普通高等教育“十三五”规划教材

概率论与数理统计

主编 孙 慧 副主编 陈世勇 赵成鳌 赵淑珍

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

普通高等教育“十三五”规划教材

概率论与数理统计

主　编　孙　慧
副主编　陈世勇　赵成鳌　赵淑珍

安徽师范大学图书馆
藏书

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

"概率论与数理统计"是高等院校工科类专业和经济管理类专业一门重要的基础数学课程.本书依照国家教育部制定的高校"概率论与数理统计教学基本要求"编写,结合当前大多数本专科院校的学生基础和教学要求,体现了应用型人才数学课程设置的发展趋势.全书共分9章,第1—5章是概率论部分,内容包括随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理;第6—9章是数理统计部分,内容包括数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、相关分析与回归分析.各章均配有习题,书末附有参考答案,附表中列有一系列数值用表.

本教材适合普通高等院校工科和经济管理类专业概率论与数理统计课程的使用,同时也可作为数学建模课程的参考书籍,还对相关专业人员或自学人员有一定的参考作用.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/孙慧主编. -- 上海:同济大学出版社,2017.10

ISBN 978-7-5608-7449-4

Ⅰ.①概… Ⅱ.①孙… Ⅲ.①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第252741号

普通高等教育"十三五"规划教材

概率论与数理统计

主编 孙 慧 **副主编** 陈世勇 赵成鳌 赵淑珍

责任编辑 陈佳蔚 **责任校对** 徐春莲 **封面设计** 潘向蓁

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn
(地址:上海市四平路1239号 邮编:200092 电话:021-65985622)
经 销 全国各地新华书店
排 版 南京月叶图文制作有限公司
印 刷 上海同济印刷厂有限公司
开 本 787 mm×960 mm 1/16
印 张 14.75
字 数 295 000
印 数 1—3 100
版 次 2017年10月第1版 2017年10月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-5608-7449-4

定 价 36.00元

本书若有印装质量问题,请向本社发行部调换 版权所有 侵权必究

前 言

“概率论与数理统计”是高等院校工科类专业和经管类专业一门重要的基础课程，是研究随机现象的一门数学分支，是与现实世界联系最密切、应用最广泛的学科之一. 随着科学技术的进步和发展，研究随机现象的数学理论和方法——概率论与数理统计方法已渗透到自然科学和社会科学的各个领域. 概率论与数理统计已成为人们从事生产劳动、科学研究和社会活动的一个基本工具. 经济社会发展需要大量应用技术型人才，因此教材改革是非常必要的，本着培养和提高学生应用能力的目的，我们编写了这本教材.

本书的特点是注重基本概念、基本理论与统计思想，强调基本方法的应用，弱化严密的数学推理过程，力求简洁、清晰地阐述一些概念和重要结论使用的技巧和方法，有助于学生接受和掌握所学的内容，达到会用的目的；注重夯实基础，培养抽象思维能力、逻辑推理能力和分析问题解决问题的能力. 本书选择了典型、丰富的题目作为例题，每章均配有习题，书后附有参考答案，供读者参考.

全书共 9 章，第 1、2 章由陈世勇、孙慧编写，第 3、4 章由赵淑珍编写，第 5、6、7 章由孙慧编写，第 8、9 章由赵成鳌编写，孙慧对全书进行了审读和统稿工作. 本书的部分内容参考了书后所列参考文献，在此对这些参考文献的作者表示感谢. 此外，本书在出版过程中得到了武汉工程大学邮电与信息工程学院领导及相关管理部门的大力支持，在此表示衷心的感谢！

由于编者水平所限，本书如有缺点和不足之处，恳请广大同仁和读者批评指正！

编 者

2017 年 10 月

目 录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第 1 章　随机事件与概率

当我们对自然界和人类社会进行考察时，就会发现有两类不同性质的现象. 其中一类现象在一定条件下必然发生，比如：

“早晨，太阳必然从东方升起”；

“向上抛一粒石子必然下落”；

“标准大气压下，液态水的温度超过 100℃时就会汽化”；

“同性电荷必相互排斥”；

等等. 我们把这类在一定条件下必然发生的现象，称为确定性现象（或必然现象）.

在自然界和社会上还存在另一类现象，例如，在相同条件下抛同一枚硬币，其结果可能是正面朝上，也可能是反面朝上，并且在每次抛掷之前无法肯定抛掷的结果是什么；一个盒子中有两个相同的球，一个是白色的，另一个是黑色的，搅匀后从中任意摸取一球，在球没有取出之前，不能确定取出的球是白色的还是黑色的. 这类现象，在一定条件下，可能出现这样的结果，也可能出现那样的结果，而在试验或观察之前不能预知确切的结果. 但人们经过长期实践并深入研究之后发现，这类现象在大量重复试验或观察下，它的结果呈现出某种规律. 例如，多次重复抛掷同一枚硬币，得到正面朝上与反面朝上两个结果大致各占一半，结果呈现出规律性. 在大量重复试验中，其结果所呈现出的规律性，称为**统计规律性**. 这种在个别试验中其结果呈现出不确定性，在大量重复试验中其结果呈现出规律性的现象，称为**随机现象**（或偶然现象）. 概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的一门数学学科.

1.1　随机事件及其运算

1.1.1　随机试验与样本空间

在这里，我们把各种试验作为一个含义广泛的术语，它包括各种各样的科学试

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

验，甚至对某一事物的某一特征的观察也认为是一种试验. 为了研究随机现象的统计规律性，我们需要进行各种试验. 下面举一些试验的例子：

E_1：抛一枚硬币，观察正、反面出现的情况；

E_2：掷一颗骰子，观察出现的点数；

E_3：记录某地区一年内出现山体滑坡的次数；

E_4：在一批灯泡中，任意抽取一只，测试它的寿命.

上面举出了四个试验的例子，它们有着共同的特点. 例如，试验 E_1 有两种可能结果，但在抛掷之前不能确定出现哪种结果，这个试验可以在相同的条件下重复地进行. 又如试验 E_4，在测试之前不能确定灯泡的寿命有多长，这一试验也可以在相同的条件下重复地进行.

如果一个试验同时满足下列条件：

(1) 试验可以在相同的条件下重复地进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，并且能够事先确定试验的所有可能结果；

(3) 每次试验总是恰好出现这些可能结果中的一个，但在一次试验之前却不能肯定这次试验会出现哪一个结果，

则称这个试验为**随机试验**，简称**试验**，用 E 来表示. 本书中以后提到的试验都是指随机试验. 我们是通过研究随机试验来研究随机现象的.

对于随机试验，尽管在每次试验之前不能预知试验的结果，但试验的所有可能结果组成的集合是已知的. 我们将随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的**样本空间**，用 Ω 来表示. 样本空间 Ω 中的每个元素，即试验 E 的每个结果，称为**样本点**，用 ω 来表示.

例 1.1.1 请写出下列 4 个随机试验的样本空间.

E_1：连续进行两次射击，观察命中的次数；

E_2：连续进行两次射击，观察每次射击是否命中，其中命中记为“1”、没有命中记为“0”；

E_3：一个盒子中有 8 个完全相同的球，分别标以号码 1, 2, …, 8，从中任取一球；

E_4：测量某地水温为 t ℃.

解 上面 4 个随机试验 E_1，E_2，E_3，E_4 的样本空间分别是

Ω_1：$\{0, 1, 2\}$；

Ω_2：$\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$；

Ω_3：$\{0, 1, 2, \cdots, 8\}$；

Ω_4：$\{t \mid 0 \leqslant t \leqslant 100\}$.

样本空间中的元素是由试验的目的所确定的. 例如,试验 E_1, E_2 都是射击 2 次,由于试验的目的不同,样本空间中的元素也不同. 样本空间可以只含有有限个样本点,也可能含有无穷多个点,如试验 E_4.

1.1.2　随机事件、事件间的关系与运算

在进行随机试验时,人们常常关心满足某种条件的那些样本点组成的集合. 如在例 1.1.1 的试验 E_3 中,我们可以研究

$$A = \{\text{球的标号为 } 5\};$$
$$B = \{\text{球的标号是奇数}\};$$
$$C = \{\text{球的标号} \leqslant 6\}.$$

这些结果是否发生? 其中集合 A 包含一个样本点,集合 B 与集合 C 包含多个样本点,这些包含一个或多个样本点组成的集合都是样本空间 Ω 的一个子集.

一般,我们称试验 E 的样本空间 Ω 的子集为 E 的**随机事件**,简称**事件**. 事件既可以看成样本空间的子集,也可以看成由样本点构成的集合. 一般地,用大写字母 A, B, C, …表示. 在一次试验中,当且仅当这一子集中的一个样本点出现时,称这一事件发生.

特别地,由一个样本点组成的单点集,称为**基本事件**. 如例 1.1.1 中的试验 E_1 有 3 个基本事件,分别是 $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$; 试验 E_2 有 4 个基本事件,分别是

$$\{(0,\ 0)\}, \{(0,\ 1)\}, \{(1,\ 0)\}, \{(1,\ 1)\}.$$

样本空间 Ω 包含所有的样本点,它是 Ω 自身的子集,在每次试验中它总是发生的,称为**必然事件**. 空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点,它也作为样本空间的子集,它在每次试验中都不发生,称为**不可能事件**.

从本质上说,事件就是一个集合,所以事件间的关系与运算自然按照集合论中集合间的关系与运算来处理. 下面给出这些关系和运算在概率论中的提法,并根据"事件发生"的含义,给出它们在概率论中的含义.

在以下的叙述中,设试验 E 的样本空间为 Ω, 而事件 A, B, $A_i (i = 1,\ 2,\ \cdots)$ 是 Ω 的子集.

(1) 若 $A \subset B$, 则称事件 B **包含**事件 A, 指的是事件 A 发生必然导致事件 B 发生.

(2) 若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 即 $A = B$, 则称事件 A 与事件 B **相等**. 显然,相等的两个事件 A, B 总是同时发生或同时不发生.

(3) 事件 $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**和事件**. 当且仅当 A, B 中至少有一个发生时,事件 $A \cup B$ 发生.

类似地,称 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和事件;称 $\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} A_i$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的和事件.

(4) 事件 $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**积事件**. 当且仅当 A, B 同时发生时,事件 $A \cap B$ 发生, $A \cap B$ 也简记为 AB.

类似地,称 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积事件;称 $\bigcap\limits_{i=1}^{+\infty} A_i$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 的积事件.

(5) 事件 $A - B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**差事件**. 当且仅当 A 发生, B 不发生时,事件 $A - B$ 发生.

(6) 若 $A \cap B = \varnothing$,则称事件 A 与事件 B 是**互不相容**的,或**互斥**的. 这指的是事件 A 与事件 B 不能同时发生. 显然,同一个试验中各个基本事件是两两互不相容的.

(7) 若 $A \cup B = \Omega$ 且 $A \cap B = \varnothing$,则称事件 A 与事件 B 互为**对立事件**. 这指的是每次试验中,事件 A, B 中必有一个发生,且仅有一个发生. A 的对立事件记为 $\overline{A}$,且 $\overline{A} = \Omega - A$.

我们可以用维恩(Venn)图来表示上述事件间的关系与运算,如图 1-1—图 1-6所示.

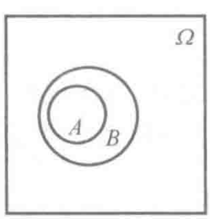

图 1-1　$A \subset B$

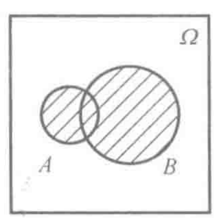

图 1-2　$A \cup B$

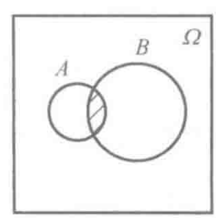

图 1-3　$A \cap B$

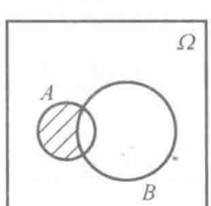

图 1-4　$A - B$

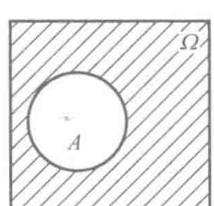

图 1-5　$\overline{A}$

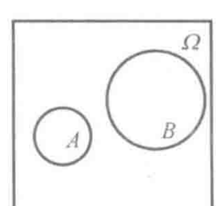

图 1-6　A 与 B 互不相容

在进行事件运算时，经常要用到下述定律. 设 $A, B, C, A_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 为事件，则有

(1) **交换律**　$A\cup B=B\cup A$，　$A\cap B=B\cap A$.

(2) **结合律**　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

(3) **分配律**　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

(4) **德·摩根(De Morgen)律**　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，　$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$，

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}.$$

关于事件之间的关系、运算与集合之间的关系及运算的类比，如表 1-1 所示.

表 1-1

符号	集合论	概率论
Ω	空间	样本空间或必然事件
$\varnothing$	空集	不可能事件
$\omega\in\Omega$	Ω 的点或元素	样本点
$\{\omega\}$	单点集	基本事件
$A\subset\Omega$	Ω 的子集	随机事件
$B\subset A$	A 包含 B	事件 A 包含事件 B
$A=B$	A 与 B 相等	事件 A 与事件 B 相等
$A\cap B$	A 与 B 的交	事件 A 与 B 的积或交事件
$A\cup B$	A 与 B 的并	事件 A 与 B 的和或并事件
$A-B$	A 与 B 之差	事件 A 与 B 的差事件
$\overline{A}$	A 的余集	事件 A 的逆事件
$A\cap B=\varnothing$	A 与 B 无公共元	事件 A 与 B 互不相容

例 1.1.2　从一批产品中每次取出一个产品进行检验(每次取出的产品不放回)，事件 $A_i(i=1, 2, 3)$ 表示第 i 次取到合格品. 试用 $A_i(i=1, 2, 3)$ 表示下列事件：

(1) 三次都取到合格产品；

(2) 三次中至少有一次取到合格产品；

(3) 三次中恰有两次取到合格产品；

(4) 三次中最多有一次取到合格产品.

解 (1) $A_1A_2A_3$；

(2) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$；

(3) $A_1A_2\overline{A}_3 \cup A_1\overline{A}_2A_3 \cup \overline{A}_1A_2A_3$；

(4) $\overline{A}_1\overline{A}_2 \cup \overline{A}_2\overline{A}_3 \cup \overline{A}_1\overline{A}_3$.

例 1.1.3 一名射手连续向某个目标射击三次，事件 $A_i(i=1, 2, 3)$ 表示第 i 次射击时击中目标. 试用文字叙述下列事件：

(1) $A_1 \cup A_2$；(2) $A_1 \cup A_2 \cup A_3$；(3) $\overline{A}_1A_2$；(4) $A_2 \cup \overline{A}_3$.

解 (1)前两次射击中至少有一次击中目标；

(2) 三次射击中至少有一次击中目标；

(3) 第一次射击未击中目标，第二次射击击中目标；

(4) 第二次射击击中目标或第三次射击未击中目标.

1.2 事件的概率

在一定条件下，随机事件的发生带有偶然性，它在一次试验中可能发生，也可能不发生. 但当我们多次做某一试验时，常常会察觉到某些事件发生的可能性要大些，而另一些事件发生的可能性要小一些. 为此，我们需要知道某些事件在一次试验中发生的可能性究竟有多大，以便揭示这些事件的内在规律性，更好地认识客观事物. 这就需要对随机事件发生的可能性进行定量计算. 下面先引入频率，它描述了事件发生的频繁程度，进而引出表征随机事件在一次试验中发生的可能性大小的数——概率.

1.2.1 概率的统计定义

定义 1.2.1 在相同的条件下，进行了 n 次试验，在这 n 次试验中，事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的**频数**. 比值 $\frac{n_A}{n}$ 称为事件 A 发生的**频率**，并记作 $f_n(A)$，即 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$.

由定义，频率具有如下性质：

(1) 对于任意事件 A，有 $0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$；

(2) 对于必然事件 Ω 和不可能事件 $\varnothing$，有 $f_n(\Omega)=1$，$f_n(\varnothing)=0$；

(3) 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 两两互不相容，则

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \cdots + f_n(A_k),$$

即两两互不相容事件的和事件的频率等于每个事件的频率的和.

由于事件 A 在 n 次试验中发生的频率是它发生的次数与试验的总次数之比，其大小表示事件 A 发生的频繁程度. 频率越大，事件 A 发生就越频繁，这也意味着事件 A 在一次试验中发生的可能性就越大. 反之亦然. 因而，直观的想法是用频率来表示事件 A 在一次试验中发生的可能性的大小. 但是否可行呢？我们先看下面的例子.

例 1.2.1 历史上曾有人做过大量的抛一枚质地均匀的硬币的试验. 设 n 表示抛硬币的次数，n_H 表示出现正面的次数，$f_n(H)$ 表示出现正面的频率，得到如表 1-2 所示的数据.

表 1-2 抛硬币试验数据表

试验者	试验次数 n	出现正面的次数 n_H	出现正面的频率 $f_n(H)$
德·摩根	2 048	1 061	0.518 1
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9
K·皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
K·皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

从表 1-2 中的数据可以看出，抛硬币的次数 n 较小时，出现正面的频率在 0 与 1 之间波动相对较大. 但随着 n 的增大，$f_n(H)$ 呈现出稳定性，即当 n 逐渐增大时，$f_n(H)$ 总在 0.5 附近徘徊，而逐渐稳定于 0.5.

例 1.2.2 考虑某种产品的合格率，从一大批该种产品中抽取 9 批产品做质量检验，其结果如表 1-3 所示.

表 1-3 产品合格率试验数据表

抽取产品数 n	5	10	70	150	310	600	900	1 800	3 000
合格产品数 n_A	5	7	60	131	282	548	820	1 631	2 715
合格率 $f_n(A)$	1	0.7	0.857	0.873	0.910	0.913	0.911	0.906	0.905

从表 1-3 中的数据可以看出，事件 A“产品合格”的频率 $f_n(A)$ 具有随机性，

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com