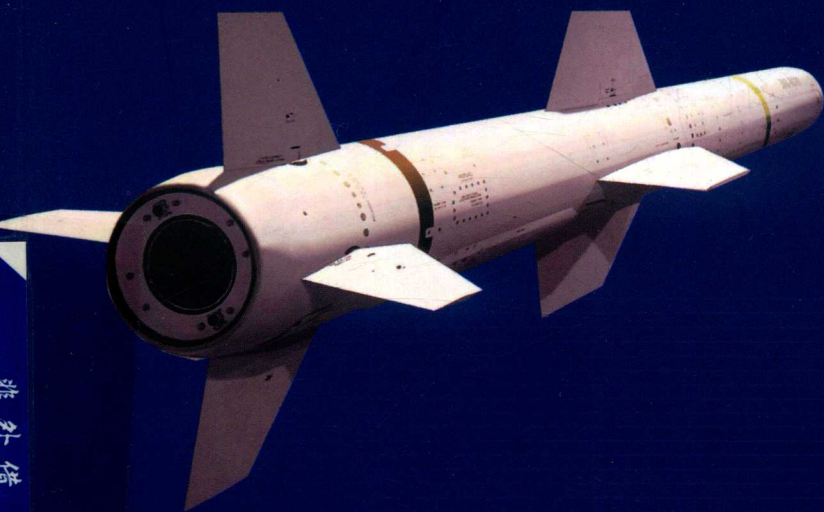




军队院校“2110”工程三期建设专著

反舰导弹武器系统的 精度分析及效能评估

陈 洁 潘长鹏 李为峰 著



非外信



北京航空航天大学出版社
BEIHANG UNIVERSITY PRESS



军队院校“2110”工程三期建设专著

反舰导弹武器系统的 精度分析及效能评估

陈 洁 潘长鹏 李为峰 著

北京航空航天大学出版社

内 容 简 介

在反舰导弹即将服役之际,对导弹飞行弹道及其环境进行仿真具有十分重要的现实意义及军事应用价值。本书主要介绍反舰导弹性能仿真与评估技术,内容包括常用坐标系及其相互关系、飞行弹道仿真模型的建立、火控系统模型、仿真试验设计、数据处理与分析等。本书叙述由浅入深,简明扼要,内容丰富,图文并茂。

本书可作为反舰导弹武器系统精度仿真与性能评估的基础教材,也可作为航空专业研究生的参考教材,还可供相关科研人员及航空爱好者参考。

图书在版编目(CIP)数据

反舰导弹武器系统的精度分析及效能评估 / 陈洁,
潘长鹏,李为峰著. -- 北京:北京航空航天大学出版社,
2016.7

ISBN 978-7-5124-2201-8

I. ①反… II. ①陈… ②潘… ③李… III. ①反舰导
弹—系统分析—研究 IV. ①TJ761.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 178132 号

版权所有,侵权必究。

反舰导弹武器系统的精度分析及效能评估

陈 洁 潘长鹏 李为峰 著

责任编辑 孙兴芳

*

北京航空航天大学出版社出版发行

北京市海淀区学院路 37 号(邮编 100191) <http://www.buaapress.com.cn>

发行部电话:(010)82317024 传真:(010)82328026

读者信箱:goodtextbook@126.com 邮购电话:(010)82316936

北京建宏印刷有限公司印装 各地书店经销

*

开本:710×1 000 1/16 印张:9.25 字数:197 千字

2017 年 10 月第 1 版 2017 年 10 月第 1 次印刷 印数:1 000 册

ISBN 978-7-5124-2201-8 定价:45.00 元

前 言

反舰导弹具有射程远、精度高、战斗威力大、突防能力强、装载性好、使用维护方便的特点,肩负着海军航空兵在敌对空防御圈外从空中打击敌人各种大中型水面舰艇及编队,封锁海峡、指定海域和航道等重要的作战使命,是打赢未来高科技战争的有力武器。反舰导弹武器系统的精度仿真、性能分析与评估,在导弹装备研制过程中是不可或缺的,是装备研制、定型、采办和作战应用的重要环节,也是满足未来作战需求的根本保证。

全书共 10 章,主要内容包括:第 1 章介绍国内外反舰导弹武器系统性能分析与评估;第 2 章介绍常用坐标系及相互关系;第 3 章介绍飞行弹道仿真模型;第 4 章和第 5 章分别介绍反舰导弹武器系统随机干扰因素模型和机载火控系统模型的建立及检验;第 6 章和第 7 章分别介绍导弹弹道实时解算的 UKF 滤波器优化设计及导弹试验设计优化;第 8 章介绍导弹试验设计与参数估计;第 9 章和第 10 章分别介绍仿真验证方法及仿真软件的开发。

本书可作为反舰导弹武器系统精度仿真与性能评估的基础教材,也可作为航空专业研究生的参考教材,还可供为相关专业科研人员及航空爱好者参考。

本书在编写过程中,得到了海军航空大学控制工程系及训练部各位领导和同事的大力支持,在此表示衷心的感谢。

由于作者水平有限,书中难免有不妥或者错误之处,恳请广大读者批评指正。

陈 洁

2017 年 6 月 19 日

目 录

第 1 章 导弹性能分析与评估概述	1
1.1 研究背景和意义	1
1.2 导弹仿真技术的国内外研究发展状况	1
第 2 章 常用坐标系及相互关系	4
2.1 坐标系的定义	4
2.1.1 地面坐标系	4
2.1.2 弹体坐标系	4
2.1.3 弹道坐标系	5
2.1.4 速度坐标系	5
2.1.5 空速坐标系	6
2.1.6 气流坐标系	6
2.2 坐标变换	6
2.2.1 坐标变换的一般方法和性质	6
2.2.2 旋转坐标系中的导数	8
2.2.3 矢量乘积的矩阵表示法	9
2.3 各坐标系之间的几何关系及坐标变换矩阵	9
2.3.1 地面坐标系与弹体坐标系	9
2.3.2 地面坐标系与弹道坐标系	10
2.3.3 速度坐标系与弹道坐标系	11
2.3.4 速度坐标系与弹体坐标系	12
2.3.5 地面坐标系与空速坐标系	12
2.3.6 气流坐标系与空速坐标系	13
2.3.7 气流坐标系与弹体坐标系	13
第 3 章 飞行弹道仿真模型的建立	14
3.1 导弹动力学和运动学数学模型	14
3.1.1 固化原理	14
3.1.2 反舰导弹飞行过程中受力及力矩分析	14
3.1.3 导弹质心动力学方程	19
3.1.4 反舰导弹绕质心转动的刚体动力学方程	21
3.1.5 反舰导弹质心运动学方程	23

3.1.6	反舰导弹刚体运动学方程	23
3.1.7	角度之间的关系	24
3.1.8	有风时一些物理量的计算	24
3.1.9	反舰导弹的质量方程	26
3.1.10	反舰导弹的推力方程	27
3.1.11	反舰导弹动力学和运动学数学模型小结	27
3.2	导弹弹道整体构成	29
3.3	仿真模型的整体构成	30
3.4	末制导雷达搜捕目标模型	32
第 4 章	随机干扰因素模型的建立及检验	36
4.1	仿真中所用的随机数	36
4.2	海浪扰动的仿真模型	37
4.2.1	数学模型	37
4.2.2	能量等分法	38
4.2.3	仿真模型	39
4.3	大气紊流扰动的仿真模型	39
4.3.1	数学模型	39
4.3.2	仿真模型	40
4.3.3	大气紊流信号序列的生成	42
4.4	目标机动的仿真模型	42
4.4.1	数学模型	42
4.4.2	仿真模型	42
4.5	雷达角噪声的仿真模型	43
4.5.1	目标反射中心引起的雷达角闪烁噪声	43
4.5.2	目标振幅起伏引起的角跟踪误差	44
4.5.3	雷达角噪声的仿真模型	44
4.6	仿真模型的校验	45
4.6.1	仿真模型验模技术	45
4.6.2	扰动模型校验	45
第 5 章	机载火控系统模型及目标模型的建立	51
5.1	机载火控系统模型	51
5.1.1	火力控制模块	51
5.1.2	航路规划模块	56
5.1.3	导弹末制导模块	61
5.2	目标模型	66

5.2.1	目标舰的几何模型	66
5.2.2	目标运动仿真模型	68
第 6 章	导弹弹道实时解算的 UKF 滤波器优化设计	69
6.1	面向测元的 UKF 滤波算法	69
6.2	基于试验设计的滤波器参数优化	72
6.2.1	滤波器架构	73
6.2.2	正交设计表	74
6.2.3	仿真试验	74
6.3	方法的性能分析	76
6.3.1	最优参数预测的有效性	76
6.3.2	滤波器的稳健性	77
6.3.3	滤波器的收敛性能	78
第 7 章	导弹试验设计优化	80
7.1	回归试验设计	80
7.1.1	回归试验设计概述	80
7.1.2	优化准则	82
7.1.3	最优设计迭代算法	83
7.2	最大信息试验点集设计	85
7.2.1	寻找最大信息试验点集	86
7.2.2	D_N 最优确切设计迭代算法	86
7.2.3	梯度上升法	87
7.3	小子样试验设计	89
7.3.1	信息矩阵的性质	89
7.3.2	试验点数小于 m 的设计优化	91
7.4	一体化试验设计	92
7.4.1	加权试验设计	92
7.4.2	补充试验设计	93
第 8 章	模型驱动的导弹试验设计与参数估计	95
8.1	特殊先验信息的回归模型	95
8.2	参数个数远大于样本数情形下的回归模型参数估计	96
8.2.1	岭回归法	97
8.2.2	Lasso 回归法	97
8.3	基于稀疏理论参数估计	97
8.3.1	参数估计问题描述	98
8.3.2	回归模型稀疏表示	98

8.3.3	稀疏重构算法概述	99
8.3.4	基于稀疏理论的参数估计	99
8.4	综合时序信息的试验设计优化及稀疏求解	104
8.4.1	建模及求解流程	104
8.4.2	性能分析	105
8.5	三角函数组合响应模型	106
8.5.1	第一阶段试验设计与分析	107
8.5.2	第二阶段试验设计与分析	114
8.6	弹载雷达测距误差模型	115
8.6.1	第一阶段试验设计与分析	117
8.6.2	第二阶段试验设计与分析	118
第 9 章	试验设计及结果分析	120
9.1	仿真条件的确定	120
9.2	仿真设计	120
9.3	确定导弹精度指标的统计分析法	121
9.3.1	MONTE-CARLO 法及其在导弹仿真中的应用	121
9.3.2	MONTE-CARLO 法试验次数的确定	122
9.3.3	统计的有关理论	123
9.4	仿真方案及结果统计	124
9.4.1	全面仿真方案	125
9.4.2	回归分析	127
第 10 章	仿真系统开发及软件使用	132
10.1	仿真环境建立的基本思想	132
10.1.1	建立仿真环境的必要性	132
10.1.2	仿真环境的要求及简介	132
10.1.3	仿真环境界面及功能	133
10.2	仿真模块详细设计决策	133
参考文献	138

第 1 章 导弹性能分析与评估概述

导弹性能分析与评估,在武器研制、定型、采办和作战应用等阶段都起着重要作用,也是满足未来作战需求的基本保证^[1]。但是,在装备技术大变革的背景下,传统的分析与评估手段已无法适应新发展的需求,除此之外,装备系统所处环境日益多元化,使得装备的抗干扰性设计越来越受到人们的重视,这大大增加了分析与评估的难度。这些新的问题给导弹性能分析与评估带来了新的挑战^[2-4]。本章首先介绍本书的研究背景及意义,然后对国内外相关研究领域的工作进行总结,最后概述本书的主要工作。

1.1 研究背景和意义

在反舰导弹即将服役之际,对导弹飞行弹道及其环境进行仿真具有十分重要的现实意义及军事应用价值。首先,建立导弹仿真模型是对该型导弹作战效能进行评估的基础,有关部门可以借助该模型对导弹的作战能力进行定量评价;其次,反舰导弹的使用部队利用飞行弹道及其环境的仿真模型结合某些战术背景的设定,可以有针对性地研究反舰导弹的使用战术,为反舰导弹战术使用条令的编写提供定量依据;再次,在反舰导弹靶试时可以利用该仿真模型进行不同技术条件下的模拟靶试,为反舰导弹靶试大纲及靶试技术条件的确定提供所需数据;最后,将该型导弹弹道仿真模型与其发射平台的指控系统结合起来,可以减少海上实兵演练的次数,进而节省大量的训练经费,获得较大的军事效益。

1.2 导弹仿真技术的国内外研究发展状况

从 20 世纪 30 年代美国生产了用于训练飞行员的林克飞行训练器开始,导弹研发就进入了程控飞行器的时代。20 世纪 50 年代初,由于模拟计算机条件和仿真技术条件的限制,人们尚未认识到仿真在导弹武器研制中的重要作用,主要利用飞行试验而不是系统仿真试验来确定武器系统的性能,从而在研制过程中导弹的耗资量很大。例如,美国奈基-I 防空导弹研制进行了 1 000 多次发射试验,苏联 B-750 防空导弹研制进行了数百次发射试验,其耗资是惊人的。

20 世纪 50 年代后期至 60 年代初,随着仿真技术的发展,人们开始利用仿真对复杂的导弹武器系统进行设计鉴定,有代表性的例子是英国警犬地空导弹。该项研制工程一开始就知道经费有限,不可能单靠飞行试验来确定其系统性能,因此决定采

用仿真技术。他们交替地进行仿真试验和靶场飞行试验,只发射了 92 枚导弹就完成了该项研制任务,其中 79 次发射是专门用于校验模型的。由于模型经过反复修改和确认有效,获得了较高的置信度,所以可以用于进行导弹武器系统性能的鉴定,从而节约了经费,缩短了研制周期。

20 世纪 60 年代末至 70 年代,在导弹武器系统发展需要的推动下,在混合计算机的支撑下,仿真技术又有了新的发展,出现了大系统半实物实时仿真,就是把系统实际使用的部分实物直接纳入仿真回路,这样既提高了仿真的逼真度,又解决了以前存在于系统中的许多复杂建模难题。

20 世纪 80 年代出现了两个新事物,一个是可用于动力学系统实时仿真的数字计算机,使得大系统全数字实时仿真成为可能,有代表性的是美国 ADI 公司的 AD-100 仿真机,并有相应的先进仿真软件支持。由于数字机具有性价比的优势,所以此类产品在市场上具有一定的竞争力。另一个取得迅速发展的技术领域是复杂目标和环境的仿真。为了实现逼真的作战,就需要有完善的目标与环境的物理效应仿真装置。有代表性的是美国阿拉巴马州红石兵工厂的陆军高级仿真中心,它具有射频、红外和光电 3 种目标和环境物理效应仿真装置,这些仿真装置的频带和物理运动性能满足评价制导控制系统的需要。在中央计算机控制下,目标环境物理效应仿真装置加上必要的其他仿真设备可提供实时仿真能力,可以精确地、重复地测试制导控制系统的性能。环境因素的引入,是增强仿真试验逼真度的关键措施之一。

20 世纪 90 年代,导弹仿真技术由单武器平台性能仿真发展到了多武器平台在作战环境下的体系对抗仿真,重点是仿真器联网的分布式交互仿真 DIS(Distributed Interactive Simulation)。1995 年,美国针对 DIS 体系结构存在的问题又提出了高层体系结构 HLA(High Level Architecture)。

我国在军用仿真技术方面的发展已有 30 多年的历史,自 20 世纪 70 年代起,我国自行设计的飞行模拟器、舰艇模拟器等训练仿真器就已相继研制成功并形成市场。80 年代,我国建设了一批高水平、大规模的半实物仿真系统,如红外制导导弹半实物仿真系统;90 年代,我国开始对分布式交互仿真、虚拟现实等先进技术进行研究,由单个武器平台的性能仿真发展为多武器平台在作战环境下的对抗仿真。

在反舰导弹设计定型阶段,为了获得系统在规定作战空域的性能,需要进行大量的试验,若采用半实物仿真,不仅开销很大,而且系统中有的实物也是承受不了的,但采用数字仿真就可以避免。因此,我国在开展联邦式仿真等多武器平台仿真的同时又深入发展了单个武器平台的数字仿真技术。

导弹武器性能及作战效能评估,包括稳定性、抗干扰能力、识别能力、制导精度、终点毁伤效能等指标的分析与评定^[5],从数据处理的角度来说,其实质就是利用导弹试验得到的各类试验数据,采取数学手段,确定与性能相关影响因素的最优水平组合,或者建立性能指标与影响因素之间的响应模型或函数关系。

由于导弹装备复杂,其所处环境多变,要做出准确的分析与评估,掌握足够的信

息是十分关键的。为了得到准确的分析与评估结论,最理想的方法就是进行全面的导弹试验,即在性能指标相关因素的所有不同水平组合下做飞行试验。显然,这种方法是完全不可行的。事实上,由于导弹成本高昂、技术含量高以及其他客观因素的限制,所以导弹试验往往具有小子样性^[6-8],从而引发了结论的可信度要求与试验信息匮乏之间的矛盾。

这时,试验分析方法的研究应运而生,其核心是有效利用各种来源的信息,从而扩大信息量。试验分析方法的研究领域主要涵盖异源试验信息的折合^[9]、融合评估研究^[10]、先验信息的开发^[11]和建模与仿真技术研究^[12]等方面。这是一种在试验已经存在的情况下被动的处理方法,但是,若可信度高的试验提供的信息量过少,那么任何高超的分析技术都无法弥补由于信息匮乏所导致的对评估结论可信度的质疑。因此,还需要从信息产生的角度出发,从根本上解决这一矛盾^[13]。导弹试验设计所关注的是如何合理地选取试验因素及其水平组合,优化飞行试验方案,使每次试验都成为“关键试验”,保证以尽可能少的试验代价获得更多的重要和必要的信息,从而提高费比,为下一步试验分析奠定基础。近年来,越来越多的装备设计和分析人员认识到试验设计的重要性,如付京来等利用拟水平追加法对飞行弹道控制精度进行试验设计^[14],刘新爱等基于均匀设计对导弹精度鉴定的仿真试验进行改进^[15],Gong等基于多学科设计优化技术研究导弹设计^[16]。

随着军事科技的不断进步、导弹更新换代的加快,导弹试验设计与分析也遇到了新的挑战。一方面,导弹打击精度的不断提高、制导方式和打击模式的多样化,对导弹性能评估结论的准确度及精细度提出了更高的要求;另一方面,导弹防御系统的发展以及电磁环境的日益复杂,使得导弹的突防及反干扰设计更加复杂,这大大增加了飞行试验的影响因素,并可能引入各因素之间的交互效应^[17-18]。除此之外,与其他试验相比,导弹试验还表现出小子样性、多源性、继承性、先验丰富等特点^[19-22]。

综上所述,针对导弹试验的新挑战和新特点,讨论模型驱动情形下的试验设计与参数优化问题,对系统性能进行分析与评估,具有一定的学术价值和应用价值。

第 2 章 常用坐标系及相互关系

2.1 坐标系的定义

2.1.1 地面坐标系

建立地面坐标系 $Axyz$, 与地面固连, 原点 A 是导弹发射瞬间位置 (即发射点) 在地面上的投影; Ax 轴为发射瞬间导弹的指向在地面上的投影; Ay 轴在过 Ax 轴的铅垂面内, 与 Ax 轴垂直, 指向上方为正; Az 轴按右手法则确定, 如图 2.1 所示。

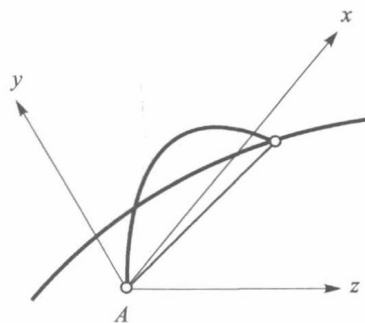


图 2.1 地面坐标系

2.1.2 弹体坐标系

弹体坐标系固连在导弹弹体上, 原点 O 取为导弹质心; Ox_1 轴与弹体纵向重合, 指向头部为正; Oy_1 轴位于弹体纵向对称平面内, 与 Ox_1 轴垂直, 指向上方为正; Oz_1 轴按右手法则确定, 如图 2.2 所示。

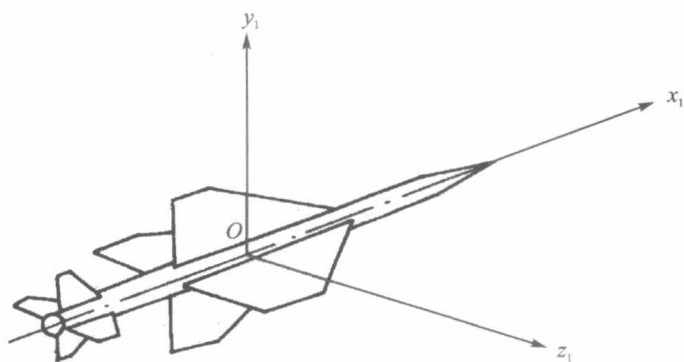


图 2.2 弹体坐标系

2.1.3 弹道坐标系

弹道坐标系也称为航迹坐标系,其原点 O 取为导弹质心; Ox_2 轴方向与导弹质心对地运动速度 v (地速) 的方向一致; Oy_2 轴在通过 Ox_2 轴的铅垂面内,垂直于 Ox_2 轴,指向上为正; Oz_2 轴按右手法则确定,如图 2.3 所示。

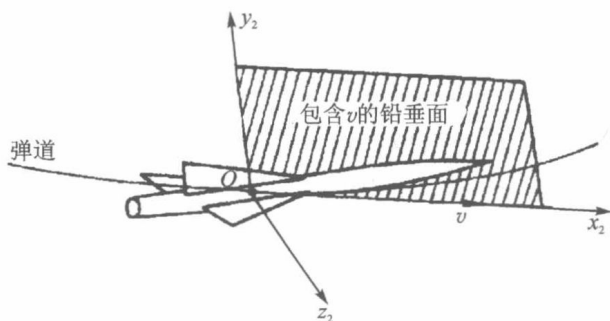


图 2.3 弹道坐标系

2.1.4 速度坐标系

速度坐标系的原点 O 取为导弹质心; Ox_v 轴与导弹质心对地运动速度向量 v (地速) 的方向一致, v 的指向就是 Ox_v 轴的正指向; Oy_v 轴在导弹纵向对称平面内且垂直于 Ox_v 轴,指向上方为正; Oz_v 轴按右手法则确定,如图 2.4 所示。

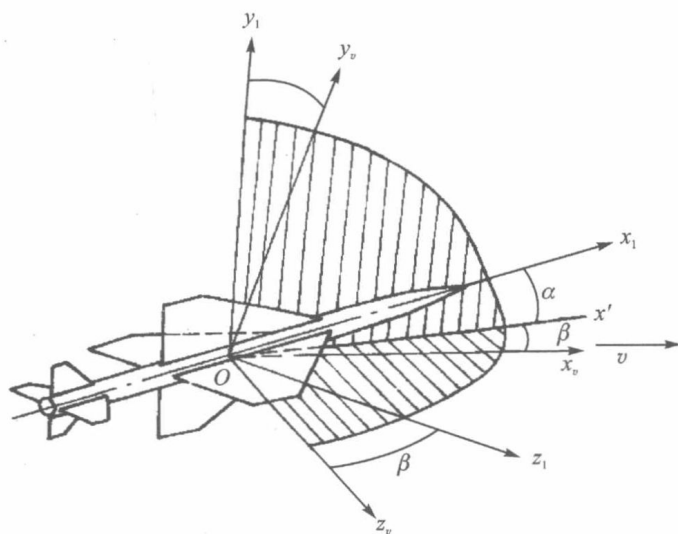


图 2.4 速度坐标系

2.1.5 空速坐标系

为描述空速 v_r 对地的方向,类似于弹道坐标系 $Ox_2y_2z_2$ 来定义空速坐标系 $Ox_r y_r z_r$ 。空速坐标系的原点 O 取为导弹质心; Ox_r 轴方向与导弹质心对空气运动速度 v_r (空速) 的方向一致; Oy_r 轴在通过 Ox_r 轴的铅垂面内,垂直于 Ox_r 轴,指向上为正; Oz_r 轴按右手法则确定。

2.1.6 气流坐标系

为描述空速对弹体的方向,类似于速度坐标系来定义气流坐标系。气流坐标系的原点 O 取为导弹质心; Ox_q 轴与导弹质心对空气速度矢量 v_r (空速) 的方向一致, v_r 的指向就是 Ox_q 轴的正指向; Oy_q 轴在导弹纵向对称平面内且垂直于 Ox_q 轴,指向上方为正; Oz_q 轴按右手法则确定。

2.2 坐标变换

2.2.1 坐标变换的一般方法和性质

设有一空间矢量 r , 在坐标系 $S_p (Ox_p y_p z_p)$ 和 $S_q (Ox_q y_q z_q)$ 中的分量分别为 (x_p, y_p, z_p) 和 (x_q, y_q, z_q) 。考虑下面的问题,若已知 (x_p, y_p, z_p) 与 S_p 坐标系和 S_q 坐标系的几何关系,求 (x_q, y_q, z_q) 。

1. 坐标的基元变换

为了研究三维坐标系变换的一般关系式,先来考虑三维坐标系变换的最简单情况(也称为基元情况),即有一个轴彼此重合的情况。

设有两个坐标系 S_p 和 S_q , 其中 z_p 轴和 z_q 轴是重合的,而 x_p, y_p 轴与 x_q, y_q 轴之间的夹角为 α , 如图 2.5 所示。

显然,若坐标系 S_p 绕 z_p 轴转过 α 角就与坐标系 S_q 重合。由此可知,这种情况下 (x_p, y_p, z_p) 与 (x_q, y_q, z_q) 的关系为

$$\begin{bmatrix} x_q \\ y_q \\ z_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

令 $B_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则称 $B_z(\alpha)$ 是绕 z 轴旋转的坐标变换基元矩阵。

同理,若坐标系 S_p 和 S_q 的 y_p 轴和 y_q 轴是重合的,则坐标系 S_p 绕 y_p 轴转过 α 角就会与坐标系 S_q 重合,如图 2.6 所示。由此可知,这时 (x_p, y_p, z_p) 与 (x_q, y_q, z_q) 的关系为

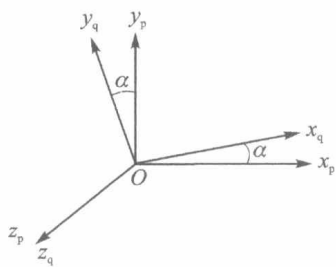


图 2.5 坐标系基元变换(绕 z 轴旋转)

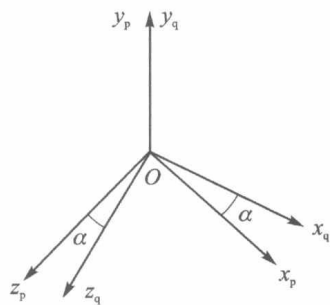


图 2.6 坐标系基元变换(绕 y 轴旋转)

$$\begin{bmatrix} x_q \\ y_q \\ z_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

令 $\mathbf{B}_y(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}$, 则称 $\mathbf{B}_y(\alpha)$ 是绕 y 轴旋转的坐标变换基元矩阵。

同理,若坐标系 S_p 和 S_q 的 x_p 轴和 x_q 轴是重合的,则坐标系 S_p 绕 x_p 轴转过 α 角就会与坐标系 S_q 重合,如图 2.7 所示。由此可知,这时 (x_p, y_p, z_p) 与 (x_q, y_q, z_q) 的关系为

$$\begin{bmatrix} x_q \\ y_q \\ z_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

令 $\mathbf{B}_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$, 则称 $\mathbf{B}_x(\alpha)$ 是绕 x 轴旋转的坐标变换基元矩阵。

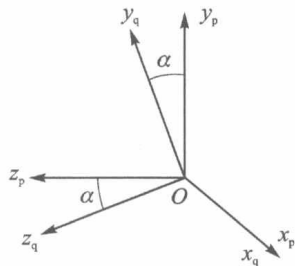


图 2.7 坐标系基元变换(绕 x 轴旋转)

2. 坐标变换的一般情况

任意两个空间坐标系之间的关系都可以用一组(3个)欧拉角(Euler角)来表示。假设由坐标系 S_p 到 S_q 的过渡是通过以下3次转动来实现的:

首先,坐标系 $Ox_p y_p z_p$ 绕 y_p 轴转过 ϕ 角,得到过渡坐标系 $Ox' y_p z'$; 然后,过渡坐标系 $Ox' y_p z'$ 绕 z' 轴转过 ϑ 角,得到过渡坐标系 $Ox_q y' z'$; 最后,过渡坐标系 $Ox_q y' z'$ 绕 x_q 轴转过 γ 角,得到坐标系 $Ox_q y_q z_q$ 。

综上得到下面的关系式:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x' \\ y_p \\ z' \end{bmatrix} &= \mathbf{B}_y(\phi) \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_q \\ y' \\ z' \end{bmatrix} &= \mathbf{B}_z(\vartheta) \begin{bmatrix} x' \\ y_p \\ z' \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_q \\ y_q \\ z_q \end{bmatrix} &= \mathbf{B}_x(\gamma) \begin{bmatrix} x_q \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \end{aligned}$$

故有

$$\begin{bmatrix} x_q \\ y_q \\ z_q \end{bmatrix} = \mathbf{B}_x(\gamma) \mathbf{B}_z(\vartheta) \mathbf{B}_y(\phi) \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

因此,由坐标系 S_p 到 S_q 的坐标变换矩阵为

$$\mathbf{B}_p^q = \mathbf{B}_x(\gamma) \mathbf{B}_z(\vartheta) \mathbf{B}_y(\phi) \quad (2.5)$$

需要指出的是:由于基元变换矩阵为正交矩阵,因此 \mathbf{B}_p^q 也为正交矩阵,故有

$$\mathbf{B}_q^p = (\mathbf{B}_p^q)^{-1} = (\mathbf{B}_p^q)^T \quad (2.6)$$

式中: \mathbf{B}_q^p ——从坐标系 S_q 到 S_p 的坐标变换矩阵;

$(\mathbf{B}_p^q)^{-1}$ —— \mathbf{B}_p^q 的逆矩阵;

$(\mathbf{B}_p^q)^T$ —— \mathbf{B}_p^q 的转置矩阵。

因此,只要给出两个坐标系之间的几何关系,就一定能求出这两个坐标系之间的坐标变换矩阵。

2.2.2 旋转坐标系中的导数

设活动坐标系 $Oxyz$ 具有角速度 $\boldsymbol{\omega}$ (相对惯性系),其在此坐标系中的分量为 $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$,即 $\boldsymbol{\omega} = \omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k}$,其中, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 是 x, y, z 轴的单位矢量。

设有一个可变矢量 $\mathbf{a}(t)$,它在此坐标系中的分量为 (a_x, a_y, a_z) ,即 $\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$,此时求矢量 $\mathbf{a}(t)$ 对时间的导数:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt} \mathbf{i} + \frac{da_y}{dt} \mathbf{j} + \frac{da_z}{dt} \mathbf{k} + a_x \frac{d\mathbf{i}}{dt} + a_y \frac{d\mathbf{j}}{dt} + a_z \frac{d\mathbf{k}}{dt} \quad (2.7)$$

根据理论力学的知识可知,当一个刚体绕定点 O 以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 旋转时,刚体上任何一点 P 的速度为

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \quad (2.8)$$

式中: \mathbf{r} ——从点 O 引向点 P 的矢径。

现在把单位矢量 \mathbf{i} 看作是活动坐标系中某一点 P 的矢径,于是有

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i} \quad (2.9)$$

同理有

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j} \quad (2.10)$$

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k} \quad (2.11)$$

将式(2.9)~式(2.11)代入式(2.7),可得

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{da_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{da_z}{dt}\mathbf{k} + \boldsymbol{\omega} \times (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k})$$

即

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{da_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{da_z}{dt}\mathbf{k} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a} \quad (2.12)$$

2.2.3 矢量乘积的矩阵表示法

设矢量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 在坐标系 $Oxyz$ 中的分量分别为 $[a_x \ a_y \ a_z]^T$ 和 $[b_x \ b_y \ b_z]^T$, 则有

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

将矩阵 $\begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}$ 记作 $\begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}^{\text{ss}}$, 称为矢量 \mathbf{a} 的斜对称矩阵, 则有

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}^{\text{ss}} \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

可得

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = [a_x \ a_y \ a_z] \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

2.3 各坐标系之间的几何关系及坐标变换矩阵

2.3.1 地面坐标系与弹体坐标系

这两个坐标系之间的关系可以用俯仰角 ϑ 、偏航角 ϕ 、滚动角 γ 来描述。