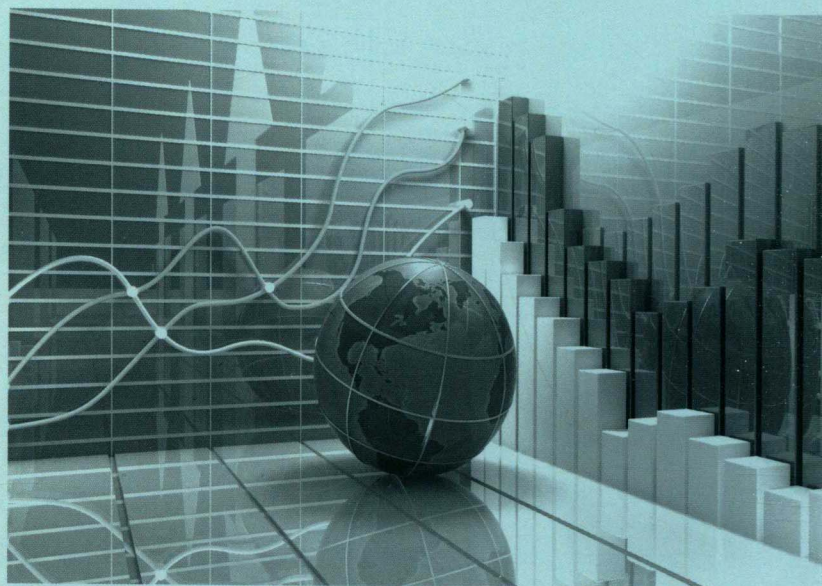


金融资产相依性的动态 Copula建模及应用

龚玉婷 著

Dynamic copula methods in financial assets dependence
and applications



上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

本书受国家自然科学基金青年项目（71601108）
上海高校青年教师培养资助计划（ZZSD15076）资助

金融资产相依性的动态 Copula建模及应用

龚玉婷 著

Dynamic copula methods in financial assets dependence
and applications



上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书研究了动态连接函数计量模型的理论和实证问题。现代金融研究发现,金融资产间的相依性不仅表现出非对称的特征,而且这种相依性还可能随时间变化。为了同时刻画金融资产相依性的这两大特征,本书在已有静态模型基础上,发展出四类动态形式的 Copula 模型,用于实证分析金融市场中的特征和现象。

本书可为金融计量方向本科生、研究生以及从事连接函数模型研究的学者提供借鉴和参考。

图书在版编目(CIP)数据

金融资产相依性的动态 Copula 建模及应用 / 龚玉婷著.

—上海:上海交通大学出版社,2018

ISBN 978-7-313-18652-2

I. ①金… II. ①龚… III. ①时间序列分析-应用-
金融资产-研究 IV. ①F830

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 329126 号

金融资产相依性的动态 Copula 建模及应用

著 者: 龚玉婷

出版发行: 上海交通大学出版社

邮政编码: 200030

出 版 人: 谈 毅

印 刷: 江苏凤凰数码印务有限公司

开 本: 710mm×1000mm 1/16

字 数: 205 千字

版 次: 2018 年 1 月第 1 版

书 号: ISBN 978-7-313-18652-2/F

定 价: 48.00 元

地 址: 上海市番禺路 951 号

电 话: 021-64071208

经 销: 全国新华书店

印 张: 11.25

印 次: 2018 年 1 月第 1 次印刷

版权所有 侵权必究

告读者: 如发现本书有印装质量问题请与印刷厂质量科联系

联系电话: 025-83657309

前 言

在金融一体化的大背景下,描述各金融市场或资产之间的相依性是现代金融分析中的重要课题,在资产配置、风险管理、衍生品定价中都有广泛应用。金融资产间的相依性不仅表现出非对称的特征,即共同上涨和共同下跌的相关性不同,而且这种相依性还可能随时间变化,并不是固定不变的。为了同时刻画金融资产相依性的这两大特征,本书对已有静态 Copula 模型加以改进,发展出四类动态形式的 Copula 模型,用于实证分析金融市场中的特征和现象,为投资者构建资产组合、控制组合风险提供一定的建议。

本书的主要内容包括以下四个方面:

(1) 根据引入解释变量的随机 Copula 模型,研究风格股票指数之间的动态相依性。风格股票指数之间的相依性会受到流动性等随机变量的影响,从而表现出一定的随机性。因此,本书对已有随机 Copula 模型加以改进,引入换手率作为解释变量,研究了大盘股和小盘股、成长型和价值型股票指数之间的随机相依性,并从组合风险管理的角度讨论了随机动态相依性的经济意义。结果发现,风格指数间的尾部相依性具有随机动态特征,并受到以换手率为代表的市场流动性冲击的影响。对每天、每周和每月调整资产组合的中短期投资者而言,考虑风格指数收益的随机动态相依性,能有效降低组合风险。

(2) 根据长记忆 Copula 模型,研究中外铝期货市场间尾部相依性的长记忆效应。现有研究讨论的都是资产间相关系数的长记忆问题,而缺少对更一般的非线性相依性(如尾部相依性)的长记忆性的研究。本书将长记忆特征引入到已有的短记忆动态 Copula 中,并根据改进后的长记忆 Copula 模型,从尾部相依性的角度分析了伦敦金属交易所和上海期货交易所铝期货间的长记忆效应。结果表明,两市场不但具有非对称的尾部相依性,即下尾相依性要大于上尾相依性,而且这种非对称的尾部相依性还具有长记忆的动态特征。对投资者来说,长记忆效应的存在,意味着他们能够基于现在的相关性信息预测未来一段时间内两市场收益共同的变化趋势,进而优化配置资产组合。

(3) 根据混频 Copula 模型,研究股票和债券市场相依性的影响因素。宏观基本面、市场不确定性、流动性等因素都会影响股票和债券市场的相依性,但这

些变量的抽样频率不同。已有研究都是将高频变量转化为低频变量,统一使用同频数据分析股债市相依性问题。但这种做法损失大量样本信息,不适用于样本容量十分有限的中国市场。为克服数据频率不一致的问题,本书用混频 Copula 模型同时研究低频月度变量(宏观基本面、市场不确定性)和高频日度变量(股债市流动性)对股票和债券市场相依性的影响。结果发现,两市场相关性变化的根本原因在于宏观层面的基本面因素和市场不确定性因素,而微观层面的流动性因素并不是决定两市场相依性的主要原因。

(4) 根据多元动态偏 t Copula 模型,研究以多个资产为代表的高维变量相依结构。现有的偏 t Copula 模型只有一个常数形式的偏度系数,对相依结构的假设过于严格,无法及时捕捉到相依结构的变化特征。本书对该模型加以改进,不仅允许各变量具有不同的偏度系数,而且将自回归形式的演变机制引入到偏度系数的动态过程中。通过对股票、黄金、原油、债券、房地产等 50 种资产相依性的实证分析,书中指出,动态的偏度系数设定形式能够灵活准确地捕捉到资产间相依性的动态变化,特别是市场暴涨和暴跌阶段不同的尾部相依性。和已有模型相比,改进后的多元动态偏 t Copula 模型具有更高的样本内拟合和样本外预测能力,根据该模型构建的投资策略也能为投资者在保证收益的前提下有效控制风险。

本书大部分内容来自本人攻读博士学位期间的研究成果。本书得以完成,首先需要感谢我的导师郑旭教授。其次,感谢国家自然科学基金青年项目(71601108)、上海高校青年教师培养资助计划(ZZSD15076)对本书出版的资助。最后,还要感谢我的家人在此书编撰过程中给予的生活上的帮助。

龚玉婷

2017 年 10 月于上海大学

目 录

第 1 章 引言	1
1.1 研究动态连接函数模型的背景	1
1.2 本书研究内容	4
1.3 本书章节安排	5
1.4 本书主要创新	7
第 2 章 Copula 理论和动态 Copula 模型文献综述	8
2.1 Copula 理论	8
2.2 动态 Copula 模型的相关文献综述	19
2.3 本章小结	30
第 3 章 基于随机 Copula 模型的风格股票指数相依性研究	32
3.1 问题的提出	33
3.2 随机 Copula 模型	34
3.3 实证分析:风格股票指数间的相依性研究	38
3.4 本章小结	53
第 4 章 基于长记忆 Copula 模型的铝期货市场相依性研究	55
4.1 长记忆性的定义和问题的提出	56
4.2 长记忆 Copula 模型	58
4.3 蒙特卡洛模拟研究	62
4.4 实证分析:中外铝期货市场尾部相依性的长记忆效应研究	68
4.5 本章小结	79
第 5 章 基于混频 Copula 模型的股票债券市场相依性影响因素研究	81
5.1 问题的提出	82

5.2 混频 Copula 模型 84

5.3 实证分析:股票和债券市场相依性的影响因素研究 87

5.4 本章小结 106

第 6 章 基于多元动态偏 t Copula 模型的高维变量相依性研究..... 108

6.1 问题的提出 109

6.2 多元动态偏 t Copula 模型 113

6.3 蒙特卡洛模拟研究 116

6.4 实证分析:多个金融资产的相依性研究 118

6.5 本章小结 138

第 7 章 总结与展望..... 139

7.1 本书主要结论 139

7.2 未来研究展望 143

附录..... 145

参考文献..... 154

索引..... 170

第 1 章

引 言

1.1 研究动态连接函数模型的背景

20 世纪 80 年代以来,随着金融市场开放程度的不断加深、金融衍生品种类的不断丰富,金融一体化已经成为不可逆转的历史潮流。所谓金融一体化,不仅包括不同国家和地区之间的金融全球化进程,还包括不同类型金融资产之间的相互联系和风险传导机制。一方面,不同国家和地区在金融业务和政策方面相互交往和协调、相互渗透和扩张,使得全球金融形成一个联系密切、不可分割的整体;另一方面,在信息流动渠道的迅猛发展下,各类金融资产(如股票、债券、原油、房地产等)之间的协同性也日趋增强,其相关程度和相关模式也逐渐发生变化。在金融一体化的大背景下,描述各金融市场和资产之间的相依性是现代金融分析中的重要课题。

描述金融资产收益之间的相依性之所以重要,是因为它在资产配置、风险管理、衍生品定价中都有广泛应用。在资产配置方面,现代投资组合理论要求投资者将资产分散配置到多种资产上。此时,为了优化资产组合,不仅需要描述单个资产收益,而且还要准确刻画这些资产之间的相依结构。Okimoto(2008)、Driessen 等(2009)、Wu 和 Liang(2011)都指出,准确把握组合内资产的相依结构,有助于投资者优化配置资产。在风险管理方面,当市场发生暴跌的极端情况时,金融资产往往会表现出不同于市场平稳时期的尾部相依性。控制资产组合的尾部风险需要清楚地了解组合内各资产间的相依结构,把握资产间的风险传染机制。Harrington(2003)指出,多维正态分布的假设(忽略尾部相依性)将低估巨大事件(如金融危机等)发生时股价同时下跌的概率,进而可能低估整个投资组合所面临的风险。在资产定价方面,一些金融衍生品的标的对象(资产)通常会有多个,而且这些标的对象(资产)之间并不是相互独立的。比如,债务担保

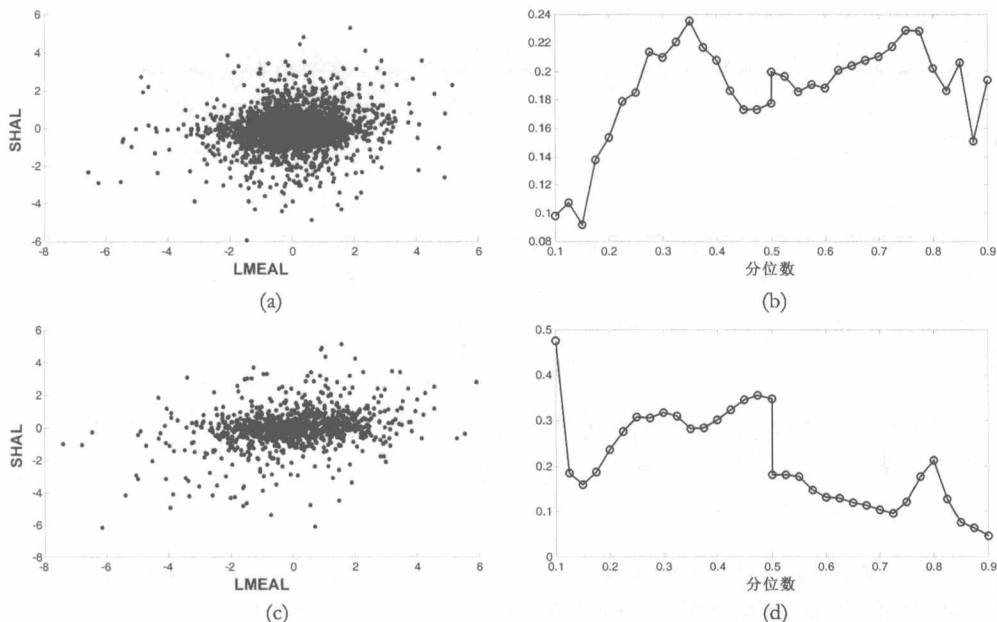
债券(collateralized debt obligation, CDO)的资产池包括了多种债券、贷款等可能发生违约的信用资产,它们的违约概率存在一定的相关性。根据 Hull 和 White(2004),对这种相关性的评估和描述将直接影响到 CDO 的定价。Rombouts 和 Stentoft(2011)、Bernard 和 Czado(2012)也指出,准确刻画资产间相依性能够更准确地对多资产衍生品进行定价。总而言之,描述金融资产相依性对资产配置、风险管理、衍生品定价等都有重要意义。

那么,该怎样准确刻画金融资产之间的相依性呢?这必须从金融资产收益的特征出发。概括起来,金融资产的相依性主要有两大特征。

(1) 从相依性的形态上来看,金融资产间的相依性并不是线性的。它们在尾部极端情况下的相关性可能与通常情况下的相关性存在很大差异,而且市场上涨阶段和下跌阶段的相关性也可能是不同的。已有许多学者在实证研究中发现了这一特征,如 Longin 和 Solnik(2001)、Ammann 和 Suss(2009)、冯玲和欧华宇(2012)等。为了对非线性的相依结构有个直观的认识,下面以伦敦金属交易所(LME)和上海期货交易所(SHFE)铝期货为例进行说明。从图 1-1(b)和图 1-1(d)中的超位相关系数图中可以看出,两市场铝期货的上尾和下尾相依性是不同的^①。在次贷危机发生前,上尾相依性(0.19)要高于下尾相依性(0.10);但次贷危机发生后,下尾相依性明显提高,两市场共同下跌的相关性(0.48)要远高于共同上涨时的相关性(0.05)。此时,金融资产间这种复杂的相依结构无法仅依靠相关系数(correlation)这种最简单的相依性度量方法来描述。这是因为,相关系数仅适用于描述椭圆族分布的相依结构,不足以全面刻画非椭圆族变量间的相依结构(Embrechts 等,2002,2003;Okimoto,2008)。而金融资产收益大多都不服从联合正态分布,因而不属于椭圆分布(Affleck-Graves 和 McDonald,1989;Richardson 和 Smith,1993;Ang 和 Chen,2002)。基于此,要描述金融资产间的非线性相依性,需要采用 Copula 这种更加复杂、更具一般性的相依结构度量方法。

(2) 从相依性的演变过程来看,金融资产间的相依性会随时间变化,在不同的市场阶段或状态下会表现出不同的形态。这种时变特征不仅体现在相关系数上,还体现在更一般的相依结构(如尾部相依性)上。在相关系数方面,Erb 等(1994)指出 G7 国家资产收益在经济衰退期的相关性要比经济繁荣期高;Longin 和 Solnik(1995)发现各主要股市在市场波动较大时的相关性要高于在波动较小时的相关性。在以 Copula 度量的相依结构上,Patton(2006a)指出,德国马克和日元(兑美元)汇率不仅在上下尾部都有相关性,而且在欧元区成立后

① 超位相关系数的定义见附录 1。



图(a)、(b)的样本区间为1995年4月18日至2008年8月31日,代表次贷危机发生前;图(c)、(d)的样本区间为2008年9月1日至2013年4月9日,代表次贷危机发生后。

图1-1 LME和SHFE铝期货日收益散点图和超位相关系数

- (a) 铝期货收益散点图:次贷危机前 (b) 超位相关系数:次贷危机前
(c) 铝期货收益散点图:次贷危机后 (d) 超位相关系数:次贷危机后

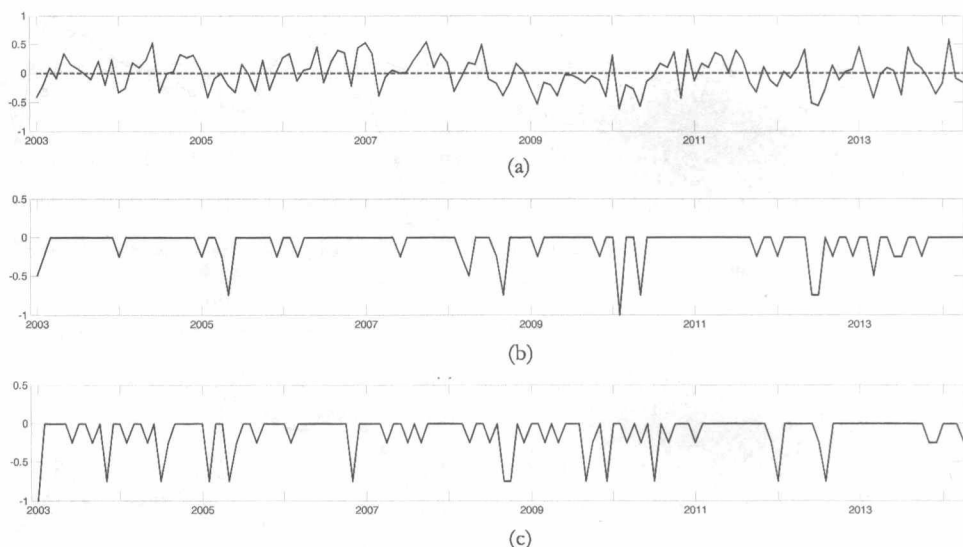
两汇率相关性明显降低。同样,为了能直观地了解相依性的动态特征,文中给出两个例子:一个是图1-1中关于LME和SHFE的铝期货;另一个是图1-2的上证综指和上证国债。从图1-1中知,次贷危机前,LME和SHFE的上尾相依性高于下尾相依性;但次贷危机发生后,这种相依结构发生了变化,下尾相依性高于上尾相依性。从图1-2可知,上证综指和上证国债间的相关系数和尾部相关系数不是固定不变的,两指数有时正相关,有时负相关。特别地,2009年至2011年两指数基本负相关,上尾和下尾相依性也跌至-0.5以下。需要说明的是,由于股票和债券多数情况下呈负相关,因此这里计算尾部相依性的方法参考Zhang(2008)。上尾相依性表示的是债券上涨、股票下跌时的尾部相依性,即

$$\bar{\tau}_U = \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{1-q-C(q, 1-q)}{1-q},$$

下尾相依性表示的是债券下跌、股票上涨时的尾部相依性,即

$$\bar{\tau}_L = \lim_{q \rightarrow 1^-} \frac{1-q-C(1-q, q)}{1-q}.$$

从上述例子可知,金融资产的相依性可以是动态的,此时静态模型不足以刻画金融资产相依性的动态过程,需要借助动态模型来描述资产间相依结构的动态特征。



图中计算上证综指和上证国债的超额收益在每个月内的已实现相关系数、上尾相依系数(债券上涨、股票下跌)和下尾相依系数(债券下跌、股票上涨)。样本区间为 2003 年 1 月 1 日至 2013 年 10 月 31 日。

图 1-2 上证综指和上证国债的月内相关系数和尾部相依系数

(a) 相关系数 (b) 上尾相依系数 (c) 下尾相依系数

综合来看,资产间相依性的非线性和时变性的两大特征可以通过动态 Copula 模型来描述。因而,有理由认为根据动态 Copula 模型来对金融资产相依结构进行建模是比较合理的。因此,本书以动态 Copula 模型作为贯穿全书的主线,用 4 种不同形式的动态 Copula 模型描述金融资产间的相依结构。下节将针对研究金融资产相依性中遇到的四个实际问题,简要说明各个研究问题及其研究意义。

1.2 本书研究内容

本书的研究从实际问题出发,为解决实证研究中的问题,书中使用了不同形式的动态 Copula 模型。具体来说,本书主要研究了以下 4 个关于金融资产相依性的问题。

(1) 根据引入解释变量的随机 Copula 模型,研究了风格股票指数之间的动态相依性。风格股票指数之间的相依性会受到宏观变量、流动性等随机变量的影响,从而表现出一定的随机性。该章节对已有随机 Copula 模型加以改进,引入换手率作为解释变量,研究了大盘股和小盘股、成长型和价值型股票指数之间的随机相依性,并从组合风险管理的角度讨论了随机动态相依性的经济意义。

(2) 根据长记忆 Copula 模型,研究了中外铝期货市场间尾部相依性的长记忆效应。现有研究讨论的都是资产间相关系数的长记忆问题,而缺少对更一般的非线性相依性(如尾部相依性)的长记忆性的研究。该章节根据长记忆 Copula 模型,从尾部相依性的角度分析了伦敦金属交易所(LME)和上海期货交易所(SHFE)的铝期货之间的长记忆效应。

(3) 根据混频 Copula 模型,研究了股票和债券市场相依性的影响因素。宏观基本面、市场不确定性、流动性等因素都会影响股票和债券市场的相依性。但是这些变量的抽样频率不同。为克服数据频率不一致的问题,该章节用混频 Copula 模型同时研究低频月度变量(宏观基本面、市场不确定性)和高频日度变量(股债市流动性)对股票和债券市场相依性的影响。

(4) 根据多元动态偏 t Copula 模型,研究多个资产(高维变量)之间的相依结构。实际应用中,大型机构投资者需要对大量资产的联合分布建模。因此,如何在避免“维度诅咒”的前提下,尽可能准确地刻画高维变量相依性,是当前 Copula 研究亟待解决的问题。该章节在多元偏 t Copula 模型中引入动态演化机制,进而用时变的偏 t Copula 研究包括股票、外汇、债券、商品期货、房地产等 50 个金融资产的相依结构。

概括起来,上述 4 类 Copula 模型都属于动态 Copula 模型,适用于描述多个金融资产间动态的相依结构,进而应用于组合配置、风险管理和资产定价的实证分析中。然而,这些模型在应用时所侧重的重点有所不同。其中,如果要考察哪些因素会影响资产间的相依性,就可考虑使用引入解释变量的随机 Copula 或混频 Copula 模型;如果注重讨论资产间尾部相依性的长记忆特征,就可考虑使用长记忆 Copula 模型;如果待研究的金融资产种类很多,就可考虑使用多元动态偏 t Copula 模型。

1.3 本书章节安排

从图 1-3 的结构示意图上可以看出,本书共分为 7 章。其中第 3 章至第 6 章是本书的主体部分,针对不同的实证研究问题,分别采用 4 种不同的动态 Copula 模型进行实证分析。

第 1 章介绍了动态 Copula 模型的研究背景和意义,并且阐明全书的主要内容、结构安排和主要创新点。

第 2 章是本书的文献综述部分。首先介绍了 Copula 函数的基本理论,然后对现有的动态 Copula 文献进行分类和梳理,总结综述了国内外学者的代表性研究成果,同时指出本书将会涉及的 Copula 模型在已有理论框架中的位置。

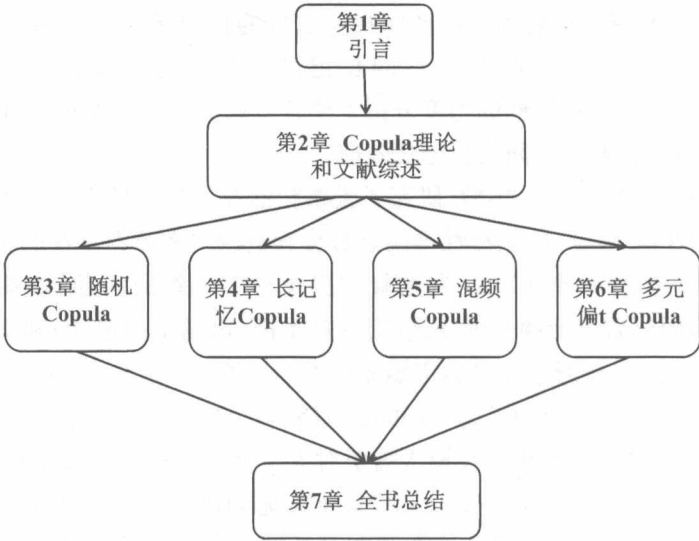


图 1-3 本书结构示意图

第 3 章是关于随机 Copula 模型的实证研究。本章首先指出风格股票指数相依性的意义,解释使用引入解释变量的随机 Copula 模型研究风格股票指数相依性的原因。接着,在已有随机 Copula 模型的基础上加入流动性这个解释变量,并说明如何估计改进后的模型。然后,运用改进后的模型实证分析我国大盘股和小盘股、成长型和价值型股票指数间的相依结构,并且从风险管理的角度讨论了随机相依性的经济意义。

第 4 章是关于长记忆 Copula 模型的实证研究。本章首先指出研究金融市场长记忆效应的意义,强调已有研究都没有从非线性相依性(如尾部相依性)的角度研究过金融市场的长记忆效应。接着,该章节在短记忆的动态 Copula 模型的基础上,提出具有长记忆性的 Copula 模型。然后,使用改进后的模型分析 LME 和 SHFE 两大铝期货市场间的相依结构,检验两市场间的尾部相依性的长记忆效应。

第 5 章是关于混频 Copula 模型的实证研究。本章首先说明使用混频模型研究我国股票和债券市场相依性的意义和必要性。接着,对 Patton(2006a)动态 Copula 模型加以改进,提出混频 Copula 模型,可以同时分析不同频率变量对相依结构的影响。然后,基于混频 Copula 模型实证研究了我国股票和债券市场相依性的影响因素,并通过样本外分析讨论了对股债市相依性混频建模的经济意义。

第6章是关于多元偏 t Copula 模型的实证研究。本章首先指出研究高维变量相依性的重要意义。接着,考虑到 Christoffersen 等(2012)的偏 t Copula 模型在描述多元变量相依性上具有一定的局限性,该章节对其加以改进,不仅允许各变量的偏度系数可以互不相同,而且假设偏度系数也可以随时间变化。然后,运用改进后的多元动态偏 t Copula 模型研究了包括股票、外汇、债券、商品期货、房地产在内的 50 个资产的相依结构,并通过样本外分析指出改进后的模型能够在风险可控的前提下为投资者带来更高的收益。

第7章是总结和展望,在总结全书结论的前提下,指出本书的不足和未来进一步研究的方向。

1.4 本书主要创新

根据上述具体研究的 4 个问题,本书的主要创新点可以归纳为以下 4 点:

(1) 将解释变量引入到已有的随机 Copula 模型中。该章节在随机 Copula 模型的基础上,加入外生解释变量(股市换手率),用改进后的模型研究股票风格指数的随机相依性。相比已有文献,本书的研究不仅能反映风格指数相依结构的随机特征,而且还考察了换手率对风格指数相依性的影响。

(2) 从相依结构的角度来研究金融市场的长记忆问题。已有文献集中于分析金融资产收益、波动或相关系数的长记忆性,而该章节将相关系数长记忆性的研究扩展到更一般的相依结构框架下。该章节利用改进的长记忆 Copula 模型,从尾部相依性的角度检验了 LME 和 SHFE 铝期货市场间的长记忆效应,而已有研究仅检验的是两市场相关系数的长记忆效应。

(3) 将混频抽样数据的建模思想引入到 Copula 模型中。该章节利用混频 Copula 模型同时分析不同频率的经济变量对我国股票和债券市场相依性的影响。而现有文献的做法都是将高频数据(日数据)化为低频数据(周或月数据),进而针对相同频率的数据建模。这种数据处理方法损失了大量的月内样本信息,不适用于样本容量十分有限的中国市场。

(4) 研究如何描述高维变量间的动态相依性。为了刻画高维变量的相依结构,该章节改进了现有的偏 t Copula 模型,不仅允许各变量具有不同的偏度系数,而且将自回归形式的演变机制引入到偏度系数的动态过程中。和已有模型相比,改进后的多元动态偏 t Copula 模型较好地避免了“维度诅咒”问题,在描述变量间动态相依性时更加灵活,更具一般性。

第 2 章

Copula 理论和动态 Copula 模型文献综述

本章介绍 Copula 的基础理论,并详细介绍各类具有动态特征的 Copula 模型在理论和实证方面的文献。2.1 节先介绍了 Copula 的定义、性质、主要分类及常见的估计方法。2.2 节将动态 Copula 模型按照动态演化过程形式进行分类,对相关文献加以梳理,然后针对本书涉及的三类动态 Copula 进行详细说明,总结现有研究成果,指出存在的不足,为后文提出新的模型做理论铺垫。

2.1 Copula 理论

Copula 一词在数学中是指一个“连接”多维随机变量的联合分布与边缘分布的函数。Copula 函数由 Sklar(1959)提出,他指出可以将一个联合分布分解成它的多个边缘分布和一个 Copula 函数,这个 Copula 函数描述了变量间的相依性(dependence)。由此看出,Copula 函数实际上是一种将联合分布与它们各自的边缘分布连接在一起的函数,因此通常称之为“连接函数”。

1. Copula 函数的定义

根据 Embrechts 等(2003)的研究,一个 Copula 函数是一个定义在单位空间 $[0,1]^N$ 上的多元分布函数,维度为 N ,其边际分布为均匀分布。为便于说明,下文对 Copula 函数的表述都控制在二维范围内,多元 Copula 具有类似的形式。参考 Joe(1997)、Nelson(1999),一个二元无条件 Copula 函数定义如下:

定义 2.1 对于二元函数 $C(u_1, u_2): I^2 \rightarrow I, I = [0, 1]$, 如果其满足下列条件:

(1) 对任意 $u_1, u_2 \in I, C(0, u_2) = C(u_1, 0) = 0, C(u_1, 1) = u_1, C(1, u_2) = u_2$ 。

(2) $C(u_1, u_2)$ 是二维递增函数,记对 $a, b, c, d \in I, a \leq b, c \leq d$, 有:

$$C(b, d) - C(a, d) - C(b, c) + C(a, c) \geq 0$$

根据上述定义,记 U_1 和 U_2 是随机变量 X_1 和 X_2 的累积分布函数(CDF, cumulative distribution function)。它们之间的概率积分转换(PIT, probability integral transforms)为 $U_1 = F_1(X_1)$, $U_2 = F_2(X_2)$ 。那么, $C(U_1, U_2)$ 是一个以 $F_1(X_1)$ 和 $F_2(X_2)$ 为边际分布的二元累积分布函数。Sklar(1959)通过其所提出的 Sklar 定理证明了这一定义的理论意义,并且解释了边际分布和相依结构为什么可以被分开的问题。

定理 2.1(无条件 Sklar 定理):假设 $F(X_1, X_2)$ 是一个联合分布函数, 边际分布为 $F_1(X_1)$ 和 $F_2(X_2)$ 。那么, 对所有 $X_1, X_2 \in \mathfrak{R}$, 存在一个 Copula 函数 C , 使得:

$$F(X_1, X_2) = C(F_1(X_1), F_2(X_2)) \quad (2-1)$$

如果 F_1 和 F_2 是连续的, 则 C 是唯一的; 否则, C 由 F_1 和 F_2 的联合值域唯一确定。反过来, 如果 C 是一个 Copula 函数, 且 F_1 和 F_2 是两个变量的边际 CDF, 则由式(2-1)所定义函数 F 是一个以 F_1 和 F_2 为边际分布的联合分布函数。该定理提供了一个在不研究边际分布的条件下, 分析多元分布相依结构的方法。同时, 该定理也显示了, 多变量的联合分布可以通过分别设定这些变量之间的相依结构和每个变量的边际分布来确定。

上述无条件 Copula 假设了变量之间的相依结构是常数。然而, 金融资产收益之间的相依结构通常是随时间变化的动态过程, 因此, 实际应用中条件 Copula 函数的定义和相关性质更为重要和实用。Patton(2006a)将无条件分布下的 Copula 定理扩展到了条件分布下的情况。根据 Patton(2006a), 条件 Sklar 定理的表述如下:

定理 2.2(条件 Sklar 定理):假设 $F_{1|W}(\cdot | w)$ 和 $F_{2|W}(\cdot | w)$ 分别为 $X_1 | W=w$ 和 $X_2 | W=w$ 的条件累计分布函数。 $F_{12|W}(\cdot | w)$ 为 $(X_1, X_2) | W=w$ 的联合分布函数。 Ω 是信息变量 W 的集合。假设对于所有的 $w \in \Omega$, 在 X_1 和 X_2 取任意值时都是连续的。那么, 存在唯一的一个条件 Copula 函数 $C(\cdot, \cdot | w)$, 满足:

$$F_{12|W}(x_1, x_2 | w) = C(F_{1|W}(x_1 | w), F_{2|W}(x_2 | w)), \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}, w \in \Omega \quad (2-2)$$

相反, 如果假设 $F_{1|W}(x_1 | w)$ 为 $X_1 | W=w$ 的条件分布函数, $F_{2|W}(x_2 | w)$ 为 $X_2 | W=w$ 的条件分布函数, 并且 $\{C(\cdot, \cdot | w)\}$ 是在上可测的条件 Copula 函数集, 则由式(2-2)定义的函数 $F_{12|W}(\cdot | w)$ 是一个条件二元联合分布函数, 其边际分布分别为 $F_{1|W}(\cdot | w)$ 和 $F_{2|W}(\cdot | w)$ 。在应用条件分布 Sklar 定理时, 需要注意的是, 每个边际分布和 Copula 函数所基于的信息变量必须相同。也就是说, $X_1 | W=w$ 所基于的信息变量与 $X_2 | W=w$ 所基于的信息变量要是完

全相同的。

Patton(2006a)指出, Sklar 定理的逆定理对多元密度函数建模更有意义。它意味着,任意两个一元分布函数,无论服从什么类型,也没有必要是来自同一类型,都可以通过任何一个 Copula 函数连接在一起,在信息集不变的情况下构造一个有效的二元分布函数。在 Sklar 定理的影响下,描述多元变量联合分布变得更加灵活多样。因此,在对金融时间序列建模时,不必再局限于多元正态分布的领域,而可以灵活地使用各种一元边际分布函数,再通过不同形式的 Copula 函数将其连接起来。

Copula 函数的概率密度可以通过对式(2-2)求导得到。假设 $F_{1|w}(\cdot | w)$ 和 $F_{2|w}(\cdot | w)$ 可导, $F_{12|w}(\cdot, \cdot | w)$ 和 $C(\cdot, \cdot | w)$ 二阶可导。根据条件 Sklar 定理,

$$\begin{aligned} f_{12|w}(x_1, x_2 | w) &= \frac{\partial^2 F_{12|w}(x_1, x_2 | w)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ &= \frac{\partial^2 C(u_1, u_2 | w)}{\partial u_1 \partial u_2} \frac{\partial F_{1|w}(x_1 | w)}{\partial x_1} \frac{\partial F_{2|w}(x_2 | w)}{\partial x_2} \\ &= c(u_1, u_2 | w) f_{1|w}(x_1 | w) f_{2|w}(x_2 | w) \end{aligned}$$

其中, $u_1 = F_{1|w}(x_1 | w)$, $u_2 = F_{2|w}(x_2 | w)$ 。那么,条件 Copula 的概率密度函数可写为:

$$c(u_1, u_2 | w) = \frac{f_{12|w}(x_1, x_2 | w)}{f_{1|w}(x_1 | w) f_{2|w}(x_2 | w)} \quad (2-3)$$

2. Copula 函数的性质

这部分将介绍两个 Copula 函数的基本性质。这些性质在分析金融时间序列的基本特征,特别是非线性特征时十分有用。

第一个性质是 Copula 函数的尾部相关性(tail dependence)。它描述了随机变量间的极值相关关系。更准确地说,给定一个随机变量 X_1 出现极大值(极小值)时,尾部相关性度量另一个随机变量 X_2 也同时出现一个极大值(极小值)的概率。在投资组合风险管理中,投资者将倾向于选择具有较低相关性,特别是在极值时(如市场暴跌阶段)有较低相关性的资产组合,进而对冲相关性风险,以期获得投资组合分散化的收益。所以,通过考查各资产的尾部相关性,投资者可以判断将哪些资产纳入投资组合中来。

根据 Nelsen(1999), Copula 函数的上尾相依系数 τ^u 和下尾相依系数 τ^l 可由下式给出:

$$\tau^u = \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u}$$