。首次的浓缩内容是在斯图加特大学 2006 年的夏季学期中，针对非数学系学生所开设的课程（课程名称为“与数学的相遇”）的教材。

在此，我要感谢为这本书的出版做出贡献、协助我让这本书更容易理解的所有人。所有的感谢已溢于言表，以下我将提及他们的名字。

伊娜·罗森伯格（Ina Rosenberg）和菲利普·施密特（Philipp Schnizler）参与了手稿的编排与数据的处理。弗拉德·萨苏（Vlad Sasu）完成了绝大多数的插图。

感谢鲍尔曼博士（Dr. Bollmann）对我的手稿进行了非常详细的校正，贝克出版社（C. H. Beck Verlag）对这本书的采纳以及出版过程中愉快的合作经验。

一如惯例，在此我也要诚挚地感谢我的家人：安德烈·罗内尔（Andrea Römmele）、汉纳·黑塞（Hanna Hesse）和雷纳德·黑塞（Lennard Hesse）。如果不是因为他们，就不会有这本书的完成，在此将这本书献给我的家人。

克里斯蒂安·黑塞（Christian Hesse）
于德国曼海姆

目录 CONTENTS

I

写在前面

导言

值得注意的事物、数学证明、小细节

我要再思考一下

——爱因斯坦，美国

问题的存在是人类基本生活状态的一环，如果我们试着下定义的话，问题的产生就代表实际状态与期望状态之间的差距。思考的目的，就是要以具体事实、抽象观念、直观想法及概念上的建构为工具，来消弭这种差距。从这个基本特征，我们也将更了解思考的本质。思考是人类重要的核心能力，而普通教育的基本要求就是要学会思考。

会思考的不只有人类，但在同样经过演化而会思考的所有生物当中，人类的思考机制却是最训练有素的。人们借由思考，使得思考本身产生意义。

思考是人类在危难情境下做决策的关键技术。定量分析思考或数学思维可追溯到早期人类，数学可说是最古老的科学之一。数学的起源已埋藏在历史的黑暗迷雾里，但数学的用途却是再清楚不过了：古时候的人就在想办法丈量土地、创建历法、进行贸易，并且试图更了解这个充满各种现象的大千世界。从此，数学思维就发展成一种威力强大的知识工具，让世人能够涉足未曾经历的领域，譬如基本粒子世界或是宇宙深处。此外，数学思维不但遍及几乎所有的学门，从英国文学、气象学、心理学到动物学，还影响了我们的日常生活。数学思维是重要科学技术的关键能力，因此通常在幕后发挥重要的作用，默默影响了许多近代工程学上的成就，像是计算机断层造影、电子货

币、电视、移动电话等。就连汽车能跑、飞机能飞、桥梁能承载、暖气能发热，都少不了数学。

在大自然的许多现象里，也看得到数学：借着近距离的观察，我们可以从蜂巢的构造和许多植物叶子的脉络中，发现许多迷人的数学，而在空间与时间的大尺度结构中，也呈现出极为精妙的数学规律。

量化分析思考对现代人有许多方面的协助。不管走到哪儿，我们都会遇上数字、函数、统计数据及其他数学结构。我们可以根据数字做出决策，利用函数呈现出趋势，借由统计来巩固论证。有了数字、函数及一般的数学结构，我们能将世界安排得条理分明，但也能使它变成混淆视听、操纵和欺骗的工具。借由量化思考，我们可以解开这神秘的世界，但如果运用不当，也可能会误入歧途或使他人偏离正道。

哎呀！弗洛伊德

就连精神分析学派创始人弗洛伊德这么聪明的人，也被愚蠢的数字谜题打败了。给他这道谜题的，是柏林的一位耳鼻喉科医生威廉·佛里斯。1897 年弗洛伊德在写给佛里斯医生的信中说："你向我展示了 28 和 23 循环周期的世界奥秘。"佛里斯从他的病人的病历中，仔细分析意外事故、术后并发症与自杀未遂之后，发现疾病的发展过程会有一致的规律。佛里斯推论，每个人的生命都受到特定的周期所制约，这个数字分别为 28（女性周期）和 23（男性周期）。简单说，佛里斯算出，所有的测量值都可写成 $23x+28y$ 的形式（x 与 y 为正整数或负整数）。他还把这个公式应用到各种自然现象上，甚至花了很多年的时间，收集大量的重要数字并制成表格。真是工程浩大。这项发现让佛里斯着迷不已，后来也吸引了弗洛伊德的注意，竟有这么多数字可以写成 $23x+28y$ 的形式。

但佛里斯犯了一个天真的谬误。佛里斯跟弗洛伊德都没有意识到，把 23 和 28 换成任意两个互质的数，都可以得到完全一样

的现象。每一个整数都可以表示成任意两个互质数的整数倍之和。这真是悲剧，他们的一切努力只是一场闹剧。佛里斯白白浪费了这些年在他的“理论”上，但它的背后其实只是数学上简单的整数性质。而弗洛伊德的学生，事后也因他们的老师成为这种胡说八道的受害者，感到尴尬。这真是智能上的大误会呀！

数学思考能让人具备抵抗被人操纵及洗脑的能力。反之，则会让人毫无防备地任人摆布，而且失去十分重要的学习机会

事物的本质是，在问题解决之后总是会留下另一个问题。解决问题的想法不能强行而得，但经由启迪式思考的形式，也就是目标导向思考工具的使用，或许可以得到。本书的目标在于：教导读者如何形成有效的思考架构以及以系统性的方式来解决问题。

引人发笑的修辞轶事

教授教学法人气排行榜前三名。并列第三名（极度令人不开心的）：“大家得到极快速和极不精准的结果。”N.N. 教授在讲题为“英特尔奔腾处理器编程错误”的课堂上这么说。第三名（快，再快一点）：“这个证明也可以很快得出，如果你动作加快的话。”K. H. 教授在高等数学讲座上这么说。第二名（减速）：“在黑板上写东西，不是方便你们阅读，而是让我在课堂上的思考速度可以慢下来。”F.B. 教授在数学密码学的课堂上这么说。第一名（简报论）：“如果我每秒播放 24 张的画面，这就成了一部电影。”J.W. 教授在一堂数学研讨会的最后，用很快的速度播放许多张 PPT 投影片。

数学使用的语言，是一种精确的、全世界共通的符号语言，诚如托马斯·沃格尔（Thomas Vogel）在《米盖·托雷达席瓦的最后历史》

中写到的："想要了解世界，就必须钻研数学，数学的语言是由数与线组成的，线又构成了圆、三角形、角锥、立方体。没有这种语言，我们将会无助地迷失在错综复杂的黑暗迷宫中，没有光线指引出路，帮助我们脱困。"

就像在现代生活的大部分领域一样，计算机在数学里扮演了重要的角色，但计算机并不是主角，其中的关键仍是理解错综复杂的关联性。计算机可以用来作为辅助工具，但解决问题所需要的智慧却不是人工智能可完成的。

数学知识、公式和方程式，不管放在宇宙任何地方或任何时间都会成立。数学企图建立真理。为此，首先要定出一些明确的概念，以便发展出一套共识。这样的规定称为定义。古希腊数学家欧几里得定义了点、线、直线的概念：

点只有位置，没有长度。

线只有长度，没有宽度。

直线是上头均匀包含了点的线。

这三句话足以让我们理解，欧几里得要拉几下单杠，才能为你我熟悉的事物做出定义。大部分时候有不同方式来精确定义。举例来说，老虎是唯一满身条纹的猫科动物，而人类是唯一没有羽毛的双足动物。这两句描述虽然很不寻常，但从数学的角度来看却是十分充分的。

在日常生活中，在科学、司法判决、政治和运动中持续地采用了各式各样的新证据。一个存在我们的日常生活中的证明是这样的："人们知道，必须要通过眼睛所视、耳朵所听的事才是肯定无疑的，否则，人们可证明关闭这些器官会使得事实有了部分的偏颇。"

在实证科学中，真相是通过观察真相或通过实验所发现的。在体

育中，最后的实际情况并不单纯只是由裁判员所判定。在司法判决中，事实是由法官的判决所建立起来的。在我们对法律的理解，有罪判决应是当每一个合理的犯罪行为被证明——排除合理性怀疑（指对优势证据的确定，不能仅凭怀疑就定罪，要有证据）。

就像司法判决一样，数学自有一套关于证明的理念，以及对于真理的判断标准。数学上的证明，就是从那些已经视为真确的公理以及已由公理证明过的其他叙述，来验证某个叙述是否正确。数学家就是这一种人——稍后便能看得更明白——为了证明，有时候把自己的日子搞得比别人更难受。

最有名的公理系统，是欧几里得的几何学所立基的系统。它包含了五个公设，例如任意两点之间都可以做一条直线。又如最有名的平行公设：对于不在直线 g 上的每一点 S，仅有一条通过 S 且与 g 平行的直线。欧几里得就是从这五个公设，建构出他的整个几何学，其中包括三角形的许多性质（譬如勾股定理），以及圆、平行四边形等几何对象的许多性质。真可说是划时代的成就。

为什么我们需要定理？

如果你像我一样有小孩，也许你会对以下的对话感到很熟悉。小朋友会带我们找到答案。

你的孩子会问：“为什么我只能喝一杯苹果汁？”

你会回答：“因为我们等一下就要吃饭了，我不希望你吃不下饭。”

你的孩子：“为什么苹果汁会让我吃不下饭？”

你：“因为它会让你的胃变饱，而且里面含了很多糖分。”

你的孩子：“为什么我不能吃糖？”

你：“因为它会让你口渴，而且对你的牙齿不好。”

你的孩子：“为什么糖对我的牙齿不好？”

你：“糖会引来细菌，细菌会在你的牙齿上钻孔。”

你的孩子：“为什么细菌会在我的牙齿上钻孔？”

到这个时候，你可能已经失去耐性，或许你会问自己，这个对话会不会结束。好问题！从逻辑上讲，这个对话永远不会真正结束。情况就像这样：先随便提出了一个问题，然后在你用“因为”来响应问题之后，又会冒出下一个“为什么”。这样就形成了一个“三难困境”——这是两难困境的衍生版，有三种选择，但都不够好。哲学家称这个特别的形式为“明希豪森三难困境”。这三种选择分别是：

1.“提问、回答、提问……”的这个序列，会永无止境地持续下去。这称为没有终点的循环。

2. 经过一连串的提问和回答之后，其中一个之前已经回答过的答案会再次出现，然后一直重复这个循环，这叫作循环论证。

3. 我们可以诉诸某个不证自明的论断，像主教的发言，或是诉诸更高的权威，例如上帝。

> 很短的循环论证或神迹，“K 先生告诉我，上帝跟他说话了”——“我觉得不可能，K 先生一定在说谎”——这不可能。神不会跟说谎的人对话！

在数学里，选择了第三个选项。在开始考虑和推导之前，我们会先设定一系列的公设或公理，这些公设或公理要不就是不证自明的，要不就是绝对必要的。

我们来举一个简单的例子：包含了三个公设的地方议会委员会形成系统。

公设 1：应该有 6 个委员会。

公设 2：每位议员必须参加 3 个委员会。

公设 3：每个委员会必须由 4 人组成。

这个情境的模型可由下图来说明：

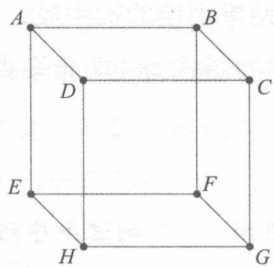

图 1　地方会议里的委员会

图中的顶点代表了 8 个人：A、B、C、D、E、F、G、H。立方体的每个面，各代表一个四人委员会，譬如委员会 $\{A, B, C, D\}$ 或委员会 $\{A, D, E, H\}$。由于立方体有 6 个面，每个顶点又是三个面的交点，所以显然满足了这三个公设。

因此，我们可以找出一个模型，去满足这些公设。这三个公设是兼容的，意思是本身不存在矛盾；当公设选得不好，就有可能会自相矛盾。此外，我们也会对公设的规则感兴趣，这个规则允许我们去证明或推翻与这些委员会有关的每个命题或叙述。如果是这样的话，我们就说这个公理系统是完备的。

现在我们可以试着从这些公设，进一步推导出关于委员会或参与者的其他结论。以下是个简单的衍生性质。

定理：地方议会由 8 个人组成。

证明非常简单：我们把每个委员会里的人数（4）乘上委员会的总数（6），会得到 24。根据公设 2，每人必须参加 3 个委员会，也就是每个人都计算了三次，所以议会里应该有 $24 \div 3 = 8$ 位成员。

相对地，由以下两个公理组成的公理系统，就是个不兼容的系统。

公设 1：每个委员会由 2 人组成。

公设 2：如果委员会的数目是奇数，委员人数就只有 1 人。

这两个公理是自相矛盾的，而且很容易证明为什么矛盾。由公设 1 可知，就算是有奇数个委员会，每个委员会里的人数也必为偶数。我们的论证，可以由以下这个假想的握手例子来说明。“如果有一群人两两互相握手，那么即使每个人握手的次数是奇数，相加后的结果一定是偶数。为什么？假设有 n 个人，而 S_i 代表第 i 个人的握手次数，则方程式 $S_1+S_2+\cdots+S_n=2K$ 一定会成立（其中的 K 为某个自然数），因为两人之间的握手在总次数里都会计算两次。但因为 $2K$ 是偶数，所以次数和 $S_1+S_2+\cdots+S_n$ 也是偶数，尽管相加的项数（即参与的总人数）是奇数，相加的结果仍是偶数。”

将“两两握手”换成“一起组成委员会”，同样的结果也可以直接套用。

数学证明可长可短，可能记满数学符号、以图标来表示，或是写成乏味的计算过程。可能是快刀斩乱麻，直指问题核心，或是历经一长串的思路才达到目的地。我们在这本书里，会遇到上述所有的情形。但无论证明的形式为何，重要的是必须要能理解，将它内化为自己的知识宝库。数学问题是民主的。在证明面前，人人平等！

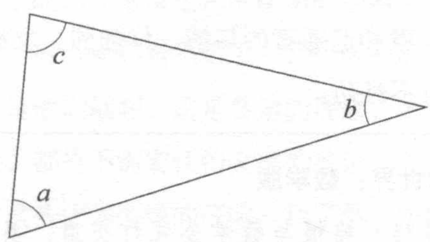

图 2　三角形的内角