连续介质力学教程

LIANXU JIEZHI LIXUE JIAOCHENG

段士伟　李平◎编著

安徽师范大学出版社

国家自然科学基金青年项目（钢纤维混凝土的含损伤压剪藕合动态本构关系和抗侵彻机理，项目编号：11202206）资助

国家自然科学基金面上项目（混凝土材料损伤演化方程、含损伤动态本构关系及其抗侵彻破坏机理的多尺度研究，项目编号：11472008）资助

国家自然科学基金青年项目（一种基于微裂纹损伤演化理论的动态本构模型在混凝土抗侵彻中的应用，项目编号：11402266）资助

连续介质力学教程

LIANXU JIEZHI LIXUE JIAOCHENG

段士伟 李平◎编著

安徽师范大学出版社

·芜湖·

图书在版编目(CIP)数据

连续介质力学教程 / 段士伟, 李平编著 .—芜湖:安徽师范大学出版社,2017.12
ISBN 978-7-5676-3128-1

Ⅰ.①连… Ⅱ.①段… ②李… Ⅲ.①连续介质力学-高等学校-教材 Ⅳ.①O33

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第218025号

连续介质力学教程

段士伟 李 平 编著

责任编辑:吴毛顺
装帧设计:黄 洁
出版发行:安徽师范大学出版社
芜湖市九华南路189号安徽师范大学花津校区 邮政编码:241000
网 址:http://www.ahnupress.com/
发 行 部:0553-3883578 5910327 5910310(传真) E-mail:asdcbsfxb@126.com
印 刷:虎彩印艺股份有限公司
版 次:2017年12月第1版
印 次:2017年12月第1次印刷
规 格:700 mm × 1000 mm 1/16
印 张:8.75
字 数:138千字
书 号:ISBN 978-7-5676-3128-1
定 价:26.50元

前　言

连续介质力学主要研究连续介质（主要是流体和固体）在外部（主要是力和热）作用下的变形、损伤和破坏的宏观规律。在连续介质力学中，人们把物质看作一系列微观上足够大、宏观上足够小的“粒子”或“微团”的连续集合，从而可以认为每一“粒子”在每一时刻占有一个几何上的点，并具有相应的各种物理量的统计平均宏观值，因此可以应用场论和张量分析工具来研究介质的运动规律。尽管细观力学作为一门学科已经兴起，连续介质力学在其发展中逐渐吸收了其中的一些成果，并引入一些物质运动的细观描述，但总体上讲，连续介质力学所应用的研究方法仍然是宏观描述的方法。与包括气态、液态的流体和固态的固体一样，等离子体同时也是物质的单独一态；外部作用除了力和热的作用之外，还包括电磁、光、化学、生物的作用等，但传统的连续介质力学以及本书将基本上不涉及这些复杂的内容。

本课程之所以重要，主要是因为该课程的基本理论框架涉及变形体力学最重要的基本知识，如张量分析的基本知识，介质运动、变形和受力的描述方法，连续介质的守恒定律和场方程组，材料本构关系的基本理论等，对力学以及相关工程学科都是很重要和不可或缺的。现代科学技术的发展不仅没有降低该课程的地位和重要性，而且随着新的科技成果的不断出现，该课程的理论框架和主要内容也在不断完善、充实和提高中得到发展，并在解决新的科学问题方面发挥着越来越重要的作用。很长时期特别是近几十年来，随着科学技术的发展和进步，连续介质力学与其他各类重要学科不断交叉和渗透，因此本课程不但一直是理论和应用力学专业的必修专业基础课，而且成为工程热物理、机械工程、航天工程、生物医学工程、材料科学等很多相关学科和专业的重要专业基础课。国内外著名大学相关专业的课程表几乎都有连续介质力学课程或以该

课程主要知识为内容的类似课程。

全书共分为六章，内容包括笛卡尔张量概论、应力分析、主应力和主方向、连续介质的运动和变形、连续介质守恒定律的场方程组、材料的本构关系。本书稿内容深入浅出，注重基本概念的准确性和理论体系的严密性，注重将严格的数学推导和清晰的物理概念相结合，力图使读者既不停留在繁琐的数学公式推导中，也不停留在粗浅的物理现象描述上，而是能清晰地认识数学公式所包含的深刻物理实质。本书适合力学类专业本科生及研究生阅读使用，也可供相关专业的学者、研究人员参考。

由于作者水平有限，错误和不当之处在所难免，欢迎广大读者指正。

目　录

第一章

笛卡尔张量概论

1.1 引 言

张量分析和量纲分析的工具是自然科学的两大基石，具有十分重要的意义。自然界中各种物理量都可以纳入张量的框架统一描述，或者说只有把它们作为张量来描述时，才能清楚地揭示这些物理量与具体坐标系无关的不变性本质，并揭示联系各种物理量间相互关系的物理定律的不变性本质，这就是张量概念和张量方程概念的基本价值。自从爱因斯坦1915年发表著名的广义相对论以来，一方面来自物理学(相对论、场论)的概念促进了张量分析理论的发展；另一方面，张量分析理论在物理学的发展中起着越来越重要的作用，甚至可以说，张量分析工具长期以来在自然科学中起着某种不可替代、不可或缺的基础性作用。

本书从连续介质力学的物理学应用和需要的角度出发，主要在笛卡尔坐标系中介绍张量知识，即介绍笛卡尔张量知识。为此目的，本书从现实的三维欧几里得(Euclid)空间出发，主要以均匀地分布于空间的直角笛卡尔坐标系为工具，介绍张量的概念和张量的代数及其微分和积分运算，并以局部正交基间基变换的概念为基础，介绍正交曲线坐标系中的笛卡尔张量。本书读者应是掌握了高等数学中矢量代数和矢量分析的有关知识，因此本书不再赘述有关矢量空间的系统理论，而是直接以矢量代数和矢量分析知识为基础，逐步深入地介绍张量分析的基础理论和方法。

1.2 指标记法与求和约定

自然界中各种物理量都是客观实在量，它们不依赖于坐标系而存在。但是，为了对这些量进行刻画和表征以便进行运算，常需要选择一定的坐标系，把各种物理量在坐标系中的所谓分量作为它们在此坐标系中的“表象”(Representation)。在欧几里得空间中，人们最常用的坐标系是直角笛卡尔坐标系 (x,y,z) (Rectangular Cartesian Coordinates System)。为书写方便，在张量分析中人们广泛采用所谓的“指标记法”(Index Notation)，即用带指标的 $x_i\,(i=1,2,3)$ 来代替 (x,y,z)。类似地，用 $\boldsymbol{e}_i\,(i=1,2,3)$ 表示坐标轴 x_i 方向上的单位基矢量，在直角笛卡尔坐标系中，它们形成长度为1且两两正交的所谓幺正基或法化基(Unitary or Normalized Basis)。笛卡尔张量理论中，人们常用下标(Subscripts)，而在一般张量理论中常需要同时采用上标(Superscripts)和下标。于是，对欧几里得空间中任一点 A 相对于坐标原点 O 的矢径 $\boldsymbol{x}=\overline{OA}$ 及空间的任何一个矢量 $\boldsymbol{a}$，可以按平行六面体法则(这里是长方体法则)进行线性分解写出

$$\begin{cases}\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+x_3\boldsymbol{e}_3=x_i\boldsymbol{e}_i\\ \boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3=a_i\boldsymbol{e}_i\end{cases}\tag{1.2.1}$$

其中 x_i 和 a_i 分别是矢量 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 在幺正基矢量 $\boldsymbol{e}_i$ 上的分解系数，这是大家在解析几何中所熟知的。笛卡尔张量理论中，人们还广泛采用所谓的“求和约定”(Summation Convention)，公式(1.2.1)中的最后两个等号即应用了“求和约定”。“求和约定”的含义是：若某个指标在某一单项式中重复出现，则该项代表一个和式，意味着将此指标从1至3历遍取值并对所得的3项求和(如果是在 n 维欧几里得空间中，便是对其从1至 n 历遍取值并对所得的 n 项求和)。我们把重复出现而对其约定求和的指标称为“哑标”(Dummy or Dumb Index)，如公式(1.2.1)中的指标 i 即是哑标。显然，哑标只有形式上的意义，并不表示1、2、3中某一个确定的值。因此，可将式(1.2.1)中的哑标 i 改为任意其他指标而并不改变该式的最后结果，例如，$\boldsymbol{a}=a_i\boldsymbol{e}_i=a_j\boldsymbol{e}_j=a_k\boldsymbol{e}_k$ 等都可以。

对于幺正基 $\boldsymbol{e}_i$，其幺正条件可以表达为

$$\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} = 1, 2, 3 \tag{1.2.2}$$

其中的记号 δ_{ij} 称为克罗尼克尔记号(Kronecker Symbol or Kronecker Delta),在张量运算中具有重要的作用,如果将 δ_{ij} 的9个分量排成一个矩阵,它恰好与单位矩阵相对应。与式(1.2.1)的下标 i 不同,式(1.2.2)中的指标 i 和 j 都没有出现重复,它可代表1、2、3中某一个确定的值,我们称这样的指标为"自由指标(Free Index)"。因此,式(1.2.1)只代表1个式子,它含有3项之和,而式(1.2.2)代表9个式子。在张量运算中,正确区分"哑标"和"自由指标"并明确其不同的作用是十分重要的,张量运算中的许多错误常常是与指标选取不当或对指标作用认识上的错误有关,读者对这点必须特别注意。

根据 δ_{ij} 的定义与"求和约定"的含义,很容易理解如下各个恒等式:

$$\begin{cases} \delta_{ii} = 3 \\ \delta_{ik}\delta_{kj} = \delta_{ij} \\ \delta_{ij}\delta_{ij} = \delta_{jj} = 3 \\ a_i\delta_{ij} = a_j \\ A_{ik}\delta_{kj} = A_{ij} \\ \delta_{ij} = \delta_{ji} \end{cases} \tag{1.2.3}$$

由上式可见,δ_{ij} 作为一个因子与任何一个量相乘时,起到改换指标的作用,即它的作用是:将与之相乘的因子中同 δ_{ij} 中某一重复的哑标改换为 δ_{ij} 中的另一指标。

将任意矢量 $\boldsymbol{a}$ 在直角笛卡尔坐标系中的分解式(1.2.1)的两端与基矢量 $\boldsymbol{e}_j$ 进行点积,即可求出分解系数 a_j:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = a_i \delta_{ij} = a_j \quad (j = 1, 2, 3) \tag{1.2.4}$$

这里利用了 δ_{ij} 的定义式(1.2.2)和其换标作用式(1.2.3)。将公式(1.2.4)中的自由指标 j 改为 i,并将之与公式(1.2.1)结合起来,有

$$\begin{cases} \boldsymbol{a} = a_i \boldsymbol{e}_i \\ a_i = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{e}_i \end{cases} \tag{1.2.5}$$

这是读者在解析几何中早就熟知的。(1.2.5)的第一式称为矢量 $\boldsymbol{a}$ 在幺正基 $\boldsymbol{e}_i$ 上的线性分解式,第二式则表明其分解系数 a_i 等于矢量 $\boldsymbol{a}$ 在幺正基 $\boldsymbol{e}_i$ 上的正交投影。

在张量运算中还常用到另一个量 e_{ijk},称为"置换记号(Permutation

Symbol)”,有的书上称为列维—悉维塔(Levy-Civita)记号,它是一个有3个指标的三阶系统,定义为

$$e_{ijk}=\begin{cases}1 & \text{当}ijk\text{为123的正序时}\\-1 & \text{当}ijk\text{为123的逆序时}\\0 & \text{其他}\end{cases}\tag{1.2.6}$$

上式中的指标 i, j, k 均为自由指标,故它包括 $3^3=27$ 个式子,其中有3个为“1”,3个为“-1”,余下的21个分量全为“0”。将下式右端的行列式展开易见 e_{ijk} 和 δ_{ij} 之间存在如下关系:

$$e_{ijk}=\begin{Vmatrix}\delta_{1i} & \delta_{1j} & \delta_{1k}\\ \delta_{2i} & \delta_{2j} & \delta_{2k}\\ \delta_{3i} & \delta_{3j} & \delta_{3k}\end{Vmatrix}\tag{1.2.7}$$

如果选取的幺正基 $\boldsymbol{e}_i$ 组成右手系(今后一般情况下总是这样规定),则根据解析几何中矢量混合乘积的定义,显然有

$$e_{ijk}=\boldsymbol{e}_i\left(\boldsymbol{e}_j\times\boldsymbol{e}_k\right)\tag{1.2.8}$$

此外,不难证明如下的一些恒等式成立:

$$\begin{cases}e_{ijk}=e_{jki}=e_{kij}\quad e_{ijk}=-e_{jik}\quad e_{ijk}=-e_{ikj}\quad e_{ijk}=-e_{kji}\\ e_{ijk}e_{ijk}=6\\ \boldsymbol{a}_i\left(\boldsymbol{a}_j\times\boldsymbol{a}_k\right)=e_{ijk}\boldsymbol{a}_1\left(\boldsymbol{a}_2\times\boldsymbol{a}_3\right)\quad\left(\text{对任意的3个矢量}\boldsymbol{a}_1\text{、}\boldsymbol{a}_2\text{、}\boldsymbol{a}_3\right)\\ \boldsymbol{e}_i\left(\boldsymbol{e}_j\times\boldsymbol{e}_k\right)=e_{ijk}\boldsymbol{e}_1\left(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3\right)\quad\left(\text{上式取}\boldsymbol{a}_i\text{为}\boldsymbol{e}_i\text{时}\right)\\ e_{ijk}A_{jk}=0\quad\left(\text{当}A_{jk}=A_{kj}\text{时}\right)\end{cases}\tag{1.2.9}$$

当幺正基 $\boldsymbol{e}_i$ 组成右手系时,利用解析几何中两个矢量叉乘的定义,有如下9个恒等式:

$$\begin{cases}\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_1=-\boldsymbol{e}_3 & \boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_2=-\boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_3=-\boldsymbol{e}_2\\ \boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_1=0 & \boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_2=0 & \boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_3=0\end{cases}$$

利用置换记号 e_{ijk},可将这9个恒等式统一地写为

$$\begin{cases}\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_j=e_{ijk}\boldsymbol{e}_k & \left(i=1, 2, 3\quad j=1, 2, 3\right)\\ \boldsymbol{e}_i=\dfrac{1}{2}e_{ijk}\boldsymbol{e}_j\times\boldsymbol{e}_k & \left(i=1, 2, 3\right)\end{cases}\tag{1.2.10}$$

利用前面的公式,还可以求出任意2个矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的点积、叉积以及任意3个矢量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 的混合乘积的表达式。对点积,有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_i\boldsymbol{e}_i\cdot b_j\boldsymbol{e}_j=a_ib_j\delta_{ij}=a_ib_i$$

即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_ib_i \tag{1.2.11}$$

对叉积,有

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\left(a_i\boldsymbol{e}_i\right)\times\left(b_j\boldsymbol{e}_j\right)=a_ib_je_{ijk}\boldsymbol{e}_k$$

即

$$\begin{cases}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=a_ib_je_{ijk}\boldsymbol{e}_k\\ \left(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\right)_k=a_ib_je_{ijk}=e_{kij}a_ib_j\end{cases} \tag{1.2.12}$$

对混合积,有

$$\boldsymbol{a}\left(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\right)=a_i\boldsymbol{e}_i\left(b_j\boldsymbol{e}_j\times c_k\boldsymbol{e}_k\right)=a_ib_jc_ke_{ijk}$$

即

$$\boldsymbol{a}\cdot\left(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\right)=a_ib_jc_ke_{ijk} \tag{1.2.13}$$

利用置换记号 e_{ijk} 还可以将任意一个 3×3 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式之值 $\|\boldsymbol{A}\|$ 写为

$$\|\boldsymbol{A}\|=e_{ijk}A_{i1}A_{j2}A_{k3} \tag{1.2.14}$$

根据行标和列标对等的性质,显然将式(1.2.14)中的 $e_{ijk}A_{i1}A_{j2}A_{k3}$ 改为 $e_{ijk}A_{1i}A_{2j}A_{3k}$ 时公式也是成立的,而且将指标123改为231或312时公式也是成立的,所以可认为(1.2.14)代表了6个公式。此外,容易证明如下的恒等式成立:

$$e_{lmn}\|\boldsymbol{A}\|=e_{ijk}A_{il}A_{jm}A_{kn} \tag{1.2.15}$$

事实上,当 lmn 为123的正序时,根据(1.2.14),公式(1.2.15)左右两端都等于 $\|\boldsymbol{A}\|$;当 lmn 为123的逆序时,(1.2.15)两端都等于 $-\|\boldsymbol{A}\|$,因为右端恰好是将 $\|\boldsymbol{A}\|$ 的两列交换次序;其他情况下,其左端为0,右端为二列相同或三列相同的行列式,其值也为0,故公式(1.2.15)总是成立。

在 e_{ijk} 和 δ_{ij} 之间存在着如下的所谓 $e\sim\delta$ 恒等式:

$$e_{ijk}e_{lmk}=\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl} \tag{1.2.16}$$

对 $e\sim\delta$ 恒等式所包含的 $3^4=81$ 个恒等式(i,j,l,m 都是自由指标),可以采用直接验证的方法证明,也可分类证明。事实上,当 $i=j$ 或 $l=m$ 时,易见其左右二端都等于0;当 $i\neq j$ 且 $l\neq m$ 时,不妨设 $i=1$, $j=2$,此时对 $l=1$, $m=2$,其左右二端都等于1,对 $l=2$, $m=1$,其二端都等于−1,对 $\left(l,m\right)$=(1,3)(3,1)(2,3)(3,

2)时,其二端都等于0,故(1.2.16)总成立。当然,亦可用其他方法证明。例如,根据 e_{ijk} 的定义及其式(1.2.7)有

$$e_{ijk}e_{lmk}=\begin{Vmatrix}\delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{ik}\\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jk}\\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kk}\end{Vmatrix} \tag{1.2.17}$$

将右端的行列式展开,并利用 δ_{ij} 的定义和改换指标的作用则不难得出公式(1.2.16)。

利用公式(1.2.11)(1.2.12)(1.2.13)和 $e\sim\delta$ 恒等式,可以很方便地证明矢量代数中的很多公式:

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})-\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) \tag{1.2.18}$$

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}) \tag{1.2.19}$$

以公式(1.2.18)的证明为例,有

$$\begin{aligned}\left[\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\right]_i&=e_{ijk}a_j(b\times c)_k=e_{ijk}a_je_{kmn}b_mc_n=e_{ijk}e_{kmn}a_jb_mc_n=(\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{jm}\delta_{in})a_jb_mc_n\\&=a_jb_ic_j-a_jb_jc_i=(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})b_i-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})c_i=\left[(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}\right]_i\end{aligned}$$

证明过程中先后用到了矢量叉积的计算公式(1.2.12)、$e\sim\delta$ 恒等式(1.2.16)以及矢量点积的计算公式(1.2.11)。

1.3 坐标变换和笛卡尔张量的解析定义

1.3.1 基变换和坐标变换

如前所述,自然界中的各类物理量通常都是客观的,与坐标系的选取无关。但是为了更清楚地认识它们,从量的角度描述它们,了解各类物理量的异同点和相互联系并进行运算,人们常借助于一定的坐标系。这不但不违背物理量的客观实在性,相反还使我们对它们的客观实在性有了更深刻、更具体的认识。由于坐标系可以有不同的选择方法,所以客观的物理量在不同的坐标系中将会有不同的“表象”,而且这种同一物理量在不同坐标系中不同表象间的关系,应该和表示不同坐标系间坐标变换的关系之间存在某种必然、确定的联系,只有揭示出同一物理量在不同坐标系中表象间的关系对坐标变换关系的依赖性,才能真正说明这个物理量的客观性。因此,我们有两个任务:第一是给出代

表不同选择的坐标系间的所谓坐标变换的表示方法;第二是给出各类客观物理量在一定的坐标变换之下,其表象间的确定关系,后者也就是给出了张量的解析定义。

众所周知,笛卡尔坐标系间的坐标变换包括坐标原点的平移和坐标轴的旋转或反射,而平移不改变各类物理量的表象(这在矢量的情形中是读者所熟知的),故我们只研究坐标系的旋转和反射。设 $o\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ 和 $ox_1x_2x_3$ 分别代表新旧直角笛卡尔坐标系,其相应的幺正基为 $\bar{e}_i$ 和 e_i,如图 1–1 所示。新基矢 $\bar{e}_i$ 以旧基矢 $\boldsymbol{e}_j$ 的线性组合表达,其线性分解系数以 β_{ij} 表示,如表 1–1,则可写出幺正基矢间的变换关系:

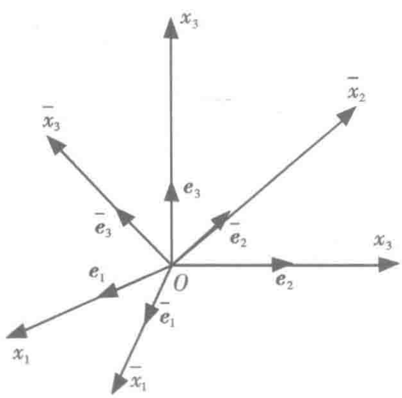

图1–1　新旧坐标系

表1–1　幺正基变换

	e_1	e_2	e_3
$\bar{e}_1$	β_{11}	β_{12}	β_{13}
$\bar{e}_2$	β_{21}	β_{22}	β_{23}
$\bar{e}_3$	β_{31}	β_{32}	β_{33}

$$\bar{e}_i = \beta_{ij} e_j \ (i=1,2,3) \tag{1.3.1}$$

将(1.3.1)两端与 e_k 进行点积,并利用 $e_j \cdot e_k = \delta_{jk}$,即得

$$\bar{e}_i \cdot e_k = \beta_{ij} e_j \cdot e_k = \beta_{ij}\delta_{jk} = \beta_{ik}$$

即

$$\beta_{ij} = \bar{e}_i \cdot e_j \ (i=1,2,3;\ j=1,2,3) \tag{1.3.2}$$

即 β_{ij} 恰是新旧基矢 $\bar{e}_i$ 和 e_j 间夹角的方向余弦。故又有

$$e_i = (e_i \cdot \bar{e}_j)\bar{e}_j = \beta_{ji}\bar{e}_j$$

将此式与(1.3.1)合写为一起,即

$$\begin{cases} \bar{e}_i = \beta_{ij} e_j \\ e_i = \beta_{ji}\bar{e}_j = \beta_{ij}^T \bar{e}_j \end{cases} \ (i=1,2,3) \tag{1.3.3}$$

其中，$\boldsymbol{\beta}^T$ 表示旧基矢到新基矢的变换系数矩阵 $\boldsymbol{\beta}$ 的转置矩阵，β_{ij}^T 是矩阵 $\boldsymbol{\beta}^T$ 的第 i 行第 j 列元素。另一方面，将(1.3.3)的第一式作为旧基矢 $\boldsymbol{e}_j$ 的线性代数方程组反解之，即可得

$$\boldsymbol{e}_i = \beta_{ij}^{-1}\bar{\boldsymbol{e}}_j \tag{1.3.4}$$

其中 $\boldsymbol{\beta}^{-1}$ 表示 $\boldsymbol{\beta}$ 的逆矩阵。事实上，将(1.3.3)中第一式两端同乘以 β_{ki}^{-1}（矩阵 $\boldsymbol{\beta}^{-1}$ 的第 k 行第 i 列元素）便有

$$\beta_{ki}^{-1}\bar{\boldsymbol{e}}_i = \beta_{ki}^{-1}\beta_{ij}\boldsymbol{e}_j = \delta_{kj}\boldsymbol{e}_j = \boldsymbol{e}_k$$

即得

$$\boldsymbol{e}_i = \beta_{ij}^{-1}\bar{\boldsymbol{e}}_j \tag{1.3.5}$$

对比(1.3.3)的第二式和(1.3.5)可见，联系新旧幺正基矢的变换系数矩阵 $\boldsymbol{\beta}$ 为正交矩阵，这可以表达为

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}^T = \boldsymbol{\beta}^{-1} \\ \boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta}^T = \boldsymbol{I} = \boldsymbol{\beta}^T\cdot\boldsymbol{\beta} \end{cases} \tag{1.3.6}$$

其中，$\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵，而记号“·”表示矩阵相乘，这种记法与线性代数中把两个矩阵并在一起表示矩阵相乘的记号是有区别的，之所以这样做是因为将二阶张量与矩阵建立一一对应的关系时，线性代数中矩阵的乘积恰好与矩阵所代表的两个二阶张量的点积“·”相对应，而将两个与矩阵对应的二阶张量并列在一起则表示两个二阶张量的外积（见下一节）。将式(1.3.6)改为指标记法，可写为

$$\beta_{ik}\beta_{jk} = \delta_{ij} = \beta_{ki}\beta_{kj} \quad [\beta_{ik}][\beta_{jk}] = [\delta_{ij}] = [\beta_{ki}][\beta_{kj}] \tag{1.3.7}$$

对(1.3.6)中第二式两边取行列式得

$$\|\boldsymbol{\beta}\|\|\boldsymbol{\beta}^T\| = \|\boldsymbol{\beta}\|^2 = 1 \tag{1.3.8}$$

即 $\|\boldsymbol{\beta}\| = \pm 1$，这表明正交矩阵的行列式等于+1或−1。我们分别称行列式为 + 1 和−1 的正交矩阵为“正则”(Proper)和“非正则”(Improper)正交矩阵。可以证明，在几何上正则正交矩阵代表旋转，非正则正交矩阵则代表反射。事实上，有

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{e}}_1(\bar{\boldsymbol{e}}_2\times\bar{\boldsymbol{e}}_3) &= \beta_{1i}\boldsymbol{e}_i(\beta_{2j}\boldsymbol{e}_j\times\beta_{3k}\boldsymbol{e}_k) = \beta_{1i}\beta_{2j}\beta_{3k}\boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{e}_j\times\boldsymbol{e}_k) \\ &= \beta_{1i}\beta_{2j}\beta_{3k}e_{ijk}\boldsymbol{e}_1(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3) = \|\boldsymbol{\beta}\|\boldsymbol{e}_1(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3) \end{aligned}$$

即