现代数学基础丛书 172

数理逻辑导引

冯 琦 编著

科学出版社

现代数学基础丛书 172

数理逻辑导引

冯 琦 编著

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书是作者在新加坡国立大学、北京大学和中国科学院大学为本科高年级学生开设的数理逻辑选修课和在新加坡国立大学、中国科学院数学与系统科学研究院为研究生开设的专业课程所写讲义基础上整理出来的结果. 本书主要由一阶逻辑的核心内容和有关数的逻辑探索和分析两大部分组成, 其中包括完备性、紧致性、同质缩小、型省略等基本定理; 有关数的经典理论的完全性和可定义性分析; 哥德尔不完全性定理、丘奇不可判定性定理、塔尔斯基自然数标准模型真相不可定义性定理以及巴黎–哈灵顿不完全性定理.

本书可供数学系和理论计算机科学系高年级本科生、研究生或对数理逻辑有兴趣的读者使用, 也可以作为参考材料供相关课程的教师使用.

图书在版编目(CIP)数据

数理逻辑导引/冯琦编著. —北京: 科学出版社, 2017. 9
(现代数学基础丛书; 172)
ISBN 978-7-03-054579-4

I. ①数… II. ①冯… III. ①数理逻辑 IV. ①O141

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 231053 号

责任编辑: 赵彦超 李静科 / 责任校对: 邹慧卿
责任印制: 张 伟 / 封面设计: 陈 敬

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京教图印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017 年 9 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16
2018 年 1 月第二次印刷 印张: 33 1/2
字数: 656 000

定价: 198.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

献给我的父亲和母亲！

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言, 书籍与期刊起着特殊重要的作用. 许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍, 从中汲取营养, 获得教益.

20世纪70年代后期, 我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了 10 余年, 而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着. 1978 年以后, 我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会. 当时他们的参考书籍大多还是50年代甚至更早期的著述. 据此, 科学出版社陆续推出了多套数学丛书, 其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出, 前者出版约 40 卷, 后者则逾 80 卷. 它们质量甚高, 影响颇大, 对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用.

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者, 针对一些重要的数学领域与研究方向, 作较系统的介绍. 既注意该领域的基础知识, 又反映其新发展, 力求深入浅出, 简明扼要, 注重创新.

近年来, 数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用, 还形成了一些交叉学科. 我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域.

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持, 编辑人员也为其付出了艰辛的劳动. 它获得了广大读者的喜爱. 我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展, 使它越办越好, 为我国数学研究与教育水平的进一步提高做出贡献.

杨 乐

2003 年 8 月

序　　言

这是一本有关一阶数理逻辑 (系统) 的入门指南.

逻辑 (系统) 的基本功用是可以被用来系统性地独立于任何个人意志地解决思辨过程中可能出现的分歧, 以确保思辨者理性选择并信服正确性. 要具备这样的基本功用, 逻辑 (系统) 本身就必须是系统的和正确的. 逻辑学则正是关于逻辑系统的系统性和正确性的学问. 逻辑学需要回答一个逻辑系统是怎样实现它的基本功用以及它本身为何具有所需要的系统性和正确性这样的系统问题. 因此, 这本入门指南的一个基本任务就是解答关于一阶数理逻辑系统的系统问题.

早在两千五百年前, 古希腊哲学家柏拉图就主张以辩证法来保证结论的合理性由前提的合理性所提供; 他的学生亚里士多德系统地建立起形式逻辑, 明确了结论与前提间合理性正确的依赖关系以及导出规则. 在长达将近两千三百年的时间区间上, 亚里士多德的形式逻辑系统一直主导着西方思想界的正确观. 这个期间应用这种形式逻辑的典范自然要算欧几里得的几何学. 但是, 亚里士多德的形式逻辑系统的系统性存在着极大的缺陷, 它的正确性也没有得到保证.

大约三百五十年前, 德国的哲学家莱布尼兹清楚地意识到解决亚里士多德形式逻辑系统正确性问题的一种途径便是建立起符号计算体系, 就如同代数学那样, 通过对于符号的演算来解决思辨过程中的分歧, 从而确保正确性. 解析莱布尼兹之梦的第一人是英国的一位中学教师布尔. 1847 年, 布尔成功地将亚里士多德的形式逻辑解释为布尔代数理论, 或者称布尔逻辑. 正是基于布尔的这种代数理论, 莱布尼兹的符号计算之梦得以实现; 现代计算机及其逻辑电路才有所依赖. 本书的第 1 章正是关于命题逻辑系统的理论. 我们将会看到亚里士多德形式逻辑系统的正确性问题是怎样得到解决的. 命题逻辑系统原本可以植入到后面的一阶逻辑系统之中. 之所以分开单独为一章, 就在于从形式逻辑到命题符号逻辑恰恰是人类经历过的具有重要意义的一次纯粹的抽象. 真正理解这种符号化抽象自然将是非常有益的.

亚里士多德形式逻辑的系统缺陷的明显之处在于它甚至不能满足欧几里得几何学的需要, 因为这个系统之中的规范表达式都只能是极其简单的表达式. 为了满足数学理论发展的需要, 逻辑学亟待重生. 19 世纪后半叶正是逻辑学获得重生的时期. 1879 年, 德国哲学家弗雷格在命题演算系统的基础上引进了对于在实在论域之中变化的变元进行限定的作用符 —— 量词, 明确规定了命题符号中的基本形式和规范形式, 以及明确了所有的演算推理规则. 一阶数理逻辑系统由此被建立起

来. 十年之后, 1889 年, 意大利数学家皮阿诺在弗雷格一阶数理逻辑体系下建立起关于自然数的皮阿诺算术系统, 开启了现代数学在一阶数理逻辑框架之下重构的先河.

这本指南将用现代语言来解释弗雷格的一阶数理逻辑演算系统, 并解释这个系统怎样实现它的基本功用, 以及它的系统性和正确性.

这本入门指南的一个延展任务是在一阶数理逻辑的框架下解释关于数这个概念的认识历程和结果. 这种解释将集中在关于数这个概念的五种基本解释结构理论 —— 自然数、整数、有理数、实数和复数 —— 之上. 这里着重回答的问题包括两类: 各种相应的数概念的解释结构理论是否完全? 它们上面的可定义性如何? 在一定意义上, 可以说现代数学理论基本上都围绕着各种各样结构对象的存在性问题、分类问题以及它们上面的可定义性问题展开. 本书作者正是希望通过对这些人所共知几乎成为人们常识的结构对象的分析来阐明一阶数理逻辑具备强大的数学的系统功能.

这本导引相当大一部分是我在中国科学院大学给高年级本科生和一年级研究生讲授 "数理逻辑" 课程的综合产物. 这本导引中还有一些素材是我给中国科学院数学研究所几位从事数论或代数研究的同事以及他们的研究生开设的一个系列讲座的产物. 我将这本书称之为导引, 本意是完成一种抛砖引玉的过程. 对于像数理逻辑这样一个纯粹思维理论的领域, 我不会奢望对它有多么深刻和广博的理解, 但愿我这点微薄的理解可以带给初次接触并有心进入这个纯粹而美妙领域的后来者一些微不足道的启迪. 如果这本导引能够有助于某位后生找到打开一扇让他一辈子感受无穷乐趣的智慧宇宙大门的钥匙, 那么我会感到非常欣慰. 我自己曾经得益于哈尔滨工业大学的孙希文先生和宾州州立大学的耶赫 (T. Jech) 先生, 以及他们所使用的教材 —— 一本由一位美国杜克大学的逻辑学家熊费尔德 (Shoenfield) 所写的《数理逻辑》[①]. 孙老师将我引进了这个纯粹思维的美妙世界; 熊费尔德书中为论域中的个体命名, 以建立一种所需要的理论的做法令我体会到什么是纯粹的兴奋; 正是这种难以遏制的兴奋驱使我到美国后离开了计算机软件专业跑到宾州州立大学拜耶赫为师; 耶赫老师引导我在无穷世界安身立足. 熊费尔德是一位卓越的作者, 他的书引人入胜, 美妙绝伦. 这也便是 (国际) 符号逻辑协会在他去世之后专门设置熊费尔德奖以奖励那些优秀的数理逻辑学著作或论文的作者, 从而激励后生们以熊费尔德为榜样致力于精致著书立说. 我曾经在读研究院的时候有幸在波士顿当面受教于熊费尔德, 一位绅士般的学者. 写下这几行文字, 是我对尊敬的孙老师和耶赫老师的一种感谢, 以及对熊费尔德先生的一种缅怀.

熊费尔德的《数理逻辑》一书应当是面向研究生的. 本书则是面向高年级本科

① *Mathematical Logic*, R. Shoenfield, Addison-Wesley Pub., 1965.

生的. 但熊费尔德的《数理逻辑》一书自然而然会是我的参考书. 事实上本书中哥德尔不完全性定理的证明便是参照熊费尔德的《数理逻辑》而写的, 因为那毕竟是我自以为读懂哥德尔不完全性定理及其证明的唯一的一本书, 也是我为中国科学院数学所和新加坡国立大学数学系数理逻辑研究生开设的 "数理逻辑" 课程的教材. 写这本导引的原始激励来自新加坡国立大学的庄志达教授, 一位不可多得的二十年多年的朋友和同事. 正是他直接问我: 为什么不写一本中文版的《数理逻辑》教材呢? 我似乎一直还在等待什么. 激励我改变惰性状态的是由美国加州大学数学系斯莱曼 (T. Slaman) 教授和武丁 (H. Woodin) 教授合写的《伯克利本科生数理逻辑讲义》①. 这是一本大约 120 页的英文讲义. 我曾经在新加坡国立大学给高年级本科生以这本讲义为教材开设一学期的 "数理逻辑" 课程, 以及以这本英文讲义为蓝本在北京大学为 7 位高年级本科生开设过一个学期的中文 "数理逻辑" 课程. 这本讲义的一个基本特点就是以有理数轴、实数轴、整数轴以及自然数轴为具体的例子来展开一阶逻辑系统和基本理论的创建和分析. 受到这种激励自然得益于自己二十多年来与这本讲义的两位作者的友情交往. 考虑到我们应当对中国科学院大学有心接触数理逻辑的高年级学生有更高一些的定位, 我便试图在这本伯克利讲义的基础上扩充成现在这本导引. 无疑, 这本导引实际上极大地受惠于斯莱曼和武丁的伯克利讲义. 这本导引扩充所需要的素材许多都直接取自我所熟悉的另外一位逻辑学家的杰作, 一本由美国伊利偌伊大学芝加哥分校的马克教授为研究生所写的教科书《模型论导引》②. 这本导引中有关实数域理论以及巴黎–哈灵顿独立性定理的部分内容基本上取自马克教授的书. 在数理逻辑界, 与我同龄的数理逻辑研究生们一般都会花不少时间来学习张和凯斯勒的《模型论》③ 以及萨克斯的《饱和模型论》④. 很明显, 这本导引不可避免地借用这些作者的优美陈述. 很荣幸, 我曾经有过当面向凯斯勒教授 (威斯康辛大学) 和萨克斯教授 (哈佛大学与麻省理工学院) 讨教的机会. 借此机会, 我谨向庄志达、斯莱曼、武丁、马克教授表示真诚的感谢以及向凯斯勒先生和萨克斯先生表示诚挚的敬意. 也借此机会谨向我在中国科学院数学研究所的同事王元院士、杨乐院士、席南华院士以及李邦河院士表示真诚的感谢和诚挚的敬意, 感谢他们多年来一直对我个人以及对数理逻辑在数学所、数学院乃至我国的发展给予的关怀、帮助和支持. 还请允许我表达对中国科学院软件研究所黄且圆女士的怀念之情, 一位难以忘怀和值得敬重的中国数理逻辑学界的先辈和故友. 最后请允许我向科学出版社和通读这本导引初稿并提出许多宝贵修改建议的李静科编辑表达最真诚的感激之情.

① *Mathematical Logic* (The Berkeley Undergraduate Course), T. Slaman & H. Woodin, (Lecture Notes in pdf, 2010)

② *Model Theory, An Introduction*, D. Marker, Springer, 2002.

③ *Model Theory*, C.C.Chang, H.J.Keisler, North-Holland, Amsterdam, 1990.

④ *Saturated Model Theory*, G. E. Sacks, (Benjamin, 1973), World Scientific, 2010.

在这本导引的写作和出版过程中, 我曾得益于由席南华院士所主持的国家自然科学基金委 “代数与数论创新研究群体” 项目 (项目编号: 11621061) 的资助, 特在此致谢.

冯　琦

2017 年 7 月 31 日

中国科学院数学与系统科学研究院

中国科学院大学

目　　录

《现代数学基础丛书》序

序言

第 0 章　引言 ························ 1

第 1 章　命题逻辑 ························ 10

1.1　基本问题 ························ 10

1.2　命题表达式 ························ 12

1.3　逻辑赋值与可满足性 ························ 14

1.4　布尔函数可表示性 ························ 16

1.5　可证明性与一致性 ························ 19

1.6　形式证明的几组例子 ························ 22

1.7　完备性 ························ 28

1.8　第一完备性证明 ························ 30

1.9　命题逻辑紧致性 ························ 34

1.10　命题范式 ························ 35

1.11　命题逻辑与布尔代数 ························ 38

1.12　练习 ························ 40

第 2 章　一阶语言和一阶结构 ························ 43

2.1　一组经典例子 ························ 43

2.2　一阶语言 ························ 44

2.2.1　符号 ························ 44

2.2.2　项 ························ 45

2.2.3　表达式 ························ 47

2.2.4　自由变元和受囿变元 ························ 50

2.2.5　替换与可替换性 ························ 51

2.3　一阶结构 ························ 52

2.3.1　项赋值 ························ 53

2.3.2　满足关系 ························ 54

2.3.3　局部确定性定理 ························ 55

2.3.4　替换定理 ························ 59

2.3.5　缩写表达式 ························ 68

2.4 几个一阶语言和结构的例子 …… 69
2.5 数与数的集合 …… 79
2.5.1 自然数 …… 81
2.5.2 整数 …… 84
2.5.3 有理数 …… 85
2.5.4 实数 …… 86
2.5.5 复数 …… 91
2.6 练习 …… 91
第 3 章 一阶结构之同构、同样与同质 …… 93
3.1 预备知识：可数与不可数 …… 93
3.2 一阶结构之同构与同样 …… 95
3.2.1 有理数轴 …… 95
3.2.2 同构 …… 100
3.2.3 同样 …… 103
3.3 可定义性 …… 104
3.3.1 可定义性 …… 104
3.3.2 不变性 …… 107
3.3.3 实数轴区间定理 …… 108
3.4 同质子结构 …… 110
3.4.1 子结构、扩充结构与裁减结构 …… 110
3.4.2 结构元态与全息图 …… 112
3.4.3 同质子结构 …… 112
3.4.4 同质与同样 …… 113
3.4.5 塔尔斯基判定准则 …… 114
3.4.6 实数轴同质子轴 …… 116
3.4.7 同质缩小定理 …… 117
3.4.8 稠密线性序 …… 120
3.4.9 嵌入与同质嵌入 …… 120
3.5 练习 …… 123
第 4 章 逻辑推理与逻辑结论 …… 128
4.1 逻辑推理 …… 128
4.1.1 逻辑公理 …… 128
4.1.2 推理 …… 129
4.2 推理细致分析定理 …… 130
4.2.1 演绎定理 …… 130

4.2.2 全体化定理 …… 133
4.2.3 常元省略定理 …… 133
4.2.4 等式定理 …… 136
4.3 逻辑结论 …… 138
4.3.1 可满足性 …… 138
4.3.2 真实性与模型 …… 138
4.3.3 逻辑结论 …… 140
4.3.4 基本问题 …… 141
4.3.5 范例 …… 141
4.4 一阶逻辑系统之完备性 …… 149
4.4.1 可靠性定理 …… 149
4.4.2 哥德尔完备性定理 …… 152
4.4.3 极大一致性 …… 152
4.4.4 自显存在特性 …… 153
4.4.5 可满足性定理 …… 155
4.4.6 扩展定理 …… 164
4.4.7 节省常元方法 …… 166
4.5 $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$-哥德尔完备性定理 …… 168
4.5.1 谓词符省略引理 …… 169
4.5.2 函数符省略引理 …… 169
4.5.3 无关符号忽略定理 …… 170
4.5.4 前束范式 …… 171
4.6 练习 …… 176
第 5 章 同质放大模型 …… 178
5.1 紧致性定理 …… 178
5.1.1 关于有限之概念 …… 178
5.1.2 关于秩序之概念 …… 182
5.2 同质放大定理 …… 182
5.3 第二紧致性定理 …… 184
5.4 超积和超幂 …… 186
5.4.1 超滤子存在定理 …… 186
5.4.2 超积与超幂 …… 187
5.4.3 超积基本定理 …… 189
5.4.4 超积构造六例 …… 191
5.5 同质放大链 …… 193

5.6 练习 ······ 199
第 6 章 完全性与模型完全性 ······ 202
6.1 完全性 ······ 202
6.1.1 等势同构 ······ 205
6.1.2 有理数区间代数理论 ······ 206
6.1.3 可数广集模型 ······ 209
6.2 量词消去 ······ 210
6.2.1 完全性充分条件 ······ 213
6.2.2 T_{odl} 适合量词消去 ······ 214
6.3 子结构完全性 ······ 222
6.3.1 T_{odl} 具备子结构完全性 ······ 226
6.3.2 T_{BA}^{d} 具备子结构完全性 ······ 227
6.4 模型完全性 ······ 228
6.4.1 量词简化 ······ 231
6.4.2 模型完全性与 Π_2-理论 ······ 236
6.5 练习 ······ 237
第 7 章 可数模型 ······ 240
7.1 类型排斥定理 ······ 240
7.1.1 类型 ······ 240
7.1.2 接纳与排斥 ······ 242
7.1.3 例子 ······ 246
7.1.4 根本型 ······ 248
7.1.5 局部排斥型 ······ 249
7.1.6 型排斥定理 ······ 251
7.2 可数等势同构类型特征 ······ 256
7.2.1 可数等势同构特征定理 ······ 256
7.2.2 可数模型的个数与 Vaught 猜想 ······ 261
7.3 类型空间 ······ 261
7.3.1 稳定性 ······ 263
7.3.2 型与超滤子 ······ 265
7.4 饱和模型 ······ 268
7.4.1 有理数轴饱和性 ······ 268
7.4.2 饱和结构 ······ 270
7.4.3 可数饱和模型 ······ 271
7.4.4 ω_1-饱和结构 ······ 277

7.5　基本模型 ······ 279
7.6　极度自同构模型 ······ 287
7.6.1　非刚性与无差别元集 ······ 287
7.6.2　自然数集合划分定理 ······ 289
7.6.3　无穷无差别元子集模型定理 ······ 293
7.6.4　内置斯科伦函数与斯科伦闭包 ······ 294
7.7　练习 ······ 298
第 8 章　代数封闭域理论 ······ 301
8.1　代数封闭域同构分类 ······ 301
8.2　代数封闭域适合消去量词 ······ 302
8.3　ACF 子结构完全性 ······ 307
8.4　代数封闭域饱和特性 ······ 308
8.5　复数域与特征为素数的代数封闭域 ······ 310
8.6　练习 ······ 313
第 9 章　实封闭域理论 ······ 315
9.1　实数域公理化 ······ 315
9.2　实封闭域理论与有序实封闭域理论 ······ 320
9.3　有序实封闭域理论适合消去量词 ······ 323
9.4　实封闭域模型完全性 ······ 325
9.5　半代数子集 ······ 327
9.6　练习 ······ 334
第 10 章　有理数加法算术理论 ······ 336
10.1　有理数加法群理论 ······ 336
10.1.1　公理刻画 T_{dag} ······ 336
10.1.2　T_{dag}-完全性 ······ 337
10.1.3　T_{dag} 强极小性 ······ 342
10.1.4　T^1_{dag}-理论 ······ 342
10.1.5　序可定义性问题 ······ 343
10.2　有理数有序加法群理论 ······ 345
10.2.1　公理刻画 T_{odag} ······ 345
10.2.2　T_{odag}-完全性 ······ 347
10.2.3　T_{odag}-序极小性 ······ 349
10.3　练习 ······ 350
第 11 章　整数加法算术理论 ······ 352
11.1　多种整数加法算术理论 ······ 352

11.1.1　六个结构 ······ 352
11.1.2　三种公理化 ······ 353
11.2　强整数加法群理论 ······ 356
11.2.1　特征 0 模数同余加法群理论 ······ 356
11.2.2　整数序不可定义性 ······ 361
11.3　整数有序强加法群理论 ······ 362
11.3.1　有序模数同余加法群理论 ······ 362
11.4　普瑞斯柏格算术理论 ······ 369
11.4.1　初等整数有序加法理论 T_I ······ 369
11.4.2　非标准模型 $\mathcal{Z}_0$ ······ 370
11.4.3　普瑞斯柏格算术理论 T_{pr} ······ 371
11.4.4　T_{pr} 之保守扩充 ······ 372
11.5　练习 ······ 378
第 12 章　自然数序理论与有序加法理论 ······ 381
12.1　自然数序理论 ······ 381
12.1.1　自然数序公理化 ······ 381
12.1.2　半整齐模型 ······ 384
12.1.3　自然数序之饱和模型 ······ 390
12.1.4　自然数序理论完全性 ······ 395
12.2　自然数有序加法理论 ······ 399
12.2.1　有序强加法幺半群理论 ······ 399
12.2.2　有序模数同余加法幺半群理论 ······ 400
12.2.3　保守扩充 T^*_{oasg} ······ 411
12.3　练习 ······ 411
第 13 章　自然数算术理论 ······ 415
13.1　初等数论 ······ 416
13.1.1　初等数论之不完全性 ······ 416
13.1.2　T_N 与自然数 Σ_1 真相 ······ 419
13.1.3　Σ_1 真相定理之形式证明 ······ 424
13.2　哥德尔第一不完全性定理 ······ 430
13.2.1　序列数 ······ 432
13.2.2　符号数与表示数 ······ 435
13.2.3　基本逻辑概念表示 ······ 437
13.2.4　逻辑公理谓词 ······ 439
13.2.5　可计算性与递归函数 ······ 443

13.2.6 有效公理化与可判定性 ······ 449
13.2.7 可表示性 ······ 451
13.2.8 哥德尔不动点引理 ······ 456
13.2.9 哥德尔第一不完全性定理 ······ 457
13.2.10 不可判定性与真相不可定义性 ······ 459
13.3 哥德尔第二不完全性定理 ······ 460
13.3.1 依定义扩充 ······ 461
13.3.2 皮阿诺算术理论递归扩充 ······ 468
13.3.3 T_{PA} 递归扩充之 Σ_1-完全性 ······ 477
13.3.4 PA_f 知道 T_{PA} 之 Σ_1 完全性 ······ 480
13.3.5 一个不可被 T_{PA} 所证明的 Π_1 真语句 ······ 483
13.3.6 形式化 PA_f 之证明 ······ 485
13.4 巴黎-哈灵顿划分原理之独立性 ······ 488
13.4.1 自然数压缩写像划分原理 ······ 488
13.4.2 拉姆齐有限划分定理 ······ 492
13.4.3 皮阿诺算术模型中无差别元子集 ······ 493
13.4.4 巴黎–哈灵顿划分原理独立于皮阿诺算术理论 ······ 497
13.5 练习 ······ 499
索引 ······ 502
《现代数学基础丛书》已出版书目 ······ 511