

工科数学信息化教学丛书

线性代数解题指导与习题精解

李家雄 李逢高 主编

 科学出版社

工科数学信息化教学丛书

线性代数解题指导与习题精解

李家雄 李逢高 主编



科学出版社

北京

版权所有,侵权必究

举报电话:010-64030229,010-64034315,13501151303

内 容 简 介

本书是蔡光兴、李逢高主编的《线性代数》(第四版)(科学出版社2016年出版)的配套辅导书.全书按教材章节顺序编排,与教材同步,共分为七章,每章包含知识结构图、典型问题与求解方法、教材课后习题详解共3个部分,对每一章的重要题型和对应解法进行了归纳,并给出了教材中各章的全部习题的完整、典型、详实的解答,对提高学生的解题能力具有积极促进作用.

本书不仅面向蔡光兴、李逢高主编的《线性代数》(第四版)的读者,也可作为一般线性代数课程的学习辅导书和考研参考书,同时也能为教师备课和命题提供参考.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数解题指导与习题精解/李家雄,李逢高主编. —北京:科学出版社, 2017.11

(工科数学信息化教学丛书)

ISBN 978-7-03-055509-0

I. ①线… II. ①李… ②李… III. ①线性代数—高等学校—题解
IV. ①O151.2-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第280813号

责任编辑:谭耀文 / 责任校对:董艳辉

责任印制:彭超 / 封面设计:莫彦峰

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

武汉中科兴业印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

开本:787×1092 1/16

2017年11月第 一 版 印张:11 1/4

2017年11月第一次印刷 字数:254 000

定价:32.50元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

本书是蔡光兴、李逢高主编的《线性代数》(第四版)(科学出版社 2016 年出版)的配套辅导书. 全书按教材章节顺序编排, 与教材同步, 共七章, 每章包含知识结构图、典型问题与求解方法、教材课后习题详解共 3 个部分, 除了对教材中各章的全部习题给出了完整、典型、详实的解答外, 还对每一章的典型问题与求解方法进行了归纳. 通过对本书的学习和参考, 可使读者提高分析问题和解决问题的能力, 加深对基本内容的理解和掌握, 增强对学好本门课程的信心.

我们希望读者先自行思考, 自己解题, 然后与题解进行对照; 否则, 可能是无益的.

本书可作为大学理工科学生学习线性代数课程的参考书, 对报考硕士研究生的学生及广大相关教师与科技人员, 也具有较高的参考价值.

本书由李家雄、李逢高主编, 各章编写人员如下: 巴娜(第一章), 李翰芳(第二章), 朱莹(第三章), 陈洁(第四章), 董秀明(第五章), 李家雄(第六章), 蔡振锋(第七章), 最后由李家雄统稿, 李逢高定稿.

本书不足之处, 诚恳希望读者批评指正.

编者

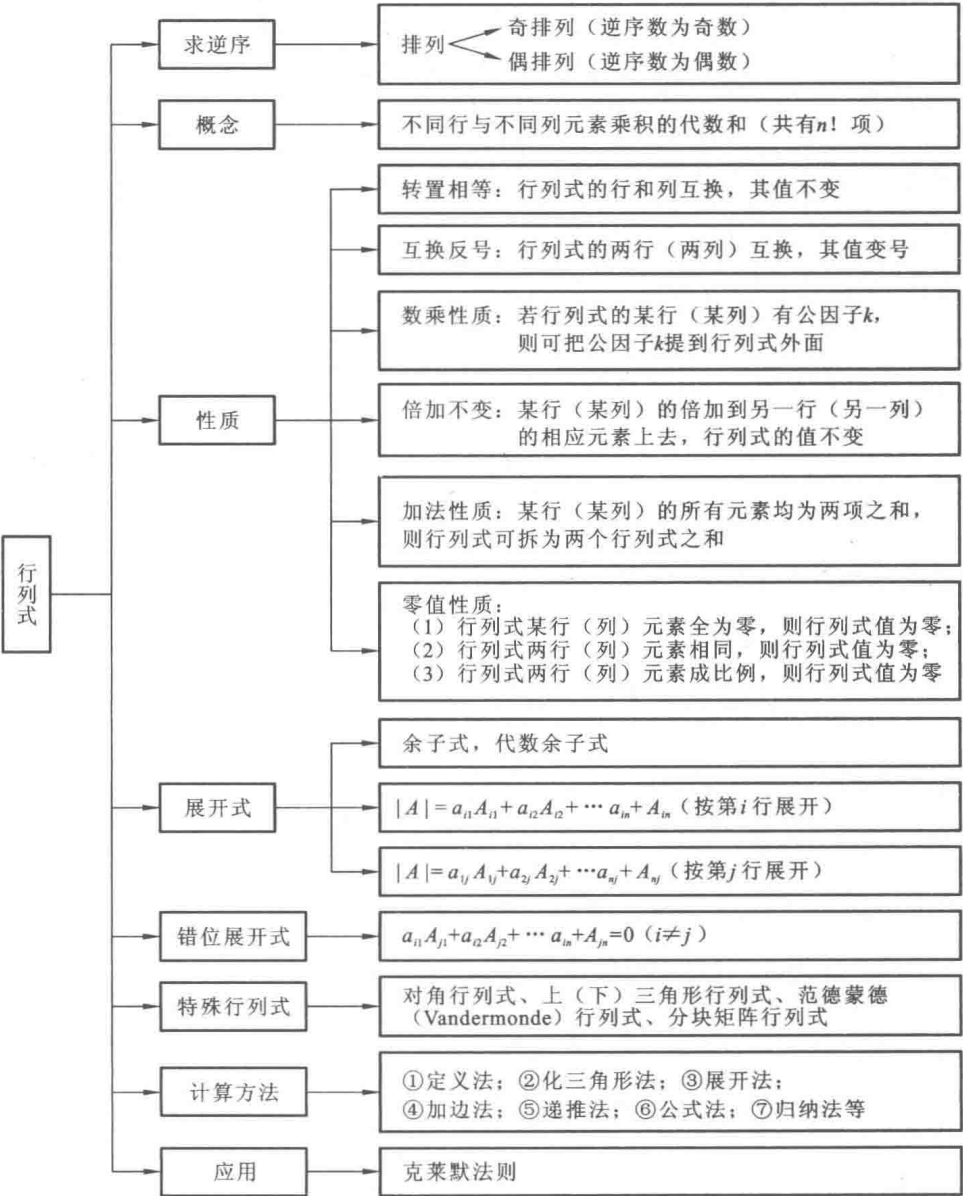
2017 年 10 月

目 录

第一章 行列式	1
一、知识结构图	1
二、典型问题与求解方法	2
三、习题详解	7
第二章 矩阵	28
一、知识结构图	28
二、典型问题与求解方法	29
三、习题详解	33
第三章 消元法与初等变换	47
一、知识结构图	47
二、典型问题与求解方法	48
三、习题详解	51
第四章 向量与矩阵的秩	77
一、知识结构图	77
二、典型问题与求解方法	79
三、习题详解	85
第五章 线性方程组	105
一、知识结构图	105
二、典型问题与求解方法	106
三、习题详解	109
第六章 特征值与特征向量	129
一、知识结构图	129
二、典型问题与求解方法	130
三、习题详解	138
第七章 二次型	153
一、知识结构图	153
二、典型问题与求解方法	154
三、习题详解	159

第一章 行列式

一、知识结构图



二、典型问题与求解方法

典型问题: 数字型行列式的计算.

方法 1: 定义法

n 阶行列式的值等于所有取自不同行不同列的 n 个元素乘积的代数和, 计算时只需计算非零元素乘积的代数和即可 (因为如果乘积中有元素是 0, 则整个乘积都是 0, 去掉或不考虑对结果无任何影响).

【例 1.1】 计算
$$\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & e & f & 0 \end{vmatrix}.$$

【详解】 行列式的一般项可写为 $a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}$. 由于第 2 行的元素除第 1 列的元素外, 其余元素均为零, 故 j_2 只能取 1. 同理 j_3 只能取 3, 故 j_4 只能取 2, j_1 只能取 4. 所以这个四阶行列式中只有 1 项不为零, 即 $a_{14} a_{21} a_{33} a_{42}$, 该项符号为 $(-1)^{\tau(4132)}$, 故所求行列式的值为 $bcde$.

方法 2: 化三角形法

利用性质将行列式化为上(下)三角形行列式, 再利用上(下)三角形行列式的计算公式写出结果.

【例 1.2】 计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} x_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ 1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & x_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix} \quad (x_i \neq 0; i=2, 3, \cdots, n).$

【详解】 将第 2, 3, $\cdots$, n 列分别乘以 $-\frac{1}{x_2}, -\frac{1}{x_3}, \cdots, -\frac{1}{x_n}$ 加到第 1 列, 化为上三角形行列式, 得

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} x_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ 1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & x_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - \sum_{i=2}^n \frac{b_i}{x_i} & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ 0 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix} \\ &= x_2 x_3 \cdots x_n \left(x_1 - \sum_{i=2}^n \frac{b_i}{x_i} \right) \end{aligned}$$

【评注】形如 $\begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & \\ \vdots & & \ddots \end{vmatrix}$ 的行列式称为爪形或箭形行列式,其解法是根据主对角线上的元素利用性质将其化为上(下)三角形行列式.

方法 3: 展开法(也叫降阶法)

利用行列式按行(列)展开定理进行计算. 做题时把握好两点:一是对含零较多的行(列)展开,且计算时只计算非零元素与对应的代数余子式的乘积之和;二是可先利用性质将行列式的某行的元素尽可能多地化成零,然后再对该行展开.

【例 1.3】 计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$.

【详解】 按第一列展开,有

$$D_n = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & a_2 & & \\ & \ddots & & \\ & & a_{n-1} & \\ & & & 1 \end{vmatrix} + a_n (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} a_1 & & & \\ 1 & a_2 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & & 1 & a_{n+1} \end{vmatrix}$$

$$= 1 + (-1)^{n+1} a_1 a_2 \cdots a_n$$

【例 1.4】 计算 $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ -7 & 5 & -3 & -6 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -3 & 2 & 8 \end{vmatrix}$.

【详解】 $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ -7 & 5 & -3 & -6 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -3 & 2 & 8 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3+r_1} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ -7 & 5 & -3 & -6 \\ 5 & -1 & 0 & 7 \\ 4 & -3 & 2 & 8 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2+3r_1} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 6 \\ 5 & -1 & 0 & 7 \\ 4 & -3 & 2 & 8 \end{vmatrix}$

$$\xrightarrow{r_4-2r_1} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 6 \\ 5 & -1 & 0 & 7 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 5 & -1 & 7 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1+r_3} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 5 & -1 & 7 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 6 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 18$$

方法 4: 加边法 (也叫升阶法)

【例 1.5】 计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$, 其中 $a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$.

【详解】 将 D_n 增加一行、一列构成 $n+1$ 阶行列式, 使其值不变, 即

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_i - r_1 \ (i=2,3,\cdots,n+1)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_1 - \frac{1}{a_{i-1}} c_i \ (i=2,3,\cdots,n+1)} \begin{vmatrix} 1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$= \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}\right) a_1 a_2 \cdots a_n$$

【评注】 升阶法也是在利用行列式按行(列)展开定理. 升阶法中构造增加的一行、一列的元素的原则:

- (1) 要保证增加一行、一列后所得的新行列式要与原行列式相等;
- (2) 要使新行列式比原行列式计算简单.

方法 5: 递推法

【例 1.6】 计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix}$.

$$\text{【详解】 } D_n = \begin{vmatrix} x-a & a & a & \cdots & a \\ 0 & x & a & \cdots & a \\ 0 & -a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a & a & \cdots & a \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix} = I_1 + I_2$$

$$I_1 \xrightarrow{\text{按第1列展开}} (x-a) \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ -a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix} = (x-a)D_{n-1}$$

$$I_2 = a \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -a & x & a & \cdots & a \\ -a & -a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a & -a & -a & \cdots & x \end{vmatrix} \xrightarrow[c_n - c_1]{c_2 - c_1, \dots} a \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a & x+a & 2a & \cdots & 2a \\ -a & 0 & x+a & \cdots & 2a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a & 0 & 0 & \cdots & x+a \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{按第1行展开}} a(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} x+a & 2a & \cdots & 2a \\ 0 & x+a & \cdots & 2a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x+a \end{vmatrix} = a(x+a)^{n-1}$$

于是得递推公式

$$\begin{aligned} D_n &= (x-a)D_{n-1} + a(x+a)^{n-1} \\ &= (x-a)[(x-a)D_{n-2} + a(x+a)^{n-2}] + a(x+a)^{n-1} \\ &= (x-a)^2 D_{n-2} + a(x-a)(x+a)^{n-2} + a(x+a)^{n-1} \\ &= \cdots = (x-a)^{n-2} D_2 + a(x-a)^{n-3}(x+a)^2 + \cdots + a(x-a)(x+a)^{n-2} + a(x+a)^{n-1} \\ &= (x-a)^{n-2}(x^2+a^2) + a(x-a)^{n-3}(x+a)^2 + \cdots + a(x-a)(x+a)^{n-2} + a(x+a)^{n-1} \\ &= (x-a)^n + a[(x-a)^{n-1} + (x+a)(x-a)^{n-2} + \cdots + (x-a)(x+a)^{n-2} + (x+a)^{n-1}] \\ &= (x-a)^n + \frac{(x+a)^n - (x-a)^n}{2} = \frac{(x+a)^n + (x-a)^n}{2} \end{aligned}$$

方法 6: 公式法

$$\text{【例 1.7】 计算 } \begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 & 6 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$\text{【详解】 } \begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 & 6 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1+r_4} \begin{vmatrix} 10 & 10 & 10 & 10 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 10 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow[r_3 \leftrightarrow r_2]{r_1 \leftrightarrow r_3} 10 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \end{vmatrix} \\ & = 10 \cdot (2-1)(3-1)(4-1)(3-2)(4-2)(4-3) = 120 \end{aligned}$$

【评注】 此题最后利用的是范德蒙行列式公式.

方法 7: 归纳法

【例 1.8】 证明:

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos \alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos \alpha \end{vmatrix} = \cos n\alpha$$

【证明】 利用数学归纳法.

当 $n=2$ 时, $D_2 = \begin{vmatrix} \cos \alpha & 1 \\ 1 & 2\cos \alpha \end{vmatrix} = 2\cos^2 \alpha - 1 = \cos 2\alpha$, 结论成立.

假设结论对于阶数小于等于 $n-1$ 的情形都成立, 则有 $D_{n-1} = \cos(n-1)\alpha$, $D_{n-2} = \cos(n-2)\alpha$ 成立. 下面考察阶数为 n 的情形.

$$D_n = \begin{vmatrix} \cos \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos \alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos \alpha \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{\text{按第 } n \text{ 行展开}} 2\cos \alpha \cdot (-1)^{n+n} D_{n-1} + (-1)^{n+n-1} \begin{vmatrix} \cos \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos \alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ & = 2\cos \alpha D_{n-1} - D_{n-2} \\ & = 2\cos \alpha \cos(n-1)\alpha - \cos(n-2)\alpha \\ & = 2\cos \alpha (\cos n\alpha \cos \alpha + \sin n\alpha \sin \alpha) - (\cos n\alpha \cos 2\alpha + \sin n\alpha \sin 2\alpha) \\ & = \cos n\alpha \cdot 2\cos^2 \alpha - \cos n\alpha \cos 2\alpha \end{aligned}$$

$$= \cos n\alpha (2\cos^2 \alpha - \cos 2\alpha) = \cos n\alpha$$

结论也成立, 故原结论成立.

【评注】 数学归纳法有两种操作方式:

方法 1:

- (1) 验证 $n=1$ 或 $n=2$ 时, 命题 f_n 正确;
- (2) 假设 $n=k$ 时, 命题 f_n 正确;
- (3) 证明 $n=k+1$ 时, 命题 f_n 正确.

方法 2:

- (1) 验证 $n=1$ 或 $n=2$ 时, 命题 f_n 正确;
- (2) 假设 $n < k$ 时, 命题 f_n 正确;
- (3) 证明 $n=k$ 时, 命题 f_n 正确.

三、习题详解

A 题

1. 排列 54321 的逆序数为 _____.

【答案】 10.

【详解】 共有逆序: 54, 53, 43, 52, 42, 32, 51, 41, 31, 21. 故排列的逆序数为 10.

2. 已知 n 阶行列式 D 的每一列元素之和均为零, 则 $D =$ _____.

【答案】 0.

【详解】 把 n 阶行列式 D 的第 1 行, ..., 第 $n-1$ 行分别加到 D 的第 n 行的对应元素上, 得 n 阶行列式 D_1 , 则 D_1 的第 n 行全为零. 由行列式的性质 3 的推论 2 可知 $D_1 = 0$. 再由行列式的性质 5 可得 $D = D_1 = 0$.

3. 当 $i =$ _____, $j =$ _____ 时, 下列乘积项在六阶行列式中同时带负号.

(1) $a_{14} a_{27} a_{33} a_{41} a_{5j} a_{66}$;

(2) $a_{13} a_{26} a_{3j} a_{41} a_{5i} a_{64}$.

【答案】 $i=2, j=5$.

【详解】 六阶行列式的一般项可以写为 $a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4} a_{5j_5} a_{6j_6}$, 其中 $j_1 j_2 j_3 j_4 j_5 j_6$ 是 $1, 2, 3, 4, 5, 6$ 的排列, 所以 i, j 只能取 2 或 5.

当 $i=2$ 时, $j=5$, 这两项的符号分别由 $(-1)^{\tau(423156)}$ 和 $(-1)^{\tau(365124)}$ 来决定, 由于 $\tau(423156)=5, \tau(365124)=9$, 故这两项同时带负号.

当 $i=5$ 时, $j=2$, 这两项的符号分别由 $(-1)^{\tau(453126)}$ 和 $(-1)^{\tau(362154)}$ 来决定, 由于 $\tau(453126)=8, \tau(362154)=8$, 故这两项同时带正号.

综上 $i=2, j=5$.

4. 方程组 $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = c_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = c_2 \end{cases}$, 记 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $D_1 = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, $D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix}$, 则 $D \neq 0$

时, $x = \underline{\hspace{2cm}}$, $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 $x = \frac{D_1}{D}$, $y = \frac{D_2}{D}$.

【详解】 由于系数行列式 $D \neq 0$, 由克拉默法则可得: $x = \frac{D_1}{D}$, $y = \frac{D_2}{D}$.

5. 若 n 元 n 式齐次线性方程组有唯一解, 则这个解是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

【答案】 零解.

【详解】 由于零解总是齐次线性方程组的解, 那么当它有唯一解的时候, 这个解就是零解.

6. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ 中 $a_{21}=3$ 的代数余子式是().

A. 2 B. -2 C. 1 D. 4

【答案】 B.

【详解】 由于 $M_{21}=2$, 故 $A_{21}=(-1)^{2+1} \cdot 2 = -2$, 答案为 B.

7. 四阶行列式中含因子 a_{23} 且带正号的项为().

A. $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ B. $a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}$ C. $a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$ D. $a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$

【答案】 C.

【详解】 四阶行列式中含因子 a_{23} 的一般项为 $a_{1i}a_{23}a_{3j}a_{4k}$, 各项的符号为 $(-1)^{\tau(i3jk)}$. 由题意知: 选项 A 中 $\tau(1324)=1$, B 中 $\tau(2341)=3$, C 中 $\tau(2314)=2$, D 中 $\tau(4312)=5$, 故 C 项的符号为正.

8. 设 A_{ij} 是 n 阶行列式 D 中元素 a_{ij} 的代数余子式, 则() 成立.

A. $a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = D$ B. $a_{11}A_{11} + a_{12}A_{21} + \cdots + a_{1n}A_{n1} = D$

C. $a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = 0$ D. $a_{11}A_{11} + a_{12}A_{21} + \cdots + a_{1n}A_{n1} = 0$

【答案】 A.

【详解】 由行列式与其代数余子式的关系式

$$a_{j1}A_{i1} + a_{j2}A_{i2} + \cdots + a_{jn}A_{in} = \begin{cases} D, & j=i \\ 0, & j \neq i \end{cases}$$

$$a_{1j}A_{1i} + a_{2j}A_{2i} + \cdots + a_{nj}A_{ni} = \begin{cases} D, & j=i \\ 0, & j \neq i \end{cases} \quad (i, j=1, 2, \cdots, n)$$

可知答案为 A.

9. 四阶行列式 $D = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$ 的值等于().

A. $a_1 a_2 a_3 a_4 - b_1 b_2 b_3 b_4$

B. $a_1 a_2 a_3 a_4 + b_1 b_2 b_3 b_4$

C. $(a_1 a_2 - b_1 b_2)(a_3 a_4 - b_3 b_4)$

D. $(a_2 a_3 - b_2 b_3)(a_1 a_4 - b_1 b_4)$

【答案】 D.

【详解】 由教材第 8 页例 2 知

$$D = a_1 a_2 a_3 a_4 - a_1 b_2 b_3 a_4 - b_1 a_2 a_3 b_4 + b_1 b_2 b_3 b_4 = (a_2 a_3 - b_2 b_3)(a_1 a_4 - b_1 b_4).$$

答案为 D.

【评注】 本题用拉普拉斯定理更简单.

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{2+3+2+3} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_4 & a_4 \end{vmatrix} = (a_2 a_3 - b_2 b_3)(a_1 a_4 - b_1 b_4)$$

10. 下列行列式中, 值为零的是().

A. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$

B. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \end{vmatrix}$

C. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 \\ -4 & -3 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$

D. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n & n & n \end{vmatrix}$

【答案】 C.

【详解】 A 项中把行列式按第 1 列展开可得:

$$D = (-1)^{n+1} n \begin{vmatrix} 1 & & & \\ & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n-1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} n!$$

B 项中由范德蒙德行列式的结论可得 $D = (2-1)(3-1)(3-2)(4-1)(4-2)(4-3) = 12$;

C 项中把 D 的每一列提取公因子 -1 , 可得 $D = (-1)^5 D^T = (-1)^5 D$, 故可得 $D = 0$;

D 项中此行列式为右下三角行列式, 其值 $D = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot n!$.

故答案为 C.

B 题

1. 计算下列各排列的逆序数,并判定是奇排列还是偶排列.

(1) 3421; (2) 217986354; (3) $(2k)1(2k-1)2\cdots(k+1)k$

【详解】 (1) 3 排在首位,逆序数为 0. 在 4 之前比 4 大的数没有,逆序数也为 0. 2 的前面比 2 大的数有 3 和 4,故逆序数为 2. 1 的前面比 1 大的数有 3,4,2,故逆序数为 3. 于是排列的逆序数为 $t=0+0+2+3=5$,为奇排列.

(2) 2 排在首位,逆序数为 0. 在 1 之前比 1 大的数有 2,故逆序数为 1. 7 的前面比 7 大的数没有,故逆序数为 0. 在 9 前面比 9 大的数没有,故逆序数为 0. 在 8 前面比 8 大的数为 9,故逆序数为 1. 在 6 前面比 6 大的数为 7,9,8,故逆序数为 3. 在 3 前面比 3 大的数为 7,9,8,6,故逆序数为 4. 在 5 前面比 5 大的数为 7,9,8,6,故逆序数为 4. 在 4 前面比 4 大的数为 7,9,8,6,5,故逆序数为 5. 于是排列的逆序数为 $t=0+1+0+0+1+3+4+4+5=18$,为偶排列.

(3) $2k$ 排在首位,逆序数为 0. 1 的前面比 1 大的数有 $2k$,逆序数为 1. $2k-1$ 的前面比 $2k-1$ 大的数有 $2k$,逆序数为 1. 2 的前面比 2 大的数有 $2k, 2k-1$,逆序数为 2. $2k-2$ 的前面比 $2k-2$ 大的数有 $2k, 2k-1$,逆序数为 2. $\cdots k-1$ 的前面比 $k-1$ 大的数有 $2k, 2k-1, \cdots, k+2$,逆序数为 $k-1$. $k+1$ 的前面比 $k+1$ 大的数有 $2k, 2k-1, \cdots, k+2$,逆序数为 $k-1$. k 的前面比 k 大的数有 $2k, 2k-1, \cdots, k+2, k+1$,逆序数为 k . 于是排列的逆序数为 $t=0+1+1+2+2+\cdots+(k-1)+(k-1)+k=k^2$,故排列的奇偶性与 k 的奇偶性相同.

2. 如果 n 个数字的排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的逆序数是 k ,那么排列 $i_n i_{n-1} \cdots i_2 i_1$ 的逆序数是多少?

【详解】 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中任意两个不同的 i_m, i_j 必在且仅在 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 或 $i_n i_{n-1} \cdots i_2 i_1$ 之中构成一个逆序,而这两个排列的逆序总数为: $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$,因此排列 $i_n i_{n-1} \cdots i_2 i_1$ 的逆序数为 $\frac{n(n-1)}{2} - k$.

3. 确定下列各乘积是否是五阶行列式中的项.如果是,确定其应带的符号.

(1) $a_{51} a_{42} a_{33} a_{24} a_{51}$; (2) $a_{13} a_{52} a_{41} a_{35} a_{24}$.

【详解】 五阶行列式中的项都是来自不同行不同列的 5 个元素的乘积.而(1)中有两个 a_{51} ,故不是五阶行列式中的项.(2)是五阶行列式中的项,并且等于 $a_{13} a_{24} a_{35} a_{41} a_{52}$,该项前的符号为 $(-1)^{\tau(34512)} = (-1)^6 = 1$,故为正.

4. 计算下列行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & 0 \\ 0 & e & f & 0 \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 4 \\ -7 & 5 & -3 & -6 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -3 & 2 & 8 \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}; \quad (4) \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix};$$

$$(5) \begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2 \beta & \cos^2 \beta & \cos 2\beta \\ \sin^2 \gamma & \cos^2 \gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix}.$$

【详解】 (1) 见【例 1.1】.

(2) 见【例 1.4】.

$$\begin{aligned} (3) \quad & \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} \xrightarrow[r_1+r_2]{r_1+r_3} \begin{vmatrix} 2(x+y) & 2(x+y) & 2(x+y) \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} \\ &= 2(x+y) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix} \\ & \xrightarrow[r_3-(x+y)r_1]{r_2-yr_1} 2(x+y) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x & x-y \\ 0 & -y & -x \end{vmatrix} \\ &= -2(x+y) \cdot 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} x & x-y \\ y & x \end{vmatrix} \\ &= -2(x+y)(x^2 - xy + y^2) = -2(x^3 + y^3) \\ (4) \quad & \begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix} \xrightarrow[c_4-c_1]{c_2-c_1} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 4a+4 & 6a+9 \\ b^2 & 2b+1 & 4b+4 & 6b+9 \\ c^2 & 2c+1 & 4c+4 & 6c+9 \\ d^2 & 2d+1 & 4d+4 & 6d+9 \end{vmatrix} \\ & \xrightarrow[c_4-3c_2]{c_3-2c_2} \begin{vmatrix} a^2 & 2a+1 & 2 & 6 \\ b^2 & 2b+1 & 2 & 6 \\ c^2 & 2c+1 & 2 & 6 \\ d^2 & 2d+1 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

$$(5) \begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2 \beta & \cos^2 \beta & \cos 2\beta \\ \sin^2 \gamma & \cos^2 \gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2-c_1} \begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & \cos 2\alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2 \beta & \cos 2\beta & \cos 2\beta \\ \sin^2 \gamma & \cos 2\gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix} = 0$$

5. 计算下列行列式.

$$(1) D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}; \quad (2) D_n = \begin{vmatrix} x_1 - m & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n - m \end{vmatrix};$$

$$(3) D_n = \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}, \text{其中 } a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0;$$

$$(4) D_3 = \begin{vmatrix} a^2+1 & ab & ac \\ ab & b^2+1 & bc \\ ac & bc & c^2+1 \end{vmatrix}; \quad (5) D_n = \begin{vmatrix} 1+x_1 y_1 & 1+x_1 y_2 & \cdots & 1+x_1 y_n \\ 1+x_2 y_1 & 1+x_2 y_2 & \cdots & 1+x_2 y_n \\ 1+x_3 y_1 & 1+x_3 y_2 & \cdots & 1+x_3 y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_n y_1 & 1+x_n y_2 & \cdots & 1+x_n y_n \end{vmatrix}.$$

【详解】 (1) $D_n = \begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$

$$\xrightarrow[r_1+r_2]{r_1+r_3} \begin{vmatrix} x+(n-1)a & x+(n-1)a & \cdots & x+(n-1)a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= [x+(n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1} [x+(n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix}$$

$$= [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

$$(2) D_n = \begin{vmatrix} x_1 - m & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n - m \end{vmatrix}$$