

 文都教育®

**2019**  
**考研数学**

全国硕士研究生招生考试

# 高等数学辅导讲义

Mathematics

文都考研数学命题研究组 策划

汤家凤 编著

- ◎ 紧扣考试大纲
- ◎ 把握命题规律
- ◎ 归纳解题技巧
- ◎ 总结考试难点

**M**   
athematics

防伪二维码验证真伪

编号: 17004002824809

中国原子能出版社



# 高等数学辅导讲义

为了保障考生、作者及出版社等多方的利益,文源教育特发如下通告:

文都考研数学命题研究组 策划  
汤家凤 编著

中国原子能出版社

中国原子能出版社

图书在版编目(CIP)数据

全国硕士研究生招生考试高等数学辅导讲义/汤家凤编著. —北京:中国原子能出版社, 2017. 11(2018. 1 重印)  
ISBN 978-7-5022-8668-2

I. ①全… II. ①汤… III. ①高等数学—硕士生入学考试—自学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 283044 号

全国硕士研究生招生考试高等数学辅导讲义

---

出版发行 中国原子能出版社(北京市海淀区阜成路 43 号 100048)  
责任编辑 张 梅  
特约编辑 邱晓春 李 焕  
印 刷 北京铭传印刷有限公司  
经 销 全国新华书店  
开 本 787mm×1092mm 1/16  
印 张 16 字 数 400 千字  
版 次 2017 年 11 月第 1 版 2018 年 1 月第 2 次印刷  
书 号 ISBN 978-7-5022-8668-2 定 价 38.00 元

---

网址: <http://www.aep.com.cn>  
发行电话: 010-68452845

E-mail: [atomep123@126.com](mailto:atomep123@126.com)  
版权所有 侵权必究

# 文都教育APP

是由文都教育集团研发的手机学习APP，为广大在校

学生、社会在职人员提供考研、托福英语、医学执业考试、公务员考试、建筑执业考试、教师资格考试、语言培训、国际留学服务等多样课程，帮助考生随时了解考试资讯，并可在线观看试听课程，查询文都教育全国校区位置。



扫一扫下载APP

## 主要特色



01

考试资讯

可以根据考生选择的考试分类和所在城市来查看考试资讯；

02

试听课程

系统全面的试听课程给考生提供选课报班的参考；

03

查找校区

考生可以通过APP内的LBS定位快速查询校区，查看校区的地址、联系电话等信息；

04

考试提醒

根据考生选择的考试类别推送相关考试资讯和信息。

# 郑重声明

## 买正版图书 听精品课程

文都考研数学独家师资汤家凤老师主编的《全国硕士研究生招生考试高等数学辅导讲义》《全国硕士研究生招生考试线性代数辅导讲义》等系列图书因其独特的编写切入点以及对学科命题特点的独到把握而深受广大考生欢迎。

但当前某些机构和个人非法盗印汤家凤老师的图书,这类图书印制质量差,错误百出,不仅使考生蒙受金钱与精力的损失,而且误导考生,甚至毁掉考生的研究生考试前程。

为了保障考生、作者及出版社等多方的利益,文都教育特发如下郑重声明:

1. 对制作、销售盗版图书的网店、个人,一经发现,文都教育将严厉追究其法律责任;

2. 凡文都图书代理商、合作单位参与制作、销售盗版图书的,立即取消其代理、合作资格,并依法追究其法律和相关经济责任;

3. 对为打击盗版图书提供重要线索、证据者,文都图书事业部将给予奖励;若举报者为参加考研的考生,文都图书事业部将免费提供考研图书资料和考前预测试卷。

全国各地举报电话:010-88820419,13488713672

电子邮箱:tousu@wendu.com

为方便考生使用考研数学系列正版图书,特提供网上增值服务,考生登录文都教育在线([www.wendu.com](http://www.wendu.com))可听取汤家凤老师的精品课程。

中国原子能出版社

世纪文都教育科技集团股份有限公司

授权律师:北京市安诺律师事务所

刘 岩

2018年1月

# 前言 Preface



数学是全国硕士研究生招生考试工程类和经济类考生必考的一门课程,且数学课程分值为150分,与专业课的分值相同,数学考试的成败直接关系到整个考试的成败,而高等数学是数学试卷中分值最大的一门课程,其中高等数学在数学一、数学三试卷中的分值为82分,占总分的56%,在数学二试卷中的分值为116分,占总分的78%,所以高等数学的复习是整个考研数学复习的重中之重。

高等数学所涉及的内容非常多,知识体系系统性非常强,题型多,方法技巧性高,很多同学虽然在复习高等数学上花费了大量的时间,但收效甚微,甚至对数学产生惧怕心理。高等数学的复习要有正确的方法,抓好复习的几个关键环节,系统全面掌握高等数学的理论体系和方法体系,善于归纳和总结,通过努力可以很好地掌握这门课程。本书是根据作者二十年来年考研数学辅导的心得和教案精心总结而成的,使理论更加系统化、通俗化,便于掌握和记忆,对题型和方法进行了全面总结和概括。认真阅读此书,可使考生分析问题、解决问题的能力得到大幅度提高,尽快进入最佳学习状态,达到事半功倍的复习效果。

本书的特点有:

1. 每章给出考查要求,便于大家了解各个知识点的考查范围和要求达到的程度。
2. 对每章的基本理论都给出了系统的归纳和总结,理论部分包括基本概念、基本原理、基本公式,同时配备基础题,以加强对所学知识和原理的理解,对重要的原理给出了新的理论证明,对需要重点掌握的知识点给出了延伸解读。
3. 重点题型讲解部分给出每个部分的基本题型和综合题型,通过重点题型的掌握使大家对考查的重点和形式有非常深入的了解,更加适应考试要求,尤其重要的是,重点题型部分给出了很多带新视角的新题型,很多新的题型在过去的考试过程中也被证明是命题者思考的方向。

本书适用于数学一、数学二、数学三,并对不同数学种类考试内容不同的部分给出了说明。

本书作者在若干年教学过程中,借鉴和参考了若干国内外的优秀著作,得到很多的收获和启发,在此作者对这些书的作者表示衷心感谢!

由于作者的水平有限,教学过程中及本书中仍然有很多地方需要改进和提高,恳请读者和广大同仁提出宝贵的批评和建议。

汤家凤

2018年1月于南京

|                      |   |
|----------------------|---|
| 第一章 高等数学复习指导         | 1 |
| 一、题型一 高等数学(一)一       | 1 |
| 二、题型二 高等数学(二)一       | 1 |
| 三、题型三 高等数学(三)一       | 1 |
| 四、题型四 高等数学(四)一       | 1 |
| 五、题型五 高等数学(五)一       | 1 |
| 六、题型六 高等数学(六)一       | 1 |
| 七、题型七 高等数学(七)一       | 1 |
| 八、题型八 高等数学(八)一       | 1 |
| 九、题型九 高等数学(九)一       | 1 |
| 十、题型十 高等数学(十)一       | 1 |
| 十一、题型十一 高等数学(十一)一    | 1 |
| 十二、题型十二 高等数学(十二)一    | 1 |
| 十三、题型十三 高等数学(十三)一    | 1 |
| 十四、题型十四 高等数学(十四)一    | 1 |
| 十五、题型十五 高等数学(十五)一    | 1 |
| 十六、题型十六 高等数学(十六)一    | 1 |
| 十七、题型十七 高等数学(十七)一    | 1 |
| 十八、题型十八 高等数学(十八)一    | 1 |
| 十九、题型十九 高等数学(十九)一    | 1 |
| 二十、题型二十 高等数学(二十)一    | 1 |
| 二十一、题型二十一 高等数学(二十一)一 | 1 |
| 二十二、题型二十二 高等数学(二十二)一 | 1 |
| 二十三、题型二十三 高等数学(二十三)一 | 1 |
| 二十四、题型二十四 高等数学(二十四)一 | 1 |
| 二十五、题型二十五 高等数学(二十五)一 | 1 |
| 二十六、题型二十六 高等数学(二十六)一 | 1 |
| 二十七、题型二十七 高等数学(二十七)一 | 1 |
| 二十八、题型二十八 高等数学(二十八)一 | 1 |
| 二十九、题型二十九 高等数学(二十九)一 | 1 |
| 三十、题型三十 高等数学(三十)一    | 1 |
| 三十一、题型三十一 高等数学(三十一)一 | 1 |
| 三十二、题型三十二 高等数学(三十二)一 | 1 |
| 三十三、题型三十三 高等数学(三十三)一 | 1 |
| 三十四、题型三十四 高等数学(三十四)一 | 1 |
| 三十五、题型三十五 高等数学(三十五)一 | 1 |
| 三十六、题型三十六 高等数学(三十六)一 | 1 |
| 三十七、题型三十七 高等数学(三十七)一 | 1 |
| 三十八、题型三十八 高等数学(三十八)一 | 1 |
| 三十九、题型三十九 高等数学(三十九)一 | 1 |
| 四十、题型四十 高等数学(四十)一    | 1 |
| 四十一、题型四十一 高等数学(四十一)一 | 1 |
| 四十二、题型四十二 高等数学(四十二)一 | 1 |
| 四十三、题型四十三 高等数学(四十三)一 | 1 |
| 四十四、题型四十四 高等数学(四十四)一 | 1 |
| 四十五、题型四十五 高等数学(四十五)一 | 1 |
| 四十六、题型四十六 高等数学(四十六)一 | 1 |
| 四十七、题型四十七 高等数学(四十七)一 | 1 |
| 四十八、题型四十八 高等数学(四十八)一 | 1 |
| 四十九、题型四十九 高等数学(四十九)一 | 1 |
| 五十、题型五十 高等数学(五十)一    | 1 |
| 五十一、题型五十一 高等数学(五十一)一 | 1 |
| 五十二、题型五十二 高等数学(五十二)一 | 1 |
| 五十三、题型五十三 高等数学(五十三)一 | 1 |
| 五十四、题型五十四 高等数学(五十四)一 | 1 |
| 五十五、题型五十五 高等数学(五十五)一 | 1 |
| 五十六、题型五十六 高等数学(五十六)一 | 1 |
| 五十七、题型五十七 高等数学(五十七)一 | 1 |
| 五十八、题型五十八 高等数学(五十八)一 | 1 |
| 五十九、题型五十九 高等数学(五十九)一 | 1 |
| 六十、题型六十 高等数学(六十)一    | 1 |
| 六十一、题型六十一 高等数学(六十一)一 | 1 |
| 六十二、题型六十二 高等数学(六十二)一 | 1 |
| 六十三、题型六十三 高等数学(六十三)一 | 1 |
| 六十四、题型六十四 高等数学(六十四)一 | 1 |
| 六十五、题型六十五 高等数学(六十五)一 | 1 |
| 六十六、题型六十六 高等数学(六十六)一 | 1 |
| 六十七、题型六十七 高等数学(六十七)一 | 1 |
| 六十八、题型六十八 高等数学(六十八)一 | 1 |
| 六十九、题型六十九 高等数学(六十九)一 | 1 |
| 七十、题型七十 高等数学(七十)一    | 1 |
| 七十一、题型七十一 高等数学(七十一)一 | 1 |
| 七十二、题型七十二 高等数学(七十二)一 | 1 |
| 七十三、题型七十三 高等数学(七十三)一 | 1 |
| 七十四、题型七十四 高等数学(七十四)一 | 1 |
| 七十五、题型七十五 高等数学(七十五)一 | 1 |
| 七十六、题型七十六 高等数学(七十六)一 | 1 |
| 七十七、题型七十七 高等数学(七十七)一 | 1 |
| 七十八、题型七十八 高等数学(七十八)一 | 1 |
| 七十九、题型七十九 高等数学(七十九)一 | 1 |
| 八十、题型八十 高等数学(八十)一    | 1 |
| 八十一、题型八十一 高等数学(八十一)一 | 1 |
| 八十二、题型八十二 高等数学(八十二)一 | 1 |
| 八十三、题型八十三 高等数学(八十三)一 | 1 |
| 八十四、题型八十四 高等数学(八十四)一 | 1 |
| 八十五、题型八十五 高等数学(八十五)一 | 1 |
| 八十六、题型八十六 高等数学(八十六)一 | 1 |
| 八十七、题型八十七 高等数学(八十七)一 | 1 |
| 八十八、题型八十八 高等数学(八十八)一 | 1 |
| 八十九、题型八十九 高等数学(八十九)一 | 1 |
| 九十、题型九十 高等数学(九十)一    | 1 |
| 九十一、题型九十一 高等数学(九十一)一 | 1 |
| 九十二、题型九十二 高等数学(九十二)一 | 1 |
| 九十三、题型九十三 高等数学(九十三)一 | 1 |
| 九十四、题型九十四 高等数学(九十四)一 | 1 |
| 九十五、题型九十五 高等数学(九十五)一 | 1 |
| 九十六、题型九十六 高等数学(九十六)一 | 1 |
| 九十七、题型九十七 高等数学(九十七)一 | 1 |
| 九十八、题型九十八 高等数学(九十八)一 | 1 |
| 九十九、题型九十九 高等数学(九十九)一 | 1 |
| 一百、题型一百 高等数学(一百)一    | 1 |

# 目录 Contents



|                                      |    |
|--------------------------------------|----|
| 第一章 极限与连续 .....                      | 1  |
| 第一节 函 数 .....                        | 1  |
| 第二节 极 限 .....                        | 3  |
| 第三节 连续与间断 .....                      | 11 |
| 重点题型讲解 .....                         | 13 |
| 题型一 极限的概念与性质 .....                   | 13 |
| 题型二 不定型极限的计算问题 .....                 | 14 |
| 题型三 $n$ 项和或积的极限计算 .....              | 18 |
| 题型四 极限存在问题 .....                     | 20 |
| 题型五 含参数的极限问题 .....                   | 22 |
| 题型六 中值定理法求极限问题 .....                 | 22 |
| 题型七 含变积分限的函数极限问题 .....               | 23 |
| 题型八 间断点及其分类 .....                    | 25 |
| 题型九 闭区间上连续函数性质 .....                 | 26 |
| 第二章 导数与微分 .....                      | 27 |
| 第一节 导数与微分的基本概念 .....                 | 27 |
| 第二节 求导公式与法则 .....                    | 29 |
| 第三节 隐函数与参数方程确定的函数的求导 .....           | 30 |
| 重点题型讲解 .....                         | 32 |
| 题型一 导数与微分的基本概念 .....                 | 32 |
| 题型二 基本求导类型 .....                     | 35 |
| 题型三 导数的几何应用 .....                    | 39 |
| 题型四 高阶导数 .....                       | 40 |
| 第三章 一元函数微分学的应用 .....                 | 42 |
| 第一节 中值定理 .....                       | 42 |
| 第二节 单调性与极值、凹凸性与拐点、函数作图 .....         | 46 |
| 重点题型讲解 .....                         | 49 |
| 题型一 证明 $f^{(n)}(\xi)=0$ .....        | 49 |
| 题型二 待证结论中只有一个中值 $\xi$ , 不含其他字母 ..... | 50 |
| 题型三 结论中含 $\xi$ , 含 $a, b$ .....      | 54 |
| 题型四 结论中含两个或两个以上中值的问题 .....           | 55 |
| 题型五 中值定理中关于 $\theta$ 的问题 .....       | 58 |
| 题型六 拉格朗日中值定理的两种惯性思维 .....            | 59 |
| 题型七 泰勒公式的常规证明问题 .....                | 60 |
| 题型八 二阶导数保号性问题 .....                  | 63 |

|                                     |     |
|-------------------------------------|-----|
| 题型九 不等式证明 .....                     | 64  |
| 题型十 函数的零点或方程根的个数问题 .....            | 68  |
| 题型十一 函数的单调性与极值、渐近线 .....            | 69  |
| 第四章 不定积分 .....                      | 72  |
| 第一节 不定积分的概念与基本性质 .....              | 72  |
| 第二节 不定积分基本公式与积分法 .....              | 73  |
| 第三节 两类重要函数的不定积分                     |     |
| ——有理函数与三角有理函数(数学三不要求) .....         | 75  |
| 重点题型讲解 .....                        | 77  |
| 题型一 不定积分的基本概念与性质 .....              | 77  |
| 题型二 换元积分法 .....                     | 77  |
| 题型三 分部积分法 .....                     | 80  |
| 题型四 两类特殊函数的不定积分                     |     |
| ——有理函数与三角有理函数的不定积分(数学三不要求) .....    | 81  |
| 题型五 分段函数的积分 .....                   | 84  |
| 题型六 综合型不定积分(数学三不要求) .....           | 85  |
| 第五章 定积分及其应用 .....                   | 86  |
| 第一节 定积分的概念与基本性质 .....               | 86  |
| 第二节 基本理论 .....                      | 89  |
| 第三节 广义积分 .....                      | 92  |
| 第四节 定积分的应用 .....                    | 94  |
| 重点题型讲解 .....                        | 97  |
| 题型一 定积分的概念与性质 .....                 | 97  |
| 题型二 变积分限的函数问题 .....                 | 98  |
| 题型三 定积分的计算 .....                    | 100 |
| 题型四 定积分的证明 .....                    | 103 |
| 题型五 广义积分 .....                      | 111 |
| 题型六 定积分的应用 .....                    | 113 |
| 第六章 多元函数微分学 .....                   | 116 |
| 第一节 多元函数微分学的基本概念 .....              | 116 |
| 第二节 多元函数基本理论 .....                  | 119 |
| 第三节 多元函数微分学的应用 .....                | 125 |
| 第四节 多元函数微分学的物理与几何应用(数学二、三不要求) ..... | 126 |
| 重点题型讲解 .....                        | 127 |
| 题型一 多元函数极限、连续、可偏导、可微等基本概念的问题 .....  | 127 |
| 题型二 各种偏导数求法 .....                   | 129 |
| 题型三 求偏导的反问题 .....                   | 133 |
| 题型四 偏导数的代数应用 .....                  | 134 |
| 题型五 多元函数微分学在几何上的应用(数学二、三不要求) .....  | 136 |
| 题型六 场论的概念(数学二、三不要求) .....           | 137 |
| 第七章 微分方程 .....                      | 138 |
| 第一节 微分方程的基本概念 .....                 | 138 |
| 第二节 一阶微分方程的种类及解法 .....              | 138 |

|                               |     |
|-------------------------------|-----|
| 第三节 可降阶的高阶微分方程(数学三不要求).....   | 141 |
| 第四节 高阶微分方程.....               | 142 |
| 重点题型讲解.....                   | 144 |
| 题型一 微分方程的基本概念与性质.....         | 144 |
| 题型二 一阶微分方程的求解.....            | 145 |
| 题型三 非特定类型微分方程或变换下微分方程的求解..... | 147 |
| 题型四 可降阶的高阶微分方程求解(数学三不要求)..... | 148 |
| 题型五 高阶线性微分方程求解.....           | 148 |
| 题型六 微分方程的应用.....              | 150 |
| 题型七 欧拉方程求解(数学二、三不要求).....     | 152 |
| 第八章 重积分.....                  | 153 |
| 第一节 二重积分.....                 | 153 |
| 第二节 三重积分(数学二、三不要求).....       | 158 |
| 二重积分重点题型讲解.....               | 161 |
| 题型一 二重积分的概念与性质.....           | 161 |
| 题型二 改变积分次序.....               | 163 |
| 题型三 二重积分的计算.....              | 165 |
| 题型四 二重积分的综合问题.....            | 170 |
| 题型五 二重积分的应用(数学二、三不要求).....    | 171 |
| 三重积分重点题型讲解(数学二、三不要求).....     | 172 |
| 题型一 三重积分的计算.....              | 172 |
| 题型二 三重积分的应用.....              | 173 |
| 第九章 级数(数学二不要求).....           | 175 |
| 第一节 常数项级数.....                | 175 |
| 第二节 幂级数.....                  | 183 |
| 第三节 傅里叶级数(数学三不要求).....        | 187 |
| 重点题型讲解.....                   | 189 |
| 题型一 常数项级数的基本性质与敛散性判断.....     | 189 |
| 题型二 常数项级数敛散性证明.....           | 192 |
| 题型三 幂级数的收敛半径与收敛域.....         | 193 |
| 题型四 函数展开成幂级数.....             | 194 |
| 题型五 幂级数的和函数.....              | 195 |
| 题型六 特殊常数项级数求和.....            | 200 |
| 题型七 傅里叶级数(数学三不要求).....        | 201 |
| 第十章 空间解析几何(数学二、三不要求).....     | 202 |
| 第一节 空间解析几何的理论.....            | 202 |
| 第二节 向量的应用.....                | 204 |
| 重点题型讲解.....                   | 208 |
| 题型一 向量的运算与性质.....             | 208 |
| 题型二 平面方程.....                 | 209 |
| 题型三 直线方程.....                 | 210 |
| 题型四 距离与夹角.....                | 210 |
| 题型五 旋转曲面.....                 | 211 |

|                          |     |
|--------------------------|-----|
| 第十一章 曲线积分与曲面积分(数学二、三不要求) | 212 |
| 第一节 曲线积分                 | 212 |
| 第二节 曲面积分                 | 218 |
| 第三节 场论初步                 | 223 |
| 重点题型讲解                   | 224 |
| 题型一 对弧长的曲线积分             | 224 |
| 题型二 二维空间对坐标的曲线积分         | 224 |
| 题型三 三维空间对坐标的曲线积分         | 228 |
| 题型四 对坐标的曲线积分的应用          | 230 |
| 题型五 对面积的曲面积分             | 231 |
| 题型六 对坐标的曲面积分             | 233 |
| 题型七 场论初步                 | 235 |
| 第十二章 数学的经济应用(数学一、二不要求)   | 236 |
| 第一节 差分方程                 | 236 |
| 第二节 边际与弹性                | 237 |
| 第三节 现值与利息                | 238 |

# 第一章 极限与连续

## 考查要求

1. 会求函数的复合函数.
2. 掌握函数的有界性、单调性、奇偶性和周期性等初等特性.
3. 理解数列及函数极限的概念.
4. 熟练掌握无穷小及等价无穷小的概念与性质.
5. 了解极限的基本性质、运算性质,掌握极限的存在性质及重要极限.
6. 熟悉各种不定型极限的计算.
7. 了解连续与间断的概念,掌握函数间断点的判断与分类.
8. 熟练掌握闭区间上连续函数的性质.

## 第一节 函 数

### 一、基本概念

1. 函数——设变量  $x$  的取值范围为  $D$ , 若对任意的  $x \in D$ , 按照某种对应关系总有唯一确定的值  $y$  与  $x$  对应, 称  $y$  为  $x$  的函数, 记为  $y = f(x)$ , 其中  $D$  称为函数  $y = f(x)$  的定义域.

2. 复合函数——设  $u = \varphi(x) (x \in D_1)$ ,  $y = f(u) (u \in D_2)$ , 且对任意的  $x \in D_1$  有  $\varphi(x) \in D_2$ , 称  $y$  为  $x$  的复合函数, 记为  $y = f[\varphi(x)]$ .

3. 反函数——设  $y = f(x) (x \in D)$  为单调函数, 其值域为  $\mathbf{R}$ , 对任意的  $y \in \mathbf{R}$ , 有唯一确定的  $x \in D$  与之对应, 称  $x$  为  $y$  的反函数, 记为  $x = f^{-1}(y)$ .

4. 基本初等函数——称 
$$\begin{cases} x^a, \\ a^x (a > 0, a \neq 1), \\ \log_a x (a > 0, a \neq 1), \\ \sin x, \cos x, \tan x, \cot x, \sec x, \csc x, \\ \arcsin x, \arccos x, \arctan x, \operatorname{arccot} x \end{cases} \quad \text{为基本初等函数.}$$

5. 初等函数——由常数及基本初等函数经过有限次的四则运算和复合运算而成的式子称为初等函数.

### 二、函数的初等特性

1. 有界性——设  $y = f(x) (x \in D)$ , 若存在  $M > 0$ , 对任意的  $x \in D$ , 总有  $|f(x)| \leq M$ , 称函数  $f(x)$  在  $D$  上有界.

## 【注解】

若  $f(x) \geq M_1$ , 称  $f(x)$  有下界; 若  $f(x) \leq M_2$ , 称  $f(x)$  有上界.  
 $f(x)$  有界的充分必要条件是  $f(x)$  既有上界又有下界.

2. 单调性 —— 设  $y=f(x)(x \in D)$ , 若对任意的  $x_1, x_2 \in D$  且  $x_1 < x_2$ , 总有  $f(x_1) < f(x_2)$ , 称  $y=f(x)$  在  $D$  上单调增加; 若对任意的  $x_1, x_2 \in D$  且  $x_1 < x_2$ , 总有  $f(x_1) > f(x_2)$ , 称  $y=f(x)$  在  $D$  上单调减少.

3. 奇偶性 —— 设  $y=f(x)(x \in D)$ , 其中  $D$  关于原点对称, 若  $f(-x) = -f(x)$ , 称  $y=f(x)$  在  $D$  上为奇函数; 若  $f(-x) = f(x)$ , 称  $y=f(x)$  在  $D$  上为偶函数.

【例 1】 设函数  $y=f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ ,

(1) 判断函数的奇偶性;

(2) 求函数的反函数.

【解】 (1) 显然  $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$  的定义域为  $(-\infty, +\infty)$ , 由

$$f(-x) = \ln(-x + \sqrt{1+x^2}) = \ln \frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}} = -\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = -f(x),$$

得函数  $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$  为奇函数.

$$(2) \text{ 由 } \begin{cases} y = \ln(x + \sqrt{1+x^2}), \\ -y = \ln(-x + \sqrt{1+x^2}), \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} x + \sqrt{1+x^2} = e^y, \\ -x + \sqrt{1+x^2} = e^{-y}, \end{cases} \text{ 两式相减得 } x = \frac{e^y - e^{-y}}{2},$$

故函数  $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$  的反函数为  $x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$ .

【例 2】 设  $f(x) = e^{\sin x} - e^{-\sin x}$ , 判断其奇偶性.

【解】 显然  $x \in (-\infty, +\infty)$ , 且

$$f(-x) = e^{\sin(-x)} - e^{-\sin(-x)} = e^{-\sin x} - e^{\sin x} = -f(x), \text{ 故 } f(x) \text{ 为奇函数.}$$

【例 3】 设  $f(x)$  为连续的奇函数, 判断  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  的奇偶性.

【解】 由  $f(-x) = -f(x)$  得

$$\begin{aligned} F(-x) &= \int_a^{-x} f(t) dt \stackrel{t=-u}{=} \int_{-a}^x f(-u)(-du) = \int_{-a}^x f(u) du \\ &= \int_a^x f(u) du + \int_a^{-a} f(u) du = \int_a^x f(u) du = F(x). \end{aligned}$$

则  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  为偶函数.

4. 周期性 —— 设  $y=f(x)(x \in D)$ , 若存在  $T > 0$ , 对任意的  $x \in D, x+T \in D$ , 有  $f(x+T) = f(x)$ , 称  $y=f(x)$  为周期函数,  $T$  称为  $y=f(x)$  的周期.

## 三、特殊函数

1. 符号函数 —— 称  $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$  为符号函数, 显然  $|x| = x \operatorname{sgn} x$ .

2. 狄利克雷函数 —— 称  $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q} \\ 0, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} \end{cases}$  为狄利克雷函数.

3. 取整函数 —— 称  $y=[x]$  为取整函数, 其函数值为  $x$  左侧最大的整数值, 若  $x$  为整数, 则函数值即为  $x$ , 如:  $[-\sqrt{2}] = -2, [\sqrt{5}] = 2, [3] = 3$ .

## 【注解】

(1)  $[x] \leq x$ .

(2)  $[x+y] \neq [x]+[y]$ , 但  $[x+m]=[x]+m$ , 其中  $m$  为整数.

## 第二节 极 限

## 一、基本概念

## 1. 极限的定义

| 情形                                    | 定义                                                                                                                                                                               |
|---------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 数列极限的定义( $\epsilon - N$ )             | 若对任意的 $\epsilon > 0$ , 存在 $N > 0$ , 当 $n > N$ 时, 有 $ a_n - A  < \epsilon$ , 称 $A$ 为数列 $\{a_n\}$ 的极限, 记为 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ .                                  |
| 函数当自变量趋于有限值的定义( $\epsilon - \delta$ ) | 若对任意的 $\epsilon > 0$ , 存在 $\delta > 0$ , 当 $0 <  x - a  < \delta$ 时, 有 $ f(x) - A  < \epsilon$ , 称 $A$ 为 $f(x)$ 当 $x \rightarrow a$ 时的极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ . |
| 函数当自变量趋于无穷大的极限( $\epsilon - X$ )      | 若对任意的 $\epsilon > 0$ , 存在 $X > 0$ , 当 $x > X$ 时, 有 $ f(x) - A  < \epsilon$ , 称 $A$ 为 $f(x)$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 的极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ .          |
|                                       | 若对任意的 $\epsilon > 0$ , 存在 $X > 0$ , 当 $x < -X$ 时, 有 $ f(x) - A  < \epsilon$ , 称 $A$ 为 $f(x)$ 当 $x \rightarrow -\infty$ 的极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ .         |
|                                       | 若对任意的 $\epsilon > 0$ , 存在 $X > 0$ , 当 $ x  > X$ 时, 有 $ f(x) - A  < \epsilon$ , 称 $A$ 为 $f(x)$ 当 $x \rightarrow \infty$ 的极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ .          |

## 【注解】

(1)  $x \rightarrow a$  包含  $\begin{cases} x \neq a, \\ x \rightarrow a^-, x \rightarrow a^+. \end{cases}$

(2)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  与  $f(x)$  在  $x=a$  处有无定义无关, 如:  $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$  在  $x=1$  处无定义, 但  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$ , 即函数在一点处的极限与函数在该点处有无定义无关.

(3) 若对任意的  $\epsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 当  $x \in (a-\delta, a)$  时, 有  $|f(x) - A| < \epsilon$ , 称  $A$  为  $f(x)$  在  $x=a$  处的左极限, 记为  $f(a-0)$ ;

若对任意的  $\epsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 当  $x \in (a, a+\delta)$  时, 有  $|f(x) - B| < \epsilon$ , 称  $B$  为  $f(x)$  在  $x=a$  处的右极限, 记为  $f(a+0)$ .

注意:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  存在的充分必要条件是  $f(a-0)$  及  $f(a+0)$  都存在且相等.

(4) 以下情形一般需要考虑函数的左右极限:

情形一: 分段函数在分界点处的极限.

【例 1】 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{x}, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ \frac{e^{2x} - 1 - \sin x}{\arctan x}, & x < 0, \end{cases}$  求  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

【解】 由  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ , 得  $f(0+0) = 1$ ;

$$\begin{aligned} \text{由 } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} - 1 - \sin x}{\arctan x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} - 1}{\arctan x} - \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{\arctan x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 2 - 1 = 1, \text{ 得 } f(0-0) = 1, \end{aligned}$$

因为  $f(0-0) = f(0+0) = 1$ , 所以  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ .

【例 2】 设  $f(x) = \begin{cases} \frac{|x| + 2x}{\sin x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$  求  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

【解】 由  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| + 2x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + 2x}{x} = 3$  得  $f(0+0) = 3$ ;

$$\text{由 } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| + 2x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x + 2x}{x} = 1 \text{ 得 } f(0-0) = 1,$$

因为  $f(0+0) \neq f(0-0)$ , 所以  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  不存在.

情形二: 若  $f(x)$  中含  $a^{\frac{g(x)}{x-b}}$  或  $a^{\frac{g(x)}{b-x}}$ , 求  $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$  一定要分别研究左、右极限.

【例 3】 设  $f(x) = e^{\frac{x}{x-2}}$ , 研究  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ .

【解】 当  $x \rightarrow 2^-$  时,  $\frac{x}{x-2} \rightarrow -\infty$ , 则  $f(2-0) = 0$ ;

当  $x \rightarrow 2^+$  时,  $\frac{x}{x-2} \rightarrow +\infty$ , 则  $f(2+0) = +\infty$ ,

因为  $f(2-0) \neq f(2+0)$ , 所以  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  不存在.

【例 4】 设  $f(x) = \frac{1 - 2^{\frac{1}{x-1}}}{1 + 2^{\frac{1}{x-1}}}$ , 研究  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

【解】 当  $x \rightarrow 1^-$  时,  $\frac{1}{x-1} \rightarrow -\infty$ , 则  $f(1-0) = 1$ ;

当  $x \rightarrow 1^+$  时,  $\frac{1}{x-1} \rightarrow +\infty$ , 则  $f(1+0) = -1$ ,

因为  $f(1-0) \neq f(1+0)$ , 所以  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  不存在.

【例 5】 讨论  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2 - e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{2}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} - [x] \right)$ .

【解】 由  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{2 - e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{2}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} - [x] \right) = 2 - 1 - (-1) = 2$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{2 - e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{2}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} - [x] \right) = 0 + 1 - 0 = 1$$

$$\text{得 } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2 - e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{2}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} - [x] \right) \text{ 不存在.}$$

## 2. 无穷小

(1) 无穷小的定义 —— 若  $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ , 称  $\alpha(x)$  当  $x \rightarrow a$  时为无穷小.

(2) 无穷小的比较

设  $\alpha \rightarrow 0, \beta \rightarrow 0$ , 则

若  $\lim_{\alpha} \frac{\beta}{\alpha} = 0$ , 称  $\beta$  为  $\alpha$  的高阶无穷小, 记为  $\beta = o(\alpha)$ ;

若  $\lim_{\alpha} \frac{\beta}{\alpha} = k (k \neq 0, \infty)$ , 称  $\beta$  为  $\alpha$  的同阶无穷小, 记为  $\beta = O(\alpha)$ ,

特别地, 若  $\lim_{\alpha} \frac{\beta}{\alpha} = 1$ , 称  $\beta$  为  $\alpha$  的等价无穷小, 记为  $\alpha \sim \beta$ .

## 二、极限性质

### (一) 极限的一般性质

1. (唯一性) 极限存在必唯一.

2. (保号性)

(1) 设  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A > 0 (< 0)$ , 则存在  $\delta > 0$ , 当  $0 < |x - a| < \delta$  时,  $f(x) > 0 (< 0)$ .

(2) 设  $f(x) \geq 0 (\leq 0)$ , 且  $\lim f(x) = A$ , 则  $A \geq 0 (\leq 0)$ .

(3)  $f(x) \geq g(x)$ , 且  $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$ , 则  $A \geq B$ .

### 【注解】

(1) 极限第一保号性口诀“函数极限正, 则去心邻域正; 函数极限负, 则去心邻域负”.

(2) 极限第二保号性口诀“函数不负, 极限不负; 函数不正, 极限不正”.

(3) 极限第三保号性“函数的大小次序与极限的大小次序一致”.

(4) 若  $f(x) > 0$ , 且  $\lim f(x) = A$ , 则  $A > 0$  不一定正确. 如:  $f(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$ ,

但  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ .

【例 1】 设  $f(x)$  连续, 且  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{|x|} = 1$ , 问  $x = 0$  是否是极值点?

【解】 因为  $f(x)$  连续, 所以由  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{|x|} = 1$  得  $f(0) = 2$ .

由极限保号性, 存在  $\delta > 0$ , 当  $0 < |x| < \delta$  时, 有  $\frac{f(x) - 2}{|x|} > 0$ , 从而有  $f(x) > f(0) = 2$ , 故  $x = 0$  为  $f(x)$  的极小值点,  $f(0) = 2$  为极小值.

【例 2】 设  $f'(1) = 0$ , 又  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{(x-1)^3} = 2$ , 问  $x = 1$  是否是极值点?

【解】 因为  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{(x-1)^3} = 2 > 0$ , 所以由极限保号性, 存在  $\delta > 0$ , 当  $0 < |x - 1| < \delta$  时,

$\frac{f'(x)}{(x-1)^3} > 0$ , 于是  $\begin{cases} f'(x) < 0, x \in (1-\delta, 1) \\ f'(x) > 0, x \in (1, 1+\delta) \end{cases}$ , 故  $x=1$  为  $f(x)$  的极小值点.

### 3. (有界性)

(1)(数列极限的有界性) 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ , 则存在  $M > 0$ , 使得  $|a_n| \leq M$ , 即若数列收敛, 则数列一定有界. 反之, 若数列有界, 则数列不一定收敛.

(2)(函数局部有界性) 若  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ , 则存在  $\delta > 0$  及  $M > 0$ , 当  $0 < |x-a| < \delta$  时, 有  $|f(x)| \leq M$ .

4. (列与子列极限性质) 若列极限存在, 则任一子列存在相同的极限; 若子列极限存在, 则列极限不一定存在.

### 【注解】

若  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = A, \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = A$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ .

【例 3】讨论  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$ .

【解】取  $x_n = \frac{1}{2n\pi} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos 2n\pi = 1$ ;

再取  $y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 0$ ,

则  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$  不存在.

【例 4】求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} [n - n^2 \ln(1 + \frac{1}{n})]$ .

【解】因为  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x - x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 [\frac{1}{x} - \ln(1 + \frac{1}{x})]$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} - \ln(1 + \frac{1}{x})}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{\frac{1}{x}=t}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \ln(1+t)}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+t}}{2t} = \frac{1}{2},$$

所以由列与子列极限的性质得  $\lim_{n \rightarrow \infty} [n - n^2 \ln(1 + \frac{1}{n})] = \frac{1}{2}$ .

## (二) 极限的运算性质

### 1. 四则运算性质

设  $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$ , 则

(1)  $\lim [f(x) \pm g(x)] = A \pm B$ ;

(2)  $\lim f(x)g(x) = AB$ ;

(3)  $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} (B \neq 0)$ .

### 【注解】

若  $\lim f(x)$  或  $\lim g(x)$  不存在, 则极限的四则运算性质不成立.

### 2. 复合函数极限运算性质

(1) 设  $\lim_{u \rightarrow a} f(u) = A, \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = a$  且  $\varphi(x) \neq a$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)] = A$ .

(2) 设  $\lim_{u \rightarrow a} f(u) = f(a)$ , 又  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = a$ , 则  $\lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)] = f(a)$ .

### 【注解】

设  $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ ,

$Q(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m$ , 其中  $a_0 b_0 \neq 0$ ,

$$\text{则 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & m = n, \\ 0, & m > n, \\ \infty, & m < n. \end{cases}$$

### (三) 极限存在准则

#### 1. 迫敛定理(夹逼定理)

(1)(数列型) 设  $\begin{cases} a_n \leq b_n \leq c_n, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A. \end{cases}$  则  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A$ .

(2)(函数型) 设  $\begin{cases} f(x) \leq g(x) \leq h(x), \\ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = A. \end{cases}$  则  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = A$ .

### 【注解】

迫敛定理中,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = A$  不可用  $\lim_{x \rightarrow \infty} [h(x) - f(x)] = 0$  代替.

如:  $e^x - e^{-x} \leq e^x \leq e^x + e^{-x}$ , 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x) - f(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2e^{-x} = 0$ , 但  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ .

【例 1】 设  $0 < a < b < c$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a^n + b^n + c^n)^{\frac{1}{n}}$ .

【解】 由  $c^n \leq a^n + b^n + c^n \leq 3c^n$  得

$$c \leq (a^n + b^n + c^n)^{\frac{1}{n}} \leq 3^{\frac{1}{n}} c,$$

因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} 3^{\frac{1}{n}} = 1$ , 所以由迫敛定理得  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a^n + b^n + c^n)^{\frac{1}{n}} = c$ .

一般地,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a^n + b^n + c^n)^{\frac{1}{n}} = \max\{a, b, c\}$ .

【例 2】 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n} \quad (x \geq 0)$ .

【解】  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + x^n + \left(\frac{x^2}{2}\right)^n\right]^{\frac{1}{n}}$

$$= \max\left\{1, x, \frac{x^2}{2}\right\} = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1, \\ x, & 1 \leq x < 2, \\ \frac{x^2}{2}, & x \geq 2. \end{cases}$$

【例 3】 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$ .

【解】  $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ ,

因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1$ ,