普通高等教育“十二五”规划教材
工 科 数 学 信 息 化 教 学 丛 书

线性代数导学

XIANXING DAISHU DAOXUE

张 丽 吴小涛 主编

科 学 出 版 社

普通高等教育“十二五”规划教材

工科数学信息化教学丛书

线性代数导学

张　丽　吴小涛　主编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是根据教育部最新关于工科类本科数学基础课程教学基本要求线性代数课程部分和理工类学生考研对该课程的要求编写而成的. 本书内容包括行列式、矩阵、向量空间、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型共六章. 各章内容包括基本要求、基本内容、释疑解难、典型例题、考研真题解析、总习题解答、自测题、自测题答案和提示. 书中所选例题具有典型性, 注重解题思路引导, 能有效地帮助学生领会理解线性代数基本概念和理论, 掌握基本解题方法和技巧.

本书内容充实, 难易度和深广度适中, 以提高学生数学素养和能力为目的, 帮助学生释疑解难和巩固提高. 本书可作为高等院校线性代数课程的配套教材和学习指导书, 也可作为自学线性代数及考研学生的学习辅导书, 对从事线性代数课程教学的教师也有一定的参考价值.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数导学/张丽, 吴小涛主编. —北京: 科学出版社, 2017.8

(工科数学信息化教学丛书)

普通高等教育"十二五"规划教材

ISBN 978-7-03-054385-1

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①张… ②吴… Ⅲ. ①线性代数-高等学校-教材 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 213965 号

责任编辑: 谭耀文 刘艳华 / 责任校对: 杜子昂
责任印制: 彭 超 / 封面设计: 苏 波

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

武汉中科兴业印务有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2017 年 8 月第 一 版 开本: 787×1092 1/16
2017 年 8 月第一次印刷 印张: 13 3/4
字数: 322 000

定价: 36.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　言

线性代数是一门重要的大学基础课程，也是全国硕士研究生入学考试数学科目的重要部分. 线性代数主要讨论有限维空间线性理论，行列式、线性方程组问题、矩阵、二次型、线性空间及线性变换理论都是现代科学和技术的重要基础. 通过学习本课程，学生不仅要掌握其基本理论和方法，还要培养和提高运用线性代数知识解决实际问题的能力. 由于本课程具有较强的抽象性与逻辑性，如矩阵秩的概念、向量组线性无关的概念等，一些学生总觉得不太好理解，做起题来也无从下手，为了帮助学生更好地掌握线性代数这门课程，我们结合教学中的一些实践经验，编写了本书.

本书的内容编排参照吴小涛、胡骏主编的《线性代数及应用》教材，可作为它的配套教材使用. 读者可将本书与其他线性代数教材配合使用，也可将本书作为研究生入学考试数学科目的复习参考用书.

本书共六章，每章由“基本要求”“基本内容”“释疑解难”“典型例题”“考研真题解析”“总习题解答”“自测题”“自测题答案和提示”组成. “基本要求”给出相应内容要达到的学习要求；“基本内容”总结出每章的主要定义、公式、定理、结论等，重点突出，条理清晰，帮助学生梳理本章的知识点；“释疑解难”采用问答的形式，对概念中的难点进行解释与阐述，对容易出现的错误方法进行纠正，帮助学生辨析学习中似是而非的问题；“典型例题”对各章中学生要掌握的代表性题型进行讲解，分析解题思路，并在解答后加以评注，帮助学生开拓思路，达到举一反三的效果；“考研真题解析”将近几年全国硕士研究生考试中的部分题目按内容顺序进行选编，希望学生通过对此类题目的学习，了解硕士研究生入学考试的要求和命题思路，为以后的考研打好基础；“总习题解答”对本书配套教材中的总习题一一作了解答，帮助学生课后练习参考；“自测题”为学生学完本章内容后，自我检测之用，以查漏补缺，巩固提高.

本书由张丽、吴小涛主编，其中第 1～3 章由吴小涛编写，第 4～6 章由张丽编写. 全书由张丽统稿、定稿. 本书的编写是武汉科技大学城市学院线性代数课程建设项目的一部分，学校领导十分关心、支持课程的建设工作，教务部领导及公共课部领导对本书的编写工作给予了大力的帮助和支持，尹水仿教授对本书进行了细致的审阅，还有数理教学中心的老师们对本书也提出了许多宝贵意见和建议，在此，我们一并表示衷心的感谢!

由于编者水平有限，书中不足与疏漏之处在所难免，恳请读者批评指正.

编　者
2017 年 3 月

目　录

第1章　行　列　式

一、基本要求

1. 理解行列式的概念.

2. 掌握行列式的性质, 会用行列式性质化行列式为三角行列式，从而计算三阶、四阶及简单的n阶行列式.

3. 掌握行列式按行(列)展开定理, 会用行列式的性质和行列式按行(列)展开定理计算有规律的n阶行列式.

二、基本内容

1. 行列式的定义

(1) 二阶、三阶行列式及对角线法则:

二阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

三阶行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

(2) 排列、逆序与n阶行列式:

(i) 排列: 由自然数(元素) $1,2,\cdots,n$ 组成的不重复的每一种有确定次序的数组, 称为一个n级排列(简称为排列). n个数的n级排列共有$n!$个.

(ii) 逆序: 在一个排列中, 一对数如果较大的数排在较小的数之前, 就称这对数构成一个逆序.

(iii) 排列的逆序数: 一个排列包含逆序的总数, 称为这个排列的逆序数, 用τ表示. 逆序数是偶数的排列称为偶排列; 逆序数是奇数的排列称为奇排列.

(iv) 对换: 在排列中, 将任意两个元素对调, 其余元素不动, 这种作出新排列的手续叫做一次对换. 一次对换改变排列的奇偶性, 奇排列变成标准排列的对换次数为奇数, 偶排列变成标准排列的对换次数为偶数.

(3) n阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau} a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3} \cdots a_{np_n} = \sum (-1)^{s} a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n},$$

其中, τ 为列标 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 排列的逆序数, s 为行标 $q_1,q_2,\cdots,q_n$ 排列的逆序数.

2. 常用的行列式

(1) 上(下)三角行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(2) 对角行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(3)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = D_1 D_2,$$

其中 $D_1 = \det(a_{ij}) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$, $D_2 = \det(b_{ij}) = \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$.

3. 行列式的性质

(1) 行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 与它的转置行列式 $D^{\mathrm{T}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 相等.

(2) 互换行列式的两行(列), 行列式变号.

用 r_i 表示行列式的第 i 行, 用 c_i 表示第 i 列, 交换 i,j 两行记为 $r_i \leftrightarrow r_j$, 交换 i,j 两列记为 $c_i \leftrightarrow c_j$.

推论 1　若行列式中有两行(列)元素完全相同, 则行列式为零.

(3) 用数 k 乘行列式某一行(列)中所有元素, 等于用数 k 乘此行列式, 即某一行(列)所有元素的公因子可提到行列式符号的外面.

行列式第 i 行(或列)乘以 k, 记作 $r_i \times k$ (或 $c_i \times k$).

推论 2　行列式中若有两行(列)元素成比例, 则此行列式为零.

(4) 若行列式某行(列)的元素都是两数之和, 则行列式可拆成两个行列式的和.

(5) 行列式某一行(列)的所有元素同时乘以数 k 后加到另一行(列)对应的元素上, 行列式的值不变.

用数 k 乘第 j 行加到第 i 行上, 记作 $r_i + kr_j$;用数 k 乘第 j 列加到第 i 列上, 记作 $c_i + kc_j$.

4. 行列式按行(列)展开

(1) 余子式和代数余子式: 在 n 阶行列式中, 把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后(其余元素保持原来的相对位置), 所得到的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式, 记作 M_{ij} , 并称 $(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式, 记为 A_{ij} , 即 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.

(2) 行列式按行(列)展开定理: n 阶行列式 D 等于它的任一行(列)各元素与其对应的代数余子式乘积之和, 即

按第 i 行展开: $D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1,2,\cdots,n)$,

按第 j 列展开: $D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1,2,\cdots,n)$.

三、释疑解难

问题 1 行列式学习的主要问题是什么?

答 行列式学习的主要问题就是计算行列式的值, 其基本方法是运用行列式性质及按行(列)展开定理, 化简所给行列式来计算.

问题 2 三阶行列式 $\begin{vmatrix} & & a \\ & b & \\ c & & \end{vmatrix} = -abc$, 那么四阶行列式 $\begin{vmatrix} & & & a \\ & & b & \\ & c & & \\ d & & & \end{vmatrix} = -abcd$ 为什么不对?

答 对角线法则只适用于二阶和三阶行列式, 而对于四阶及四阶以上的行列式, 对角线法则就不适用了, 其错误就在于将对角线法则应用到四阶行列式上去了.

按照行列式的定义, 该四阶行列式中除 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$ 这一项外, 其余的项全为零, 而这一项的符号应该是 $(-1)^{\tau(4321)} = (-1)^6 = 1$, 因此这个行列式应等于 $abcd$.

问题 3 如何理解 n 阶行列式的定义?

答 n 阶行列式

$$\det(a_{ij}) = \sum (-1)^{\tau} a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}\cdots a_{np_n},$$

其中, τ 为列标排列 $p_1p_2p_3\cdots p_n$ 的逆序数, $\sum$ 表示对项 $(-1)^{\tau}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}\cdots a_{np_n}$ 求和, 由于 n 个元素的排列共有 $n!$ 个, 于是该和式共有 $n!$ 项, 每一项是取自于行列式中不同行、不同列的 n 个元素之积.

问题 4 行列式计算时, $r_i + r_j$ 与 $r_j + r_i$ 是否是同一变换?

答 两者不是同一变换. 这里不能套用加法的交换律. $r_i + r_j$ 是把行列式第 j 行元素加到第 i 行对应元素上, 第 j 行不变, 但第 i 行变了; 而 $r_j + r_i$ 是把行列式第 i 行元素加到第

j 行对应元素上, 第 i 行不变, 但第 j 行变了. 又例如 r_i+kr_j 与 kr_j+r_i 也是不同的变换.

问题 5: n 阶行列式的计算方法有哪些?

答 对于 n 阶行列式的计算, 其基本方法和技巧是"化零"和"降阶". 常用的方法有:

(1) 定义法: 直接利用行列式的定义进行计算;

(2) 利用行列式的基本性质化为上三角行列式;

(3) 降阶法: 利用行列式按行(列)展开定理化行列式为较低阶行列式来计算;

(4) 数学归纳法: 应用行列式的性质, 把一个 n 阶行列式表示为具有相同结构的较低阶行列式的线性关系式, 再根据此关系式应用数学归纳法, 递推求得所给 n 阶行列式的值;

(5) 公式法: 利用已知行列式进行计算, 其中最重要的已知行列式是范德蒙德行列式.

(6) 升阶法: 对于某些特殊类型的行列式, 采用升阶的方法更易于计算或证明, 这种方法应用得不是很多.

以上方法中, 前 4 种方法应用得比较多, 也是最基本的方法, 读者应该在实际的练习过程中认真体会, 掌握要领.

四、典型例题

例 1 求排列 $n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数, 并确定它的奇偶性.

解 在排列 $n(n-1)\cdots 21$ 中, 依次算出每个元素前面比它大的元素个数, 分别为: 0, 1, 2, $\cdots$, $n-1$. 于是, 排列的逆序数为: $0+1+2+\cdots+n-1=\dfrac{n(n-1)}{2}$, 由于

$n=1$ 时, $\dfrac{n(n-1)}{2}=0$, 偶排列; $n=2$ 时, $\dfrac{n(n-1)}{2}=1$, 奇排列;

$n=3$ 时, $\dfrac{n(n-1)}{2}=3$, 奇排列; $n=4$ 时, $\dfrac{n(n-1)}{2}=6$, 偶排列;

$n=5$ 时, $\dfrac{n(n-1)}{2}=10$, 偶排列; $n=6$ 时, $\dfrac{n(n-1)}{2}=15$, 奇排列;

……

可以看出, 奇偶性的变化以 4 为周期, 因此我们可以总结如下:

当 $n=4k$ 或 $n=4k+1$ 时, $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 是偶数, 所以排列是偶排列;

当 $n=4k+2$ 或 $n=4k+3$ 时, $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 是奇数, 所以排列是奇排列.

〖评注〗 排列的逆序数按本题解法较简单, 排列的奇偶性确定了 n 阶行列式中每一项的符号.

例 2 行列式 $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix}$ 中 x^3 的系数是多少?

解 行列式共有4项含有x, 且第3列有两项含有x, 根据行列式的值是不同行不同列元素积的代数和. 第1行只能取(1, 1)的x, 因为如取(1, 4)的2, 则划去第1行的一个x, 且由于第3列的两个x只能取其一, 故不能得到x^3. (1, 2)的1, (1, 3)的1均因所在行和列至少有两个x, 也不可能得到x^3. 同理可知: 第2行只能取(2, 2)的x. 从而含x^3只有两项:

主对角线项: (1, 1)的$x \to$(2, 2)的$x \to$(3, 3)的$x \to$(4, 4)的1: x^3;

非主对角线项: (1, 1)的$x \to$(2, 2)的$x \to$(3, 4)的$1 \to$(4, 3)的$2x$: $(-1)^{\tau(1243)}2x^3=-2x^3$, 故所求$x^3$的系数为$-1$.

〖评注〗 本题考察行列式的概念, 不需要计算行列式, 由定义的一般项的特点可得到要求的结果.

例3 计算四阶行列式$D=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}$.

解法1 (降阶法) 按第1行展开.

$$D=a_1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & 0 \\ b_3 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}+b_1\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ 0 & b_3 & a_3 \\ b_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=a_1\cdot a_4(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix}-b_1\cdot b_4(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

$$=(a_1a_4-b_1b_4)(a_2a_3-b_2b_3).$$

解法2 对调第2, 4列后再对调第2, 4行.

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} \xlongequal{c_2\leftrightarrow c_4} -\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2\leftrightarrow r_4} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_4 & a_4 \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}=(a_1a_4-b_1b_4)(a_2a_3-b_2b_3).$$

〖评注〗 四阶和四阶以上的行列式不能用对角线法则. 解法1也可以按照第1列或第4行(列)展开来计算, 解法2利用了行列式的性质.

例4 计算行列式$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ -3 & 3 & -7 & 9 & -5 \\ 2 & 0 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 7 & -14 & 6 \\ 4 & -4 & 10 & -10 & 2 \end{vmatrix}$.

解法1 这是一个阶数不高的数值行列式, 通常可以将它化为上三角行列式来计算.

$$D\xlongequal[\substack{r_3-2r_1\\r_4-3r_1\\r_5-4r_1}]{r_2+3r_1}\begin{vmatrix}1&-1&2&-3&1\\0&0&-1&0&-2\\0&2&0&4&-1\\0&-2&1&-5&3\\0&0&2&2&-2\end{vmatrix}\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3}-\begin{vmatrix}1&-1&2&-3&1\\0&2&0&4&-1\\0&0&-1&0&-2\\0&-2&1&-5&3\\0&0&2&2&-2\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+r_2}-\begin{vmatrix}1&-1&2&-3&1\\0&2&0&4&-1\\0&0&-1&0&-2\\0&0&1&-1&2\\0&0&2&2&-2\end{vmatrix}\xlongequal[r_5+2r_3]{r_4+r_3}-\begin{vmatrix}1&-1&2&-3&1\\0&2&0&4&-1\\0&0&-1&0&-2\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&2&-6\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_5+2r_4}-\begin{vmatrix}1&-1&2&-3&1\\0&2&0&4&-1\\0&0&-1&0&-2\\0&0&0&-1&0\\0&0&0&0&-6\end{vmatrix}=-1\cdot2(-1)(-1)(-6)=12.$$

解法 2 利用行(列)展开定理来计算.

$$D\xlongequal[\substack{c_3-4c_5\\c_4+2c_5}]{c_1-2c_5}\begin{vmatrix}-1&-1&-2&-1&1\\7&3&13&-1&-5\\0&0&0&0&1\\-9&-5&-17&-2&6\\0&-4&2&-6&2\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第3行展开}}1\cdot(-1)^{3+5}\begin{vmatrix}-1&-1&-2&-1\\7&3&13&-1\\-9&-5&-17&-2\\0&-4&2&-6\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3-9r_1]{r_2+7r_1}\begin{vmatrix}-1&-1&-2&-1\\0&-4&-1&-8\\0&4&1&7\\0&-4&2&-6\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第1列展开}}(-1)\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-4&-1&-8\\4&1&7\\-4&2&-6\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_3-r_1]{r_2+r_1}-\begin{vmatrix}-4&-1&-8\\0&0&-1\\0&3&2\end{vmatrix}\xlongequal{\text{按第1列展开}}-(-4)\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}0&-1\\3&2\end{vmatrix}=12.$$

〖评注〗 对于阶数不高的纯数字行列式,常用的方法是利用行列式的性质,将行列式化为上三角行列式,另外当行列式某行(列)含有较多的元素 0 时,可以结合行列式的性质利用按行(列)展开定理来计算.

例 5 计算 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix}a&0&0&\cdots&0&1\\0&a&0&\cdots&0&0\\0&0&a&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&0&0&\cdots&0&a\end{vmatrix}$ $(n\geqslant2)$.

解 按第 1 行展开, 得

$$D=a\begin{vmatrix}a&0&\cdots&0&0\\0&a&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&0&a\end{vmatrix}+(-1)^{1+n}\begin{vmatrix}0&a&0&\cdots&0\\0&0&a&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&0&\cdots&a\\1&0&0&\cdots&0\end{vmatrix}.$$

再将上式等号右边的第二个行列式按第 1 列展开, 则可得到

$$D=a^n+(-1)^{1+n}(-1)^{(n-1)+1}a^{n-2}=a^n-a^{n-2}=a^{n-2}(a^2-1).$$

〖**评注**〗 对于 n 阶行列式, 如果某行(列)有多个元素是 0, 那么按行(列)展开是较好的方法.

例 6 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}a&b&b&\cdots&b\\b&a&b&\cdots&b\\b&b&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\b&b&b&\cdots&a\end{vmatrix}$.

解 行列式的特点是各行(列)**元素之和相等**, 计算方法是先将第 2 行至第 n 行都加到第 1 行, 再提取公因数, 最后各行减第 1 行的 b 倍:

$$D_n\xlongequal{r_1+r_2+\cdots+r_n}[a+(n-1)b]\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\b&a&b&\cdots&b\\b&b&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\b&b&b&\cdots&a\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(k=2,3,\cdots,n)]{r_k-br_1}[a+(n-1)b]\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\&a-b&&&\\&&a-b&&\\&&&\ddots&\\&&&&a-b\end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.$$

〖**评注**〗 行(列)元素之和相等的行列式比较常见, 也可将第 2 列至第 n 列都加到第 1 列, 再提取公因数, 最后各行减第 1 行来计算.

例 7 计算行列式 $D_{n+1}=\begin{vmatrix}1&x_1&x_2&\cdots&x_n\\y_1&z_1&0&\cdots&0\\y_2&0&z_2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\y_n&0&0&\cdots&z_n\end{vmatrix}$, $z_i\neq 0\ (i=0,1,2,\cdots,n)$.

解 根据该行列式的特点称其为**"箭头行列式"**, 其一般计算方法是: 利用主对角

线元素将首列元素除(1, 1)元外, 其余元素化为零, 从而化为上三角行列式.

$$D_{n+1}=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ y_1 & z_1 & 0 & \cdots & 0\\ y_2 & 0 & z_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ y_n & 0 & 0 & \cdots & z_n\end{vmatrix}\xlongequal{c_1-\frac{y_1}{z_1}c_2}\begin{vmatrix}1-\dfrac{x_1y_1}{z_1} & x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ 0 & z_1 & 0 & \cdots & 0\\ y_2 & 0 & z_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ y_n & 0 & 0 & \cdots & z_n\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1-\frac{y_2}{z_2}c_3}\begin{vmatrix}1-\dfrac{x_1y_1}{z_1}-\dfrac{x_2y_2}{z_2} & x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ 0 & z_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & z_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ y_n & 0 & 0 & \cdots & z_n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{x_iy_i}{z_i} & x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ 0 & z_1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & z_n\end{vmatrix}$$

$$=(z_1z_2\cdots z_n)\left(1-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_iy_i}{z_i}\right).$$

例 8 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & 2 & \cdots & 2\\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2\\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n\end{vmatrix}$.

解 行列式的特点是主对角线元素为 $1, 2, \cdots, n$, 其余元素全为 2. 因此, 各行与第 2 行只在主对角线元素上有差异. 各行均减去第 2 行, 再按第 1 行展开得

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & 2 & \cdots & 2\\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2\\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2 & 2 & \cdots & 2\\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & n-2\end{vmatrix}$$

$$=-2(n-2)!.$$

例 9 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix}a+b & a & & & & \\ b & a+b & a & & & \\ & b & a+b & a & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & b & a+b & a\\ & & & & b & a+b\end{vmatrix}$.

解 根据该行列式的特点称其为“**三对角行列式**”, 按第 1 行展开得

$$D_n=(a+b)\begin{vmatrix} a+b & a & & & \\ b & a+b & a & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b & a+b & a \\ & & & b & a+b \end{vmatrix}-a\begin{vmatrix} b & a & & & \\ 0 & a+b & a & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & b & a+b & a \\ & & & b & a+b \end{vmatrix}$$

$$=(a+b)D_{n-1}-abD_{n-2}.$$

故有递推公式

$$D_n-aD_{n-1}=b(D_{n-1}-aD_{n-2}). \tag{1.1}$$

(1.1)表明:数列 D_n-aD_{n-1} 是以 b 为公比的等比数列.

因为 $D_1=a+b, D_2=\begin{vmatrix} a+b & a \\ b & a+b \end{vmatrix}=a^2+ab+b^2$, 从而

$$D_2-aD_1=b^2, \tag{1.2}$$

所以

$$D_n-aD_{n-1}=b^n. \tag{1.3}$$

由于原行列式关于 a,b 对称, 故也有

$$D_n-bD_{n-1}=a^n. \tag{1.4}$$

(1.3) – (1.4)得

$$(b-a)D_{n-1}=b^n-a^n.$$

当 $b\neq a$ 时, $D_{n-1}=\dfrac{b^n-a^n}{b-a}$.

当 $b=a$ 时, 此时, $D_1=2a, D_2=\begin{vmatrix} 2a & a \\ a & 2a \end{vmatrix}=3a^2$. 由(1.3)或(1.4)知

$$\begin{aligned} D_n&=aD_{n-1}+a^n=a(aD_{n-2}+a^{n-1})+a^n \\ &=a^2D_{n-2}+2a^n=a^3D_{n-3}+3a^n=\cdots=a^{n-2}D_2+(n-2)a^n=(n+1)a^n. \end{aligned}$$

综合得

$$D_n=\begin{cases}(n+1)a^n, & a=b, \\ \dfrac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}, & a\neq b.\end{cases}$$

〖评注〗 对于 n 阶行列式 D_n, 若能找出 D_n 与 D_{n-1} 或 D_n 与 D_{n-1}, D_{n-2} 之间的一种关系——称为递推关系(其中 D_n, D_{n-1}, D_{n-2} 结构相同), 然后按此公式推出 D_n, 这种计算行列式的方法称为递推法. 一般地, 当 n 阶行列式 D_n 中元素 a_{11} 的余子式 M_{11} 与 D_n 结构相同时, 可考虑用递推法.

例 10 设行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ b & 1 & a \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0$$

且 $M_{11}+M_{12}+M_{13}=11$, 其中 M_{ij} 是行列式 D 中元素 a_{ij} 的余子式, 求 a,b 的值.

解　由于

$$D=\begin{vmatrix}1&2&3\\b&1&a\\3&1&2\end{vmatrix}=5a-b-7=0,$$

$$M_{11}+M_{12}+M_{13}=A_{11}-A_{12}+A_{13}=\begin{vmatrix}1&-1&1\\b&1&a\\3&1&2\end{vmatrix}=-4a+3b-1=11,$$

所以, 得到方程组

$$\begin{cases}5a-b-7=0,\\-4a+3b-1=11,\end{cases}$$

解得 $a=3,b=8$.

〖评注〗　根据代数余子式的定义知, 第 1 行元素的代数余子式与第 1 行元素无关, 所以 $A_{11}-A_{12}+A_{13}$ 的值相当于将行列式的第 1 行用其系数 $1,-1,1$ 代替而得的行列式的值.

例 11　设四阶行列式的第 2 列元素依次为 $2,m,n,3$, 第 2 列元素的余子式依次为 $1,-1,1,-1$, 第 4 列元素的代数余子式依次为 $3,1,4,2$, 且行列式的值为 1, 求 m,n .

解　由行列式按行(列)展开定理及其推论, 得

$$\begin{cases}a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32}+a_{42}A_{42}=1,\\a_{12}A_{14}+a_{22}A_{24}+a_{32}A_{34}+a_{42}A_{44}=0,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}-m-n-5=1,\\m+4n+12=0,\end{cases}$$

解得 $m=-4,n=-2$.

〖评注〗　本题考察余子式与其代数余子式的关系、行列式按行(列)展开定理及其推论.

五、考研真题解析

本章知识点有行列式的定义、性质及按行(列)展开定理, 但是考察的重点是行列式的计算. 另外, 行列式的计算问题主要分为数值型和抽象型两类行列式, 主要以小题或者大题中的第一问的形式出现, 2010～2016 年均考察了行列式的计算问题, 其中 2010～2013 年、2015 年考察的是抽象型行列式的计算, 2012 年第一个大题的第一问、2014 年的选择题和 2016 年的填空题考察的均是四阶行列式的计算问题, 并且所求行列式中均出现了大量的零元素. 由于行列式一般是和其他知识点一起考察, 这里只给出 2010～2016 年单独考察行列式的题. (2012 年数一, 20(Ⅰ))表示 2012 年数学一真题第 20 题的第(Ⅰ)问, 以下同.

例 12 (2012 年数一, 20(Ⅰ))　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix}$, 求(Ⅰ)计算行列式 $|\boldsymbol{A}|$.

解 按第1列展开，$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{vmatrix}=1\times\begin{vmatrix}1&a&0\\0&1&a\\0&0&1\end{vmatrix}+a\times(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}a&0&0\\1&a&0\\0&1&a\end{vmatrix}=1-a^4.$

例 13 (2014年数一、数三, 5) 行列式$\begin{vmatrix}0&a&b&0\\a&0&0&b\\0&c&d&0\\c&0&0&d\end{vmatrix}=(\quad)$.

(A) $(ad-bc)^2$ (B) $-(ad-bc)^2$ (C) $a^2d^2-b^2c^2$ (D) $b^2c^2-a^2d^2$

解 由行列式的展开定理展开第1列:

$$\begin{vmatrix}0&a&b&0\\a&0&0&b\\0&c&d&0\\c&0&0&d\end{vmatrix}=-a\begin{vmatrix}a&b&0\\c&d&0\\0&0&d\end{vmatrix}-c\begin{vmatrix}a&b&0\\0&0&b\\c&d&0\end{vmatrix}=-ad(ad-bc)+bc(ad-bc)$$

$$=-(ad-bc)^2.$$

故选(B).

〖评注〗 例12和例13均考察四阶抽象行列式，用行列式按列展开计算较简单. 注意例12中，不能作变换$r_4-\dfrac{1}{a}r_1$化为上三角行列式来求解，因为a可以等于0.

例 14 (2015年数一, 13) n阶行列式$\begin{vmatrix}2&0&\cdots&0&2\\-1&2&\cdots&0&2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&2&2\\0&0&\cdots&-1&2\end{vmatrix}=$____________.

解 按第1行展开得

$$D_n=\begin{vmatrix}2&0&\cdots&0&2\\-1&2&\cdots&0&2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&2&2\\0&0&\cdots&-1&2\end{vmatrix}=2D_{n-1}+(-1)^{n+1}\cdot2\cdot\begin{vmatrix}-1&2&\cdots&0&0\\0&-1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&-1&2\\0&0&\cdots&0&-1\end{vmatrix}$$

$$=2D_{n-1}+(-1)^{n+1}\cdot2\cdot(-1)^{n-1}=2D_{n-1}+2,$$

于是得到递推公式: $D_n=2D_{n-1}+2=2(D_{n-1}+1)$，所以$D_{n-1}=2(D_{n-2}+1)$，代入上式得

$$\begin{aligned}D_n&=2[2(D_{n-2}+1)+1]=2^2D_{n-2}+2^2+2=2^2[2(D_{n-3}+1)]+2^2+2\\&=2^3D_{n-3}+2^3+2^2+2=\cdots=2^{n-1}D_1+2^{n-1}+\cdots+2^2+2=2^n+2^{n-1}+\cdots+2\\&=2^{n+1}-2.\end{aligned}$$