文都教育®

2019

考研数学

全国硕士研究生招生考试

高等数学辅导讲义

Mathematics

文都考研数学命题研究组　策划

汤家凤　编著

◎ 紧扣考试大纲　◎ 把握命题规律

◎ 归纳解题技巧　◎ 总结考试难点

Mathematics

中国原子能出版社

文都教育®

2019
考研数学

全国硕士研究生招生考试
高等数学辅导讲义

文都考研数学命题研究组　策划
汤家凤　编著

中国原子能出版社

图书在版编目(CIP)数据

全国硕士研究生招生考试高等数学辅导讲义/汤家凤编著. —北京：中国原子能出版社，2017.11(2018.1重印)

ISBN 978-7-5022-8668-2

Ⅰ. ①全… Ⅱ. ①汤… Ⅲ. ①高等数学—硕士生入学考试—自学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第283044号

全国硕士研究生招生考试高等数学辅导讲义

出版发行 中国原子能出版社(北京市海淀区阜成路43号 100048)
责任编辑 张 梅
特约编辑 邱晓春 李 焕
印 刷 北京铭传印刷有限公司
经 销 全国新华书店
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 16 字 数 400千字
版 次 2017年11月第1版 2018年1月第2次印刷
书 号 ISBN 978-7-5022-8668-2 定 价 38.00元

网址：http://www.aep.com.cn E-mail：atomep123@126.com
发行电话：010-68452845

郑重声明

买正版图书　听精品课程

文都考研数学独家师资汤家凤老师主编的《全国硕士研究生招生考试高等数学辅导讲义》《全国硕士研究生招生考试线性代数辅导讲义》等系列图书因其独特的编写切入点以及对学科命题特点的独到把握而深受广大考生欢迎。

但当前某些机构和个人非法盗印汤家凤老师的图书，这类图书印制质量差，错误百出，不仅使考生蒙受金钱与精力的损失，而且误导考生，甚至毁掉考生的研究生考试前程。

为了保障考生、作者及出版社等多方的利益，文都教育特发如下郑重声明：

1. 对制作、销售盗版图书的网店、个人，一经发现，文都教育将严厉追究其法律责任；

2. 凡文都图书代理商、合作单位参与制作、销售盗版图书的，立即取消其代理、合作资格，并依法追究其法律和相关经济责任；

3. 对为打击盗版图书提供重要线索、证据者，文都图书事业部将给予奖励；若举报者为参加考研的考生，文都图书事业部将免费提供考研图书资料和考前预测试卷。

全国各地举报电话：010-88820419，13488713672

电子邮箱：tousu@wendu.com

为方便考生使用考研数学系列正版图书，特提供网上增值服务，考生登录文都教育在线（www.wendu.com）可听取汤家凤老师的精品课程。

中国原子能出版社

世纪文都教育科技集团股份有限公司

授权律师：北京市安诺律师事务所

刘　岩

2018 年 1 月

前言 Preface

数学是全国硕士研究生招生考试工程类和经济类考生必考的一门课程，且数学课程分值为150分，与专业课的分值相同，数学考试的成败直接关系到整个考试的成败，而高等数学是数学试卷中分值最大的一门课程，其中高等数学在数学一、数学三试卷中的分值为82分，占总分的56%，在数学二试卷中的分值为116分，占总分的78%，所以高等数学的复习是整个考研数学复习的重中之重。

高等数学所涉及的内容非常多，知识体系系统性非常强，题型多，方法技巧性高，很多同学虽然在复习高等数学上花费了大量的时间，但收效甚微，甚至对数学产生惧怕心理。高等数学的复习要有正确的方法，抓好复习的几个关键环节，系统全面掌握高等数学的理论体系和方法体系，善于归纳和总结，通过努力可以很好地掌握这门课程。本书是根据作者二十来年考研数学辅导的心得和教案精心总结而成的，使理论更加系统化、通俗化，便于掌握和记忆，对题型和方法进行了全面总结和概括。认真阅读此书，可使考生分析问题、解决问题的能力得到大幅度提高，尽快进入最佳学习状态，达到事半功倍的复习效果。

本书的特点有：

1. 每章给出考查要求，便于大家了解各个知识点的考查范围和要求达到的程度。

2. 对每章的基本理论都给出了系统的归纳和总结，理论部分包括基本概念、基本原理、基本公式，同时配备基础题，以加强对所学知识和原理的理解，对重要的原理给出了新的理论证明，对需要重点掌握的知识点给出了延伸解读。

3. 重点题型讲解部分给出每个部分的基本题型和综合题型，通过重点题型的掌握使大家对考查的重点和形式有非常深入的了解，更加适应考试要求，尤其重要的是，重点题型部分给出了很多带新视角的新题型，很多新的题型在过去的考试过程中也被证明是命题者思考的方向。

本书适用于数学一、数学二、数学三，并对不同数学种类考试内容不同的部分给出了说明。

本书作者在若干年教学过程中，借鉴和参考了若干国内外的优秀著作，得到很多的收获和启发，在此作者对这些书的作者表示衷心感谢！

由于作者的水平有限，教学过程中及本书中仍然有很多地方需要改进和提高，恳请读者和广大同仁提出宝贵的批评和建议。

汤家凤

2018年1月于南京

目录 Contents

第一章　极限与连续

考查要求

1. 会求函数的复合函数.
2. 掌握函数的有界性、单调性、奇偶性和周期性等初等特性.
3. 理解数列及函数极限的概念.
4. 熟练掌握无穷小及等价无穷小的概念与性质.
5. 了解极限的基本性质、运算性质,掌握极限的存在性质及重要极限.
6. 熟悉各种不定型极限的计算.
7. 了解连续与间断的概念,掌握函数间断点的判断与分类.
8. 熟练掌握闭区间上连续函数的性质.

第一节　函　数

一、基本概念

1. 函数——设变量 x 的取值范围为 D,若对任意的 $x \in D$,按照某种对应关系总有唯一确定的值 y 与 x 对应,称 y 为 x 的函数,记为 $y=f(x)$,其中 D 称为函数 $y=f(x)$ 的定义域.

2. 复合函数——设 $u=\varphi(x)(x \in D_1)$,$y=f(u)(u \in D_2)$,且对任意的 $x \in D_1$ 有 $\varphi(x) \in D_2$,称 y 为 x 的复合函数,记为 $y=f[\varphi(x)]$.

3. 反函数——设 $y=f(x)(x \in D)$ 为单调函数,其值域为 $\mathbf{R}$,对任意的 $y \in \mathbf{R}$,有唯一确定的 $x \in D$ 与之对应,称 x 为 y 的反函数,记为 $x=f^{-1}(y)$.

4. 基本初等函数——称 $\begin{cases} x^a, \\ a^x(a>0,a\neq 1), \\ \log_a x(a>0,a\neq 1), \\ \sin x,\cos x,\tan x,\cot x,\sec x,\csc x, \\ \arcsin x,\arccos x,\arctan x,\operatorname{arccot} x \end{cases}$ 为基本初等函数.

5. 初等函数——由常数及基本初等函数经过有限次的四则运算和复合运算而成的式子称为初等函数.

二、函数的初等特性

1. 有界性——设 $y=f(x)(x \in D)$,若存在 $M>0$,对任意的 $x \in D$,总有 $|f(x)| \leqslant M$,称函数 $f(x)$ 在 D 上有界.

【注解】

若 $f(x)\geqslant M_1$，称 $f(x)$ 有下界；若 $f(x)\leqslant M_2$，称 $f(x)$ 有上界.

$f(x)$ 有界的充分必要条件是 $f(x)$ 既有上界又有下界.

2. 单调性——设 $y=f(x)(x\in D)$，若对任意的 $x_1,x_2\in D$ 且 $x_1<x_2$，总有 $f(x_1)<f(x_2)$，称 $y=f(x)$ 在 D 上单调增加；若对任意的 $x_1,x_2\in D$ 且 $x_1<x_2$，总有 $f(x_1)>f(x_2)$，称 $y=f(x)$ 在 D 上单调减少.

3. 奇偶性——设 $y=f(x)(x\in D)$，其中 D 关于原点对称，若 $f(-x)=-f(x)$，称 $y=f(x)$ 在 D 上为奇函数；若 $f(-x)=f(x)$，称 $y=f(x)$ 在 D 上为偶函数.

【例 1】 设函数 $y=f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，

(1) 判断函数的奇偶性；

(2) 求函数的反函数.

【解】 (1) 显然 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，由

$$f(-x)=\ln(-x+\sqrt{1+x^2})=\ln\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x),$$

得函数 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 为奇函数.

(2) 由 $\begin{cases}y=\ln(x+\sqrt{1+x^2}),\\-y=\ln(-x+\sqrt{1+x^2}),\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x+\sqrt{1+x^2}=e^y,\\-x+\sqrt{1+x^2}=e^{-y},\end{cases}$ 两式相减得 $x=\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}$，

故函数 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的反函数为 $x=\dfrac{e^y-e^{-y}}{2}$.

【例 2】 设 $f(x)=e^{\sin x}-e^{-\sin x}$，判断其奇偶性.

【解】 显然 $x\in(-\infty,+\infty)$，且

$f(-x)=e^{\sin(-x)}-e^{-\sin(-x)}=e^{-\sin x}-e^{\sin x}=-f(x)$，故 $f(x)$ 为奇函数.

【例 3】 设 $f(x)$ 为连续的奇函数，判断 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 的奇偶性.

【解】 由 $f(-x)=-f(x)$ 得

$$F(-x)=\int_a^{-x}f(t)dt\overset{t=-u}{=}\int_{-a}^{x}f(-u)(-du)=\int_{-a}^{x}f(u)du$$

$$=\int_{-a}^{a}f(u)du+\int_a^x f(u)du=\int_a^x f(u)du=F(x).$$

则 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 为偶函数.

4. 周期性——设 $y=f(x)(x\in D)$，若存在 $T>0$，对任意的 $x\in D$，$x+T\in D$，有 $f(x+T)=f(x)$，称 $y=f(x)$ 为周期函数，T 称为 $y=f(x)$ 的周期.

三、特殊函数

1. 符号函数——称 $\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0\\0, & x=0\\1, & x>0\end{cases}$ 为符号函数，显然 $|x|=x\operatorname{sgn}x$.

2. 狄利克雷函数——称 $D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q}\\0, & x\in\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}\end{cases}$ 为狄利克雷函数.

3. 取整函数——称 $y=[x]$ 为取整函数，其函数值为 x 左侧最大的整数值，若 x 为整数，则函数值即为 x，如：$[-\sqrt{2}]=-2,[\sqrt{5}]=2,[3]=3$.

【注解】

(1)$[x] \leqslant x$.

(2)$[x+y] \neq [x]+[y]$,但$[x+m]=[x]+m$,其中 m 为整数.

第二节 极限

一、基本概念

1. 极限的定义

情形	定义
数列极限的定义($\varepsilon - N$)	若对任意的 $\varepsilon > 0$,存在 $N > 0$,当 $n > N$ 时,有 $\lvert a_n - A \rvert < \varepsilon$,称 A 为数列 $\{a_n\}$ 的极限,记为 $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = A$.
函数当自变量趋于有限值的定义($\varepsilon - \delta$)	若对任意的 $\varepsilon > 0$,存在 $\delta > 0$,当 $0 < \lvert x - a \rvert < \delta$ 时,有 $\lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$,称 A 为 $f(x)$ 当 $x \to a$ 时的极限,记为 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.
函数当自变量趋于无穷大的极限($\varepsilon - X$)	若对任意的 $\varepsilon > 0$,存在 $X > 0$,当 $x > X$ 时,有 $\lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$,称 A 为 $f(x)$ 当 $x \to +\infty$ 的极限,记为 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$.
	若对任意的 $\varepsilon > 0$,存在 $X > 0$,当 $x < -X$ 时,有 $\lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$,称 A 为 $f(x)$ 当 $x \to -\infty$ 的极限,记为 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$.
	若对任意的 $\varepsilon > 0$,存在 $X > 0$,当 $\lvert x \rvert > X$ 时,有 $\lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$,称 A 为 $f(x)$ 当 $x \to \infty$ 的极限,记为 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$.

【注解】

(1)$x \to a$ 包含$\begin{cases} x \neq a, \\ x \to a^-, x \to a^+. \end{cases}$

(2) $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ 与 $f(x)$ 在 $x=a$ 处有无定义无关,如:$f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 在 $x=1$ 处无定义,但$\lim\limits_{x \to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$,即函数在一点处的极限与函数在该点处有无定义无关.

(3) 若对任意的 $\varepsilon > 0$,存在 $\delta > 0$,当 $x \in (a-\delta, a)$ 时,有 $\lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$,称 A 为 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的左极限,记为 $f(a-0)$;

若对任意的 $\varepsilon > 0$,存在 $\delta > 0$,当 $x \in (a, a+\delta)$ 时,有 $\lvert f(x) - B \rvert < \varepsilon$,称 B 为 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的右极限,记为 $f(a+0)$.

注意:$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ 存在的充分必要条件是 $f(a-0)$ 及 $f(a+0)$ 都存在且相等.

(4) 以下情形一般需要考虑函数的左右极限:

情形一:分段函数在分界点处的极限.

【例 1】 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x)}{x}, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ \dfrac{e^{2x}-1-\sin x}{\arctan x}, & x<0,\end{cases}$ 求$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

【解】 由$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$,得 $f(0+0)=1$;

由$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{2x}-1-\sin x}{\arctan x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{2x}-1}{\arctan x}-\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{\arctan x}$

$=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{2x}-1}{x}-\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{x}=2-1=1$,得 $f(0-0)=1$,

因为 $f(0-0)=f(0+0)=1$,所以$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$.

【例 2】 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|+2x}{\sin x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 求$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.

【解】 由$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|+2x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x+2x}{x}=3$ 得 $f(0+0)=3$;

由$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|+2x}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x+2x}{x}=1$ 得 $f(0-0)=1$,

因为 $f(0+0)\neq f(0-0)$,所以$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在.

情形二:若 $f(x)$ 中含 $a^{\frac{\varphi(x)}{x-b}}$ 或 $a^{\frac{\varphi(x)}{b-x}}$,求$\lim\limits_{x\to b}f(x)$一定要分别研究左、右极限.

【例 3】 设 $f(x)=e^{\frac{x}{x-2}}$,研究$\lim\limits_{x\to 2}f(x)$.

【解】 当 $x\to 2^-$ 时,$\dfrac{x}{x-2}\to-\infty$,则 $f(2-0)=0$;

当 $x\to 2^+$ 时,$\dfrac{x}{x-2}\to+\infty$,则 $f(2+0)=+\infty$,

因为 $f(2-0)\neq f(2+0)$,所以$\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ 不存在.

【例 4】 设 $f(x)=\dfrac{1-2^{\frac{1}{x-1}}}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$,研究$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$.

【解】 当 $x\to 1^-$ 时,$\dfrac{1}{x-1}\to-\infty$,则 $f(1-0)=1$;

当 $x\to 1^+$ 时,$\dfrac{1}{x-1}\to+\infty$,则 $f(1+0)=-1$,

因为 $f(1-0)\neq f(1+0)$,所以$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ 不存在.

【例 5】 讨论$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2-e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}-[x]\right)$.

【解】 由$\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\dfrac{2-e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}-[x]\right)=2-1-(-1)=2$,

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2-e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}-[x]\right)=0+1-0=1$$

得$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2-e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}-[x]\right)$不存在.

2. 无穷小

(1) 无穷小的定义 —— 若$\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$,称$\alpha(x)$当$x\to a$时为无穷小.

(2) 无穷小的比较

设$\alpha\to0,\beta\to0$,则

若$\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$,称$\beta$为$\alpha$的高阶无穷小,记为$\beta=o(\alpha)$;

若$\lim\frac{\beta}{\alpha}=k(k\neq0,\infty)$,称$\beta$为$\alpha$的同阶无穷小,记为$\beta=O(\alpha)$,

特别地,若$\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$,称$\beta$为$\alpha$的等价无穷小,记为$\alpha\sim\beta$.

二、极限性质

(一) 极限的一般性质

1. (唯一性) 极限存在必唯一.

2. (保号性)

(1) 设$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A>0(<0)$,则存在$\delta>0$,当$0<|x-a|<\delta$时,$f(x)>0(<0)$.

(2) 设$f(x)\geqslant0(\leqslant0)$,且$\lim f(x)=A$,则$A\geqslant0(\leqslant0)$.

(3) $f(x)\geqslant g(x)$,且$\lim f(x)=A,\lim g(x)=B$,则$A\geqslant B$.

【注解】

(1) 极限第一保号性口诀"函数极限正,则去心邻域正;函数极限负,则去心邻域负".

(2) 极限第二保号性口诀"函数不负,极限不负;函数不正,极限不正".

(3) 极限第三保号性"函数的大小次序与极限的大小次序一致".

(4) 若$f(x)>0$,且$\lim f(x)=A$,则$A>0$不一定正确.如:$f(x)=\frac{1}{1+x^2}>0$,但$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$.

【例 1】 设$f(x)$连续,且$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-2}{|x|}=1$,问$x=0$是否是极值点?

【解】 因为$f(x)$连续,所以由$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-2}{|x|}=1$得$f(0)=2$.

由极限保号性,存在$\delta>0$,当$0<|x|<\delta$时,有$\frac{f(x)-2}{|x|}>0$,从而有$f(x)>f(0)=2$,故$x=0$为$f(x)$的极小值点,$f(0)=2$为极小值.

【例 2】 设$f'(1)=0$,又$\lim\limits_{x\to1}\frac{f'(x)}{(x-1)^3}=2$,问$x=1$是否是极值点?

【解】 因为$\lim\limits_{x\to1}\frac{f'(x)}{(x-1)^3}=2>0$,所以由极限保号性,存在$\delta>0$,当$0<|x-1|<\delta$时,

$\dfrac{f'(x)}{(x-1)^3}>0$，于是$\begin{cases}f'(x)<0, x\in(1-\delta,1)\\ f'(x)>0, x\in(1,1+\delta)\end{cases}$，故 $x=1$ 为 $f(x)$ 的极小值点.

3.（有界性）

（1）（数列极限的有界性）若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，则存在 $M>0$，使得 $|a_n|\leqslant M$，即若数列收敛，则数列一定有界. 反之，若数列有界，则数列不一定收敛.

（2）（函数局部有界性）若$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$，则存在 $\delta>0$ 及 $M>0$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有 $|f(x)|\leqslant M$.

4.（列与子列极限性质） 若列极限存在，则任一子列存在相同的极限；若子列极限存在，则列极限不一定存在.

【注解】

若$\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n+1}=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n}=A$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$.

【例 3】 讨论$\lim\limits_{x\to0}\cos\dfrac{1}{x}$.

【解】 取 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi}\to0(n\to\infty)$，$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{1}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\cos2n\pi=1$；

再取 $y_n=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}\to0(n\to\infty)$，$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{1}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\cos(2n\pi+\dfrac{\pi}{2})=0$，

则$\lim\limits_{x\to0}\cos\dfrac{1}{x}$不存在.

【例 4】 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}[n-n^2\ln(1+\dfrac{1}{n})]$.

【解】 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}[x-x^2\ln(1+\dfrac{1}{x})]=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2[\dfrac{1}{x}-\ln(1+\dfrac{1}{x})]$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{x}-\ln(1+\dfrac{1}{x})}{\dfrac{1}{x^2}}\overset{\frac{1}{x}=t}{=}\lim_{t\to0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}=\lim_{t\to0}\frac{1-\dfrac{1}{1+t}}{2t}=\frac{1}{2},$$

所以由列与子列极限的性质得$\lim\limits_{n\to\infty}[n-n^2\ln(1+\dfrac{1}{n})]=\dfrac{1}{2}$.

（二）极限的运算性质

1. 四则运算性质

设 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

（1）$\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$；　（2）$\lim f(x)g(x)=AB$；

（3）$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq0)$.

【注解】

若 $\lim f(x)$ 或 $\lim g(x)$ 不存在，则极限的四则运算性质不成立.

2. 复合函数极限运算性质

（1）设$\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$ 且 $\varphi(x)\neq a$，则$\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=A$.

(2) 设$\lim\limits_{u\to a}f(u)=f(a)$，又$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，则$\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f(a)$.

【注解】

设 $P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$，

$Q(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m$，其中 $a_0b_0\neq 0$，

则
$$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & m=n,\\ 0, & m>n,\\ \infty, & m<n.\end{cases}$$

(三) 极限存在准则

1. 迫敛定理(夹逼定理)

(1)(数列型) 设$\begin{cases}a_n\leqslant b_n\leqslant c_n,\\ \lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}c_n=A.\end{cases}$则$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=A$.

(2)(函数型) 设$\begin{cases}f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x),\\ \lim f(x)=\lim h(x)=A.\end{cases}$则 $\lim g(x)=A$.

【注解】

迫敛定理中，$\lim f(x)=\lim h(x)=A$ 不可用 $\lim[h(x)-f(x)]=0$ 代替.
如：$e^x-e^{-x}\leqslant e^x\leqslant e^x+e^{-x}$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[h(x)-f(x)]=\lim\limits_{x\to+\infty}2e^{-x}=0$，但 $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$.

【例 1】 设 $0<a<b<c$，求$\lim\limits_{n\to\infty}(a^n+b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}$.

【解】 由 $c^n\leqslant a^n+b^n+c^n\leqslant 3c^n$ 得

$$c\leqslant(a^n+b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}\leqslant 3^{\frac{1}{n}}c,$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}3^{\frac{1}{n}}=1$，所以由迫敛定理得$\lim\limits_{n\to\infty}(a^n+b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}=c$.

一般地，$\lim\limits_{n\to\infty}(a^n+b^n+c^n)^{\frac{1}{n}}=\max\{a,b,c\}$.

【例 2】 求$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n}\ (x\geqslant 0)$.

【解】
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\left[1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}$$
$$=\max\{1,x,\frac{x^2}{2}\}=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<1,\\ x, & 1\leqslant x<2,\\ \dfrac{x^2}{2}, & x\geqslant 2.\end{cases}$$

【例 3】 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

【解】
$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant\frac{n}{\sqrt{n^2+1}},$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}}=1$， $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}}=1$，