

“荣获国家教委优秀教材二等奖”



普通高等教育理学类“十三五”规划教材

工科线性代数

(第2版)

崔荣泉 杨泮池 王艳 赵彦晖 编

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

“荣获国家教委优秀教材二等奖”



普通高等教育理学类“十三五”规划教材

工科线性代数

(第2版)

崔荣泉 杨泮池 王 艳 赵彦晖 编



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

内容简介

线性代数是高等工科院校学生必修的数学基础课程. 本书系统介绍了线性代数课程的主要理论, 包括矩阵、行列式、线性方程组求解、二次型及线性代数问题的 MATLAB 实现. 本书第 1 版曾获国家教委优秀教材二等奖.

本书内容简明, 概念引入自然, 知识体系符合认知规律, 易于教师教和学生学; 在讲述线性代数方法时, 着力从学生现有知识入手, 有助于读者理解和掌握.

本书可作为高等工科院校各专业本科生线性代数课程的教材, 也可作为工程技术人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

工科线性代数/崔荣泉等编. —2 版. —西安: 西安交通大学出版社, 2017. 8
ISBN 978-7-5693-0014-7

I. ①工… II. ①崔… III. ①线性代数-高等学校-教材 IV. ①0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 203037 号

书 名	工科线性代数
编 者	崔荣泉 杨泮池 王 艳 赵彦晖
责任编辑	刘雅洁

出版发行	西安交通大学出版社 (西安市兴庆南路 10 号 邮政编码 710049)
网 址	http://www.xjtpress.com
电 话	(029)82668357 82667874(发行中心) (029)82668315(总编办)
传 真	(029)82668280
印 刷	陕西元盛印务有限公司

开 本	720mm×1000mm 1/16	印 张	10	字 数	187千字
版次印次	2017 年 8 月第 1 版 2017 年 8 月第 1 次印刷				
书 号	ISBN 978-7-5693-0014-7				
定 价	19.80 元				

读者购书、书店添货, 如发现印装质量问题, 请与本社发行中心联系、调换.

订购热线: (029)82665248 (029)82665249

投稿热线: (029)82665640

读者信箱: lg_book@163.com

版权所有 侵权必究

第 2 版前言

《工科线性代数》(第 1 版)荣获了国家教委优秀教材二等奖,也受到了读者的广泛肯定.为使内容更加适合信息化时代的要求,第 2 版在第 1 版的基础上作了如下增补修订:

(1)为了强化矩阵变换的主体思路,考虑到解决问题的连贯性,将第 1 版教材中第 2 章的消元法融入第 3 章,实现了由消元法到矩阵变换的升华;

(2)将第 3 章更名为“初等变换与矩阵的秩”,整章围绕矩阵的初等变换展开,强化了矩阵变换的思想,充实了求解矩阵方程和矩阵标准化的方法;

(3)在第 4 章加强了线性方程组求解的方法构架,给出了基础解系构造的直接方法,使方程求解变得非常简单、易于学生掌握,成为本教材的一大亮点;

(4)把矩阵变换作为学生应熟练掌握的强有力的工具贯穿全书始终,水到渠成的阐述了用合同变换化二次型为标准形的方法;

(5)与计算机手段结合,考虑到现代工程中主要采用软件 MATLAB 来处理矩阵问题,教材增加了利用 MATLAB 解决线性代数问题的内容.

此次再版是为了适应高等院校工科数学课程教学改革而进行的改进和尝试.由于编者水平有限,书中会有不少疏漏和不足,恳请读者批评指正.

最后,感谢对本书提出宝贵意见和建议的老师,感谢为再版工作付出辛勤劳动的同仁们!

编 者

2017 年 8 月

第 1 版前言

随着计算机技术的迅速发展,解大型的线性方程组、求矩阵的特征值与特征向量等已经成为工程技术人员及其他领域科学工作者经常遇到的课题.而线性代数正是阐述这些问题的有关理论和方法的一门课程,它已成为高等工科院校大学生的一门必修课.

本书是依据 1995 年国家教委高教司修订的《线性代数课程教学基本要求》,参照国内外有关教材,并结合我们多年教学体会写成的讲义基础上编写而成的.本书具有以下特点:(1)紧密结合工科院校的情况,重视理论联系实际;(2)突出矩阵方法,注重学生能力的培养;(3)提供在计算机上实现线性代数计算所必需的数值方法(这些内容都标有 * 号);(4)问题引入直观,叙述简明易懂,条理清楚,例题丰富,便于自学.

本书中配有一定数量的习题,其中有些是全国硕士研究生入学试题.通过这些习题,可以加深对各章内容的理解,并掌握一定的解题方法和技巧.

在此,我们感谢西安建筑科技大学潘鼎坤教授,他详细审阅了原稿并提出许多宝贵的建设性意见.同时感谢刘林教授,任学明教授和黄泽民副教授,黄长钧副教授.

由于我们水平有限,错误和不妥之处在所难免,敬请读者批评指正,不胜感激.

编 者

2006 年 6 月

目 录

第 1 章 矩阵代数基础	(1)
1.1 矩阵概念	(1)
1.2 矩阵基本运算	(3)
1.3 矩阵的转置及对称矩阵	(12)
1.4 矩阵的分块	(15)
* 1.5 矩阵的微分与积分	(19)
习题 1	(21)
第 2 章 行列式 克莱姆法则	(25)
2.1 行列式的定义及性质	(25)
2.2 行列式计算	(30)
2.3 克莱姆法则	(35)
习题 2	(39)
第 3 章 初等变换与矩阵的秩	(42)
3.1 初等行变换与矩阵的秩	(42)
3.2 初等变换与矩阵的标准形	(48)
3.3 矩阵初等变换的应用	(51)
* 3.4 初等行变换的算法实现	(55)
习题 3	(60)
第 4 章 向量空间与线性方程组求解	(64)
4.1 向量组的线性表示与向量组的秩	(64)
4.2 向量组的线性相关性	(67)
4.3 向量空间	(70)
4.4 齐次线性方程组求解	(74)
4.5 非齐次线性方程组求解	(80)
* 4.6 解线性方程组的迭代法	(85)
习题 4	(91)

第 5 章 特征值 特征向量 二次型	(95)
5.1 正交向量组与正交矩阵	(95)
5.2 方阵的特征值和特征向量	(100)
5.3 相似变换与实对称矩阵的对角化	(107)
5.4 二次型及其标准形	(114)
* 5.5 二次型应用	(122)
习题 5	(124)
* 第 6 章 线性代数问题的 MATLAB 实现	(128)
6.1 矩阵代数运算的基本命令	(128)
6.2 矩阵的初等变换	(133)
6.3 向量组的线性相关性	(134)
6.4 解线性方程组	(136)
6.5 求特征值特征向量 化二次型为标准形	(140)
习题 6	(143)
习题答案	(145)

第 1 章 矩阵代数基础

矩阵是线性代数的主要研究对象,也是现代科学技术中不可缺少的工具,特别是电子计算机出现之后,矩阵方法得到了更广泛的应用.本章介绍矩阵的有关概念和矩阵代数基础.

1.1 矩阵概念

工程技术中的许多问题都归结为求解线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1.1)$$

其中 x_i 为未知量,系数 a_{ij} 和右端 b_i 都是常数.研究这类方程组何时无解,何时有解,以及有解时解的构造和求解的方法等构成了线性代数的重要内容.

方程组(1.1)的解取决于系数 a_{ij} 和右端的常数,若将方程组(1.1)左端的系数按其相对位置排成数表,并且括起来成为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1.2)$$

把它看作一个整体,这个矩形数表就是我们要研究的矩阵.

看一个关于矩阵的实例.

图 1.1 表示 A 国的两个机场 A_1 、 A_2 与 B 国的三个机场 B_1 、 B_2 、 B_3 间的通航关系.图中的连线表示两机场间通航,连线上的数字表示航班数目.图 1.1 表示的关系可用如下矩阵表示

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} B_1 & B_2 & B_3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 0 & 8 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (1.3)$$

这个矩阵表达了 A 国与 B 国间的通航关系.

现在给出矩阵的一般定义.

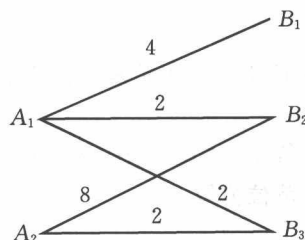


图 1.1 A 国与 B 国间航空网络图

定义 1.1 由 $m \times n$ 个元素 a_{ij} ($i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n$) 排成矩形元素表 (1.2), 称这个元素表为 $m \times n$ 维矩阵^①. 矩阵中横的各排叫做矩阵的行, 纵的各列叫做矩阵的列, a_{ij} 叫做矩阵第 i 行第 j 列的元素.

矩阵的元素可以是数, 也可以是函数, 等等.

通常以大写字母 $A, B, \dots$ 等表示矩阵, 矩阵 (1.2) 可以简记为 $A = (a_{ij})_{m \times n}$, 或 $A = (a_{ij})$.

当 $m=n$ 即行数等于列数时, 矩阵 A 称为 n 阶方阵. 方阵的左上角到右下角的直线称为主对角线, 主对角线上的元素 a_{ii} 叫做主对角元素. 对 $m \times m$ ($m \neq n$) 矩阵, 主对角元素仍指位于 i 行 i 列的元素 a_{ii} ($i=1, 2, 3, \dots, \min\{m, n\}$).

只有一列的矩阵 $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ 叫做 m 维列矩阵或列向量, 列向量常以小写字母 a, b 或

α, β 等表示. 类似地称只有一行的矩阵 $(b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n)$ 为 n 维行矩阵或行向量, 它也常以小写字母表示. 向量中的元素称为坐标或分量. 行向量元素间可用逗号分开, 以避免混淆, 如 $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$. 事实上向量可看作特殊形式的矩阵, 反过来也可以认为 $m \times n$ 维矩阵是由 n 个 m 维列向量组成, 或是由 m 个 n 维行向量组成.

称元素全为实数的矩阵为实矩阵, 称元素中有复数的矩阵为复矩阵. 特别地称元素全为零的矩阵为零矩阵, 记为 O .

今后还常常用到如下一些特殊方阵:

对角方阵

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{mm} \end{pmatrix}$$

这是主对角线外元素全为零的方阵, 简记为

$$D = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{mm})$$

若 $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{mm}$, 则这种对角矩阵称为数量矩阵.

单位方阵

$$I = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

^① 矩阵(Matrix)这个词是英国数学家詹姆士·西尔威斯特(J. Sylvester, 1814—1894)在 1850 年首先使用的, 而矩阵记号则是英国数学家凯莱(Cayley)于 1855 年引进的.

这是主对角元素全为 1 的对角方阵, 简记为 I (也常记为 E).

上三角矩阵 U 和下三角矩阵 L

$$U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

上三角矩阵 U 是主对角线以下元素全为零的方阵, 下三角矩阵 L 是主对角线以上元素全为零的方阵.

1.2 矩阵基本运算

若矩阵 A 和 B 具有相同的行数与相同的列数, 则称 A 与 B 为同型矩阵或同维矩阵. 当同型矩阵 $A = (a_{ij})$ 与 $B = (b_{ij})$ 的所有对应元素相等, 即 $a_{ij} = b_{ij}$ 时, 称两矩阵相等, 记为 $A = B$.

1.2.1 线性运算

1. 矩阵加法

同型矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times n}$ 与 $B = (b_{ij})_{m \times n}$ 的和 $A + B$ 规定为

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

简记为 $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$.

矩阵加法满足以下运算律:

- (1) 交换律 $A + B = B + A$,
- (2) 结合律 $(A + B) + C = A + (B + C)$

2. 矩阵数乘

常数 k 与矩阵 A 的乘积 kA (或 Ak) 规定为

$$kA = Ak = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

简记为 $kA = (ka_{ij})$.

A 的负矩阵 (或反矩阵) 记为 $-A$, 规定 $-A = (-1)A = (-a_{ij})$. 由此可规定同型矩阵 $A = (a_{ij})$ 与 $B = (b_{ij})$ 的减法为

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) = (a_{ij} - b_{ij})$$

数与矩阵相乘满足以下运算律(其中 k, l 为常数):

$$(1) (kl)\mathbf{A} = k(l\mathbf{A});$$

$$(2) (k+l)\mathbf{A} = k\mathbf{A} + l\mathbf{A};$$

$$(3) k(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = k\mathbf{A} + k\mathbf{B}.$$

例 1.1 设

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) 求 $3\mathbf{A} + 5\mathbf{B}$;

(2) 解矩阵方程 $\mathbf{A} + \mathbf{X} = -\mathbf{B}$.

解

$$\begin{aligned} (1) 3\mathbf{A} + 5\mathbf{B} &= 3 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 5 & -5 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(2) 由于 $\mathbf{A} + \mathbf{X} = -\mathbf{B}$, 所以

$$\begin{aligned} \mathbf{X} = -\mathbf{B} - \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

1.2.2 矩阵的乘法和方阵的幂

1. 矩阵乘法

引例 1.1 图 1.2 为 A 国经过 B 国到 C 国的航空网络图. 由图可得 A 国与 B 国的航班矩阵 $\mathbf{A}$, B 国与 C 国的航班矩阵 $\mathbf{B}$ 分别为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ 2 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{matrix}$$

试求由 A 国经 B 国到 C 国的航班矩阵 $\mathbf{C}$.

先求由 A_1 到 C_1 的航班数:由 A_1 经 B_1 到 C_1 的航班有 4×2 个;由 A_1 经 B_2 到 C_1 的航班有 2×2 个;由 A_1 经 B_3 到 C_1 的航班有 6×0 个;因此由 A_1 到达 C_1 的航班总数为

$$4 \times 2 + 2 \times 2 + 6 \times 0 (\text{个})$$

同样可算出 A_1 到达 C_2 的航班总数为

$$4 \times 2 + 2 \times 0 + 6 \times 8 (\text{个})$$

由 A_2 到达 C_1 和 C_2 的航班总数的计算与上述算法相同. 总起来, 航班矩阵 C 为

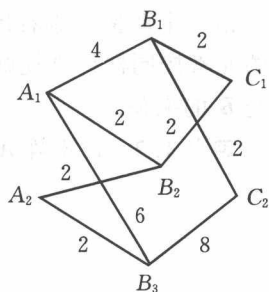


图 1.2 A 国经 B 国到 C 国的航空网络图

$$\begin{aligned} C &= \begin{bmatrix} 4 \times 2 + 2 \times 2 + 6 \times 0 & 4 \times 2 + 2 \times 0 + 6 \times 8 \\ 0 \times 2 + 2 \times 2 + 2 \times 0 & 0 \times 2 + 2 \times 0 + 2 \times 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \\ &= \begin{bmatrix} 12 & 56 \\ 4 & 16 \end{bmatrix} \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \end{matrix} \end{aligned}$$

引例 1.2 设变量 y 能用变量 x 线性地表示为

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{cases} \quad (1.4)$$

变量 x 能用变量 z 线性地表示为

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}z_1 + b_{12}z_2 \\ x_2 = b_{21}z_1 + b_{22}z_2 \\ x_3 = b_{31}z_1 + b_{32}z_2 \end{cases} \quad (1.5)$$

其中系数 a_{ij} 和 b_{ij} 都是常数.

式(1.4)所表示的变量 x 到变量 y 的变换称为**线性变换**, 同样式(1.5)表示了变量 z 到变量 x 的线性变换.

将式(1.5)代入式(1.4)得到变量 z 到变量 y 的线性变换

$$\begin{cases} y_1 = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31})z_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32})z_2 \\ y_2 = (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31})z_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32})z_2 \end{cases} \quad (1.6)$$

若设式(1.4), 式(1.5)的系数矩阵分别为 A 和 B , 即

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

设式(1.6)的系数矩阵为 C , 则有

$$C = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{bmatrix}$$

由以上两例不难看出它们的共同点是,两例中矩阵 C 的元素都是由矩阵 A 和 B 的元素按同样计算规则得到.我们把按这种计算规则得到的矩阵 C ,规定为矩阵 A 与 B 的乘积.

定义 1.2 设矩阵 $A = (a_{ij})_{m \times s}$, $B = (b_{ij})_{s \times n}$, 如果矩阵 $C = (c_{ij})$ 的元素规定为

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{is}b_{sj} = \sum_{k=1}^s a_{ik}b_{kj} \quad (1.7)$$

$$(i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$$

则称矩阵 C 为矩阵 A 与 B 的乘积,记为 $C = AB$.

注意:只有在矩阵 A 的列数与矩阵 B 的行数相同时,乘积 AB 才有意义,这时称 A 与 B 为可乘矩阵,乘积 $AB = C$ 的维数关系是

$$(a_{ij})_{m \times s} (b_{ij})_{s \times n} = (c_{ij})_{m \times n}$$

根据定义 1.2,引例 1.1 中航班矩阵 C 即为矩阵 A 与 B 的乘积

$$C = AB = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 56 \\ 4 & 16 \end{bmatrix}$$

引例 1.2 中连续两次线性变换的计算可用矩阵乘法表示为

$$C = AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{bmatrix}$$

由矩阵乘法规则可线性方程组(1.1)表示为

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

若以 A 表示系数矩阵, x 表示未知数列向量, b 表示常数列向量,那么线性方程组(1.1)或式(1.8)可简记为

$$Ax = b \quad (1.9)$$

这是线性方程组(1.1)的矩阵形式,这种简捷的表示为以后的讨论带来许多方便.

矩阵乘法可以用来表示像连续的两次飞行、连续的两次线性变换这类问题,使得矩阵在工程技术中得到了广泛的应用.

例 1.2 (1)将微分方程组

$$\frac{dx}{dt} = y + z, \quad \frac{dy}{dt} = z + x, \quad \frac{dz}{dt} = x + y$$

写成矩阵形式;

(2) 求出下式中待定的 a_{11}, a_{21}, a_{22}

$$x^2 + 2xy - 2y^2 = (x, y) \begin{pmatrix} a_{11} & 1 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

解 (1) 由

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + z \\ \frac{dy}{dt} = x + z \\ \frac{dz}{dt} = x + y \end{cases}$$

得

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} (2) x^2 + 2xy - 2y^2 &= (x, y) \begin{pmatrix} a_{11} & 1 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= (a_{11}x + a_{21}y, x + a_{22}y) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= a_{11}x^2 + (a_{21} + 1)xy + a_{22}y^2 \end{aligned}$$

比较两端的系数, 得

$$a_{11} = 1, \quad a_{21} = 1, \quad a_{22} = -2$$

例 1.3 下面各题中矩阵 A, B 是否可作运算 $A+B, AB$ 与 BA , 对可作的运算求出结果:

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$(2) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$(3) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

解 (1) 由 A, B 都为 2 阶方阵知, 可作运算 $A+B, AB$ 与 BA

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(2) 仅可作运算 $\mathbf{A} + \mathbf{B}$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

(3) 仅可作运算 $\mathbf{AB}$

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ 1 & -2 \\ 9 & 22 \end{pmatrix}$$

由例 1.3(1) 看出 $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$, 即矩阵乘法不像数的乘法那样一定满足交换律. 因此在谈到 $\mathbf{A}$ 乘 $\mathbf{B}$ 时, 必须指明 $\mathbf{A}$ 左乘 $\mathbf{B}$ 还是右乘 $\mathbf{B}$. 若矩阵 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 满足 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$, 则称它们是关于乘法可换的. 由矩阵乘法规则知可换矩阵都是方阵. 单位方阵 $\mathbf{I}$ 与任何同阶的方阵 $\mathbf{A}$ 关于乘法都可换, 并且 $\mathbf{IA} = \mathbf{AI} = \mathbf{A}$.

由例 1.3(1) 还看出, 虽然 $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$ 且 $\mathbf{B} \neq \mathbf{O}$, 却有 $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$. 换句话说, $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$, 未必一定有 $\mathbf{A} = \mathbf{O}$ 或 $\mathbf{B} = \mathbf{O}$.

以上两点是矩阵乘法与数的乘法不同之处.

矩阵的乘法运算满足下列运算律:

(1) 结合律 $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$

(2) 分配律 $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$

$(\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{BA} + \mathbf{CA}$

2. 方阵的幂

根据矩阵的乘法可以定义方阵的幂为

$$\mathbf{A}^1 = \mathbf{A}, \mathbf{A}^2 = \mathbf{AA}, \dots, \mathbf{A}^{k+1} = \mathbf{A}^k \mathbf{A} \quad (k \text{ 为正整数})$$

由此可以推出

$$\mathbf{A}^k \mathbf{A}^l = \mathbf{A}^{k+l}, (\mathbf{A}^k)^l = \mathbf{A}^{kl} \quad (k, l \text{ 为正整数})$$

注意, 一般地 $(\mathbf{AB})^k \neq \mathbf{A}^k \mathbf{B}^k$, 例如对

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

有

$$(\mathbf{AB})^2 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^2 \mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},$$

可见

$$(\mathbf{AB})^2 \neq \mathbf{A}^2 \mathbf{B}^2$$

例 1.4 求证

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$$

证 应用数学归纳法. $n=1$ 时等式显然成立, 设 $n=k$ 时等式也成立, 即

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix}$$

那么

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^{k+1} &= \begin{pmatrix} \cos k\theta & -\sin k\theta \\ \sin k\theta & \cos k\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos k\theta \cos\theta - \sin k\theta \sin\theta & -\cos k\theta \sin\theta - \sin k\theta \cos\theta \\ \sin k\theta \cos\theta + \cos k\theta \sin\theta & -\sin k\theta \sin\theta + \cos k\theta \cos\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(k+1)\theta & -\sin(k+1)\theta \\ \sin(k+1)\theta & \cos(k+1)\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

根据数学归纳法原理, 原式得证.

本题结果与几何学中坐标轴旋转变换的结论一致, 在几何学中只考虑坐标轴按逆时针旋转 θ 角, 其转轴公式为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

本例结果表明连续旋转 n 次 θ 角与一次旋转 $n\theta$ 角的变换一致.

1.2.3 逆矩阵

规定了矩阵的加法、减法和乘法之后, 自然想到矩阵间有没有除法? 回到数的除法, 我们知道当 $a \neq 0$ 时, $b \div a = b \cdot 1/a = b \cdot a^{-1}$, 这是把 b 除以 a 化为 b 与 a 的逆元素 a^{-1} 的乘法. 所谓 a 的逆元素 a^{-1} 是指满足 $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ 的元素. 对于矩阵的“除法”可类似地处理, 这就是用一个矩阵与另一个矩阵的逆矩阵相乘来代替两矩阵相“除”, 因此可以像数的逆元素那样引出逆矩阵的概念.

定义 1.3 对于 n 阶方阵 A , 如果存在 n 阶方阵 B 使

$$AB = BA = I$$

则称 B 为 A 的逆矩阵, 并说 A 是可逆的.

由定义知 A 也是 B 的逆矩阵, 即 A 与 B 互为逆矩阵. 若 A 可逆, 可以证明其逆矩阵唯一(见习题 1.14(1)), 记 A 的逆矩阵为 A^{-1} , 据定义 $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

对于线性方程组 $Ax = b$, 若 A 是可逆方阵, 并能求出 A^{-1} , 那么对 $Ax = b$ 左乘 A^{-1} , 得 $A^{-1}Ax = A^{-1}b$, 即

$$x = A^{-1}b$$

这就是线性方程组 $Ax = b$ 的解.

若 A 可逆, 显然有性质:

$$(1) (A^{-1})^{-1} = A$$

$$(2)(kA)^{-1} = \frac{1}{k} \cdot A^{-1} (k \neq 0)$$

(3)若 A, B 皆为可逆矩阵,并且 A, B 同阶,则 AB 可逆,并且

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

事实上

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = I$$

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I$$

根据逆矩阵定义

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

一般地,有

$$(A_1A_2\cdots A_n)^{-1} = A_n^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$$

对于可逆方阵 A 规定

$$A^0 = I, \quad A^{-k} = (A^{-1})^k \quad (k \text{ 为正整数})$$

由此

$$A^kA^l = A^{k+l}, \quad (A^k)^l = A^{kl} \quad (k, l \text{ 为整数})$$

例 1.5 验证

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

互为逆矩阵.

$$\text{解 由 } AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

知 A, B 互为逆矩阵.

注:事实上,判定矩阵 A 与 B 互逆时,只需验证 $AB=I$ 或 $BA=I$ 之一成立即可,第 2 章例 2.10 给出这个结论的证明.

例 1.6 设方阵 A 与 B 满足 $A+B=AB$,试证 $A-I$ 可逆.

证 由 $A+B=AB$,有 $AB-A=B$,即 $A(B-I)=B$,于是

$$A(B-I) - I = B - I$$

从而

$$(A-I)(B-I) = I$$

即 $A-I$ 可逆,且 $(A-I)^{-1}=B-I$.

例 1.7 求解方程组 $Ax=b$,其中