TIME-DELAYED COMPLEX SYSTEM DYNAMICS FROM NEURAL NETWORKS TO COMPLEX NETWORKS THE LATEST RESULTS OF BEHAVIOR ANALYSIS

卢文联 刘锡伟 刘波 王利利 陈天平 ◎著

时滞复杂系统动力学

从神经网络到复杂网络

DYNAMICS

◎ 时滞动力系统渐近动力学行为分析的最新成果

◎ 理论方法包括Halanay不等式的新发展、μ-稳定性于无穷长度时滞系统以及时滞微分包含等最新的研究成果

复旦大學 出版社

TIME-DELAYED COMPLEX SYSTEM DYNAMICS FROM NEURAL NETWORKS TO COMPLEX NETWORKS THE LATEST RESULTS OF BEHAVIOR ANALYSIS

卢文联 刘锡伟 刘波 王利利 陈天平 ◎著

时滞复杂系统动力学

从神经网络到复杂网络

DYNAMICS

復旦大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

时滞复杂系统动力学：从神经网络到复杂网络/卢文联等著. —上海：复旦大学出版社，2018.4
ISBN 978-7-309-13562-6

Ⅰ. 时…　Ⅱ. 卢…　Ⅲ. 时滞系统-系统动态学　Ⅳ. TP13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 036601 号

时滞复杂系统动力学：从神经网络到复杂网络
卢文联　等著
责任编辑/陆俊杰

复旦大学出版社有限公司出版发行
上海市国权路 579 号　邮编：200433
网址：fupnet@fudanpress.com　http://www.fudanpress.com
门市零售：86-21-65642857　团体订购：86-21-65118853
外埠邮购：86-21-65109143　出版部电话：86-21-65642845
浙江新华数码印务有限公司

开本 787×960　1/16　印张 13.75　字数 227 千
2018 年 4 月第 1 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-309-13562-6/T · 621
定价：58.00 元

前　言

从细胞、大脑、生态到社会系统，如何对自然和现实世界复杂系统的自组织和演化进行建模、分析和理解，成为现代科学的重大挑战. 数学、物理、生物、社会科学和工程的各个领域都面临从理论方法到计算仿真的许许多多的新问题. 毫无疑问，在复杂系统中，时滞是不可避免的. 在能量和信息资源有限的情况下，复杂系统的内部信息传输、反馈、耦合不可避免地会产生各式各样的时滞，使得复杂系统的研究面临新的挑战. 越来越复杂的和大尺度时滞系统也吸引着众多研究者的兴趣. 如何分析和度量时滞对于复杂系统的影响，既是理解系统，也是设计系统的重要需求. 时滞如何影响复杂系统的动力学行为的研究成为复杂系统研究的热点和前沿课题.

本书将通过两类复杂系统——神经网络和复杂网络——来描述如何从复杂系统的框架下研究时滞动力学系统，从而对复杂时滞动力系统的渐近动力学行为作一个严格、系统和全面的阐述. 所研究的渐近动力学行为包含稳定性、周期性、概周期性、同步性和一致性. 所研究的时滞复杂系统模型包括两大类：时滞递归神经网络和耦合时滞复杂网络动力系统. 对于前者，包含静态和时变结构、有限和无穷时滞、连续和不连续的激发函数、平衡点稳定性和周期、概周期渐近性、全空间收敛性和非负卦限的收敛性. 而对于后者，包含离散和连续时间网络系统、静态和时变结构、同步性和一致性，以及依赖于时滞的同步轨道. 时滞动力系统的理论研究，尤其在工程控制领域的研究已有近百年，出现了大量成熟的理论和有效的方法. 结合代数图理论、随机过程和动力学理论，这些理论和方法为复杂系统的研究提供了有效的技术手段. 但是，在复杂系统的框架下，系统结构和动力学行为都不同于以往用于建立时滞动力学理论的简单/一般性系统. 复杂网络都具有大量的子系统，通过线性或非线性关系耦合在一起，耦合结构具有复杂性，比如，需要用复杂网络来刻画. 系统的渐近行为，如平衡点的稳定性、周期性/概周期性、混沌、同步等复杂行为，都是需要研究的. 本书不仅基于应用经典和现

代时滞动力系统理论，更将其延展至具体的大尺度复杂系统，讨论渐近性行为理论判据的验证和在复杂系统中的实现，是本书关注的核心之一.

本书包括九章.

第一章概述时滞神经网络系统和复杂网络的动力系统模型以及动力学行为的定义.

第二章给出了本书所需的数学定义、引理和方法. 包含泛函微分系统和时滞 Filippov 系统理论、代数图论，以及随机过程与随机动力系统的一些概念.

第三章给出时滞神经网络平衡点稳定性分析. 首先，给出利用 Cauchy 收敛准则发展的有限长度方法；其次，利用矩阵不等式给出可数值验证的判据；然后，发展了 μ-稳定性理论研究收敛速率与无界时滞形态的关系；最后，讨论竞争-合作型的时滞神经网络系统在第一卦限的全局稳定性.

第四章详细讨论了时滞神经网络系统的输出同步性、周期解和概周期解的存在性和稳定性.

第五章着重研究了具有不连续激发函数时滞神经网络系统的稳定性、周期性和概周期性. 提出了时滞 Filippov 系统解的存在性，并用其证明了它可通过高斜率连续时滞神经网络系统来近似.

第六章着重讨论时滞神经网络系统的多重稳定性，包含多重稳定平衡点、多重完全稳定性和多重稳定的概周期解.

第七章研究了时滞复杂网络动力系统的同步性，特别研究了非线性耦合函数与无界时滞的情形.

第八章讨论了时滞多主体系统的一致性和牵制稳定性. 当时滞为无界时，引入了 μ 一致性的概念，讨论了其与无界时滞形态的联系；特别研究了离散时滞多主体系统同步周期轨道与时滞模式的关系.

第九章总结了本书提出和发展的关于时滞动力系统的一些新观点和新方法，并简单总结了全书内容，提出了一些今后值得研究的深层次课题.

本书的主要内容是笔者及其团队十多年来的研究结晶. 本书内容力求翔实，有关数学理论和方法尽可能作详细的介绍. 本书阐述了两类时滞复杂系统：时滞神经网络系统和时滞复杂网络动力系统，研究这些系统一系列重要的渐近行为：稳定性、周期性、概周期性和协调性. 不仅应用已有的时滞动力学行为的理论和方法，更重要的是将其延展为各类复杂系统框架下的新理论和新方法. 此外，由于神经网络和复杂网络系统的特殊性，很多时滞系统模型和行为并没有相应的理论和方法. 由此，本书发展了新的时滞动力学理论，如处理具有分布式时滞系

统、时滞微分包含系统、时变时滞系统、随机时滞系统的一些新方法和新技术. 本书可作为相关学科研究生的教材,亦可作为相关领域研究者的参考手册. 在本书的写作过程中,得到了许多专家的支持和帮助,特别感谢吴玮博士的大力支持. 本书包含的研究工作得到了国家自然科学基金项目(编号 61673119,61673298,61573015)的支持,也包含一些国内外同行的成果. 由于水平有限,时间仓促,考虑不周,错误难免,敬请智者不吝斧正。

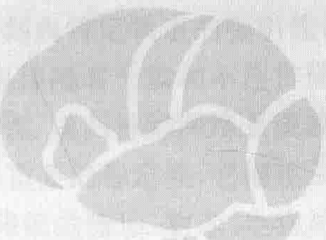
目　录

第一部分　概述与数学准备

第二部分　时滞神经网络渐近动力学行为

第一部分

概述与数学准备



第一章　绪论：时滞复杂系统

1.1　时滞复杂系统

时滞复杂动力系统的数学理论源于经典的泛函微分方程和动力系统. 与非时滞系统类似,动力系统理论描述时滞复杂系统的动力学行为([1]),可描述不同实践背景中的时滞系统. 系统的复杂性与时滞交互影响可产生丰富的动力学行为,最简单的情形是稳定平衡点. 尽管形式简单,但仍是最重要的吸引子类型. 例如,在控制系统中,平衡点刻画了控制的目标;在神经网络系统中,平衡点刻画了神经优化计算的解. 轨道稳定性是更一般的稳定性,刻画特定轨道的吸引性,如常见的周期(概周期)轨道稳定性. 这类稳定性有时也伴随着分簇和不连贯模式,比如多稳态,包括多稳定周期(概周期)轨道的存在性. 递归神经网络系统通过多稳态实现多模式识别和联想记忆. 流形稳定性也是重要的稳定性,它描述一类中心稳定性,系统并不收敛到特定轨道,而是收敛到降维的流形. 物理、生物与工程中常见的同步问题,可视为同步子空间(子流形)的稳定性. 复杂系统中子系统的非线性、子系统间的相互作用以及时滞,大大增加了这些稳定性分析的难度. 特别地,系统的不连续性对其稳定性分析提出了新的技术要求.

成熟的时滞系统理论,或者说时滞微分和差分系统理论([2]),为此类问题的分析提供了技术手段. 然而,当应用到分析具体的复杂时滞系统时,实践层面的需求使得现有方法尽管可提供研究思想上的指导,具体实践仍显不足. 例如,不动点原理是经典的证明平衡点/周期解/概周期解存在的技术手段,但是对于复杂时滞系统,条件验证非常复杂;Lyapunov-Krasovskii 泛函方法可用于处理时滞系统的稳定性,给出充分性判据,但是对于工程系统,更重要的是如何利用这些判据用于分析与设计系统结构;Halanay 微分不等式是分析时滞系统收敛性的有效工具,但是在具体模型中出现时变情形时,还须对其进行推广和发展;现有

时滞系统分析理论常常基于有界时滞的假设,而现实中时滞可能是无界的,比如采样时滞,经典方法很少有能处理无界时滞的问题. 不仅如此,在复杂系统特别是网络化复杂系统背景下,其他理论和工具,包括统计物理、图论、概率理论、仿真与优化工具的协同使用,也是分析复杂时滞系统的必要技术手段.

本书关注两类时滞复杂系统:时滞递归神经网络系统和时滞复杂网络系统. 它们构成本书的两大部分. 下面两节将分别介绍这两类系统的模型及其应用背景.

1.2 时滞神经网络的理论和模型

神经网络(或称人工神经网络)源于对大脑工作机制的研究. 文献[3]中提出将大脑看作一个复杂和非线性的并行信息处理系统,并引入了神经元作为大脑工作的基本单元这一概念. 与现在的计算机比较,从单位个体来看,神经元的处理速度仅为硅逻辑门的$\frac{1}{6}\sim\frac{1}{5}$,但是大脑通过突触将大量的神经元连接,其处理能力高出现在计算机 10^9 倍. 基于这种观点,科学家们提出了一种利用网络模型来描述大脑和神经系统工作的机制,这便是神经网络. 简而言之,它将大量简单的计算个体连接起来完成特定的计算工作. 由此可见,神经网络的本质是一种计算网络,网络性是其重要的特征.

与计算机等信息处理系统相比,神经网络有如下的特点:简单的基本处理单位(神经元),海量的神经元和复杂的连接结构. 其中最重要的是学习能力. 在文献[4]中,将学习定义为:神经网络通过一个连续的仿真过程,从环境中调整其参数. 神经网络的学习方法主要有以下这些:误差纠正学习(error-correction learning)、Hebbian 学习([5])、竞争学习(competitive learning [6])、Boltzmann 学习([7]),等等.

Aleksander & Morton(1990)提出了一个神经网络的定义([8]):神经网络是一种大规模并行分布处理系统,能获得并运用知识,满足:

(1) 知识是通过学习来获得的(这个过程称为学习算法);

(2) 知识是由相互联结的权重(weight)来存储的.

因为神经网络具有诸多优点:可解决非线性问题,自适应性、容错性和海量计算能力,所以自从 20 世纪五六十年代开始,神经网络的研究至今热潮不减.

Hecht-Nielsen(1987)和 Cybenko(1988 & 1989)提出多层神经网络感知器模型可以逼近任意连续函数([9, 10, 11]). Chen(1990)(参见[12])第一个给出了一个构造性的证明,揭示了其本质. Chen(1993, 1995a & 1995b)指出多层神经网络不仅可以逼近任意多变量连续函数,还可以逼近任意非线性泛函以及算子(参见[13, 14, 15]),其模型可以用下式表达：

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \approx \sum_{i=1}^{n} C_i s\left(\sum_{j=1}^{m} \xi_{ij} x_j + \theta_i\right). \tag{1.1}$$

这些工作为神经网络的应用奠定了理论基础. 近年来,深度神经网络与深度学习的热潮大大促进了人工智能的发展. 但从本质上来说,深度网络仍然包含在多层感知器网络的框架之内.

Cohen & Grossberg(1983 & 1988)提出了竞争-合作模型,用以产生自组织、自适应的神经网络构成方式([6, 16]). Cohen-Grossberg 神经网络可由如下常微分方程描述：

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = a_i(x_i)\left[-b_i(x_i) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} g_j(x_j) + J_i\right],\ i = 1, \cdots, n.$$

Hopfield(1984, 1986)利用能量函数发展出一套利用递归网络实现计算的方法([17, 18]). 这种模型被称为 Hopfield 神经网络：

$$\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{u_i}{R_i} + \sum_{j=1}^{n} t_{ij} g_j(u_j) + I_i,\ i = 1, \cdots, n.$$

正如 Haykin(1994)指出,无论哪种模型,神经网络可以看成一类包含非线性的信号流图(signal-flow graph)(参见[19]).

如图 1.1 所示：x_i 描述节点 i 的状态，$y_i = \phi_i(x_i)$ 是节点 i 的输出,这里 $\phi_i(\cdot)$ 是一类非线性函数(transfer function),节点 j 输出对节点 i 的权重为 t_{ij}，I_i 是外界的输入. 从这个意义上讲,神经网络可以看作一类非线性动力学网络系统. 由神经网络发展出的神经计算方法是一种基于学习的自适应的分布式计算方法. 它在优化、控制、信号处理、图像处理、模式识别和联想记忆等诸多方面有广泛的应用,而且又具有容错性好、海量计算能

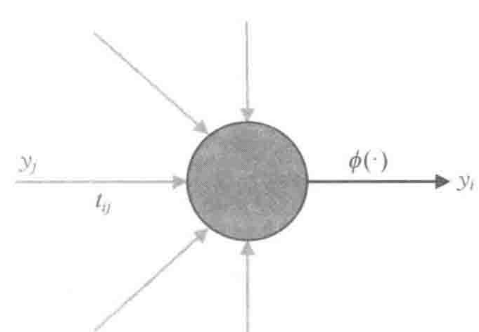


图 1.1　神经网络可看作一类非线性信号流图

力、学习能力强和自适应性等优点.学习算法的关键在于神经网络收敛到某一需要的流形上,所以神经网络的动力学形态是算法能否成功的关键,对其动力学形态的研究是神经网络应用和设计的第一步.

在实践中,由于放大器的切换速度和神经元之间的通讯速度有限,时滞不可避免.另外,在动态图像处理中,神经元之间信号传输时滞是必要的([20]).具有时滞的神经网络系统的动力学行为更为复杂.如下时滞微分方程用于描述具有时滞的神经网络动力系统:

$$\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t}=-d_i x_i(t)+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}g_j(x_j(t))+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}f_j(x_j(t-\tau_{ij}))+I_i,\quad i=1,\cdots,n. \tag{1.2}$$

这里 b_{ij} 代表神经元 j 到神经元 i 的时滞反馈,τ_{ij} 表示此传输时滞的大小.当时滞信号和无时滞(瞬时)信号的神经激发函数相同,即 $f_j=g_j$,$j=1,\cdots,n$ 时,此模型变为

$$\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t}=-d_i x_i(t)+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}g_j(x_j(t))+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}g_j(x_j(t-\tau_{ij}))+I_i,\quad i=1,\cdots,n.$$

可见,细胞神经网络(cellular neural networks,[21, 22])可视为此模型的特例(激发函数取为饱和函数).如果时滞全都一样,即 $\tau_{ij}=\tau$,此模型有如下形式:

$$\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t}=-d_i x_i(t)+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}g_j(x_j(t))+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}g_j(x_j(t-\tau))+I_i,\quad i=1,\cdots,n.$$

须指出,时滞 Cohen-Grossberg 神经网络可描述为

$$\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t}=a_i(x_i)\Big[-d_i x_i(t)+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}g_j(x_j(t))+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}g_j(x_j(t-\tau))+I_i\Big],\quad i=1,\cdots,n. \tag{1.3}$$

在现实世界的时滞神经网络中,自抑制、突触连接权重以及外部输入都有可能随时间变化,对其动力学行为的研究尤为重要.由此,在文献[23],我们提出了如下一般形式的时滞神经网络模型:

$$\frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t}=-d_i(t)x_i(t)+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t)g_j(x_j(t))+\sum_{j=1}^{n}\int_0^{\infty}f_j(x_j(t-s))\,\mathrm{d}_sK_{ij}(s)$$

$$+I_i(t),\ i=1,\ \cdots,\ n.$$

此处，$d_sK_{ij}(t,\ s)$，i，$j=1$，$\cdots$，n是关于变量s的Lebesgue-Stieltjes测度，用以描述时滞项. 例如，当$d_sK_{ij}(t,\ s)=b_{ij}\delta_{\tau_{ij}}(t-s)d_s$时（这里$\delta_a(b)$是以$a$为中心的Dirac-Delta广义函数），此方程就变为方程（1.2）了. 关于此模型的更多细节将会在之后各章中详述.

在本书中，我们将详细阐述时滞递归神经网络系统的稳定性理论和分析方法. 首先，我们考虑一般性的模型，包含Hopfield神经网络、Cohen-Grossberg神经网络、细胞神经网络. 不仅考虑连续性的激发函数，还研究具有不连续激发函数的情形. 本书的目的不仅给出目前关于此问题的一些结果，更重要的是通过这些结果展示一系列具有一定特色的分析方法，包括轨道有限长度方法、Hanalay不等式的推广、Filippov方法以及μ-稳定性方法. 我们认为，这些方法不仅可用于时滞神经网络动力学渐近行为分析，更能为其他时滞动力系统模型的分析提供方法论支持.

此类问题框架常常被分为两部分. 一是静态解轨道的存在性，比如平衡点、周期轨道、概周期轨道等. 现有工作基本上通过同调原理来处理. 在本书中，我们将介绍一些不同的分析方法. 比如，通过证明轨道的有界性，利用柯西序列性质来同时证明平衡点存在性和全局稳定性（3.1节）；系统周期解和概周期解视为任意解轨道的簇点（4.3节）. 二是此轨道的稳定性. 我们采用Lyapunov和Lyapunov-Krasovskii稳定性理论方法，但着重于稳定判据可验证性. 比如，利用线性矩阵不等式构建稳定性判据（3.1节）；细致讨论不同类型Lyapunov-Krasovskii泛函给出判据之间的关系（9.5节）. 除此之外，我们还发展和推广了Hanalay不等式，用以处理时变系数和小时滞的情形（4.1节）；建立μ-稳定性理论处理无界时滞的情形，揭示时滞增长速率与收敛速度的关系. 这些结果来自我们多年在此领域的研究成果，可参看各章节的参考文献.

1.3 时滞耦合复杂网络动力学模型

复杂网络是具有海量节点数和复杂连接拓扑结构的网络模型（[24]）. 不仅如此，复杂性还包括节点复杂的动力学行为. 它不仅包含线性和有序的模型，还包括非线性（nonlinear）和时空混沌（spatiotemporal chaos）. 复杂网络已成为近

年来研究的主要对象.

总而言之,复杂网络动力系统是具有复杂动力学行为和复杂拓扑结构的网络.在现实世界中,有很多系统都可以看作复杂网络动力系统.熟知,Laplace 矩阵和邻接矩阵可用来描述一个图.设节点编号为$(1, 2, \cdots, n)$,共 n 个节点.对于邻接矩阵 $G=(g_{ij})$, $i \neq j$, i, $j=1$, $\cdots$, n,描述了节点 i 和节点 j 的连接关系:$g_{ij}=1$ 表示 i 和 j 相互连接;$g_{ij}=0$ 表示 i 和 j 互不连接.在邻接矩阵中对角元 g_{ii} 都取零,而在 Laplace 矩阵 $L=(l_{ij})$ 中,相互连接的 i 和 j 对应 $l_{ij}=-1$;反之,$l_{ij}=0$. 对角元 l_{ii} 取为节点 i 的连接度:与节点 i 相连接的节点数目,即 $l_{ii}=\sum\limits_{j=1,\ j\neq i}^{n} l_{ij}$.可见 $L=W-G$,这里 $W=\mathrm{diag}\{l_{11}, l_{22}, \cdots, l_{nn}\}$.

20 世纪 60 年代,Erdös 和 Rényi 提出了随机图的模型来描述复杂网络的拓扑([25]),由此发展出的随机图理论研究了在图的节点数趋于无限大时,一些概率空间中的统计量的分布.这是图理论的一个重大突破.近年来,随着高性能计算机和大规模数据库的飞速发展,使用计算模拟的方法处理大尺度(large-scale)网络成为可能.这样,一些新的介于固定网络和完全随机网络的网络模型被提出来研究.在文献[26]中,作者提出了小世界网络模型(small-world).小世界网络是介于固定网络和完全随机网络的一类过渡网络;在文献[27]中,一种名为无尺度网络(scale-free)的模型被提出来.

由此可见,对系统的动力学研究不应当仅限于单个个体或者简单网络上,而应该着眼于复杂网络:复杂网络的拓扑性质对动力学形态的影响、复杂网络上非线性动力系统的动力学行为都应是研究对象.

本书中,我们将把系统的动力学行为分析放在复杂网络这个平台上进行.单个个体的动力学特征和拓扑特性对网络动力学形态的影响将成为研究的重点.

一个系统的各个子系统可能并不相同,但子系统并非孤立于其他子系统之外.事实上,它们之间有相互影响、相互连接(interaction)和相互耦合.这种连接可能很弱,但正是子系统间的连接,使得各子系统可根据其他系统的状态来调整自己的状态,从而实现整体协调性(coordination).所谓协调性,就是研究网络节点间的相互作用如何导致的整体化行为.这个概念在不同学科背景中,有着不同的表述.整体的行为和状态的协调性行为是局部个体间相互作用产生的结果.在鱼群中,每条鱼会依据周围鱼的运动来调整自己的运动状态,形成整个鱼群向中心聚集,且朝同一方向运动的形态.在传感器网络(sensor network)中,每个传感器追踪其邻接传感器的平均状态,从而使网络的校正状态调整到一致,使之协调