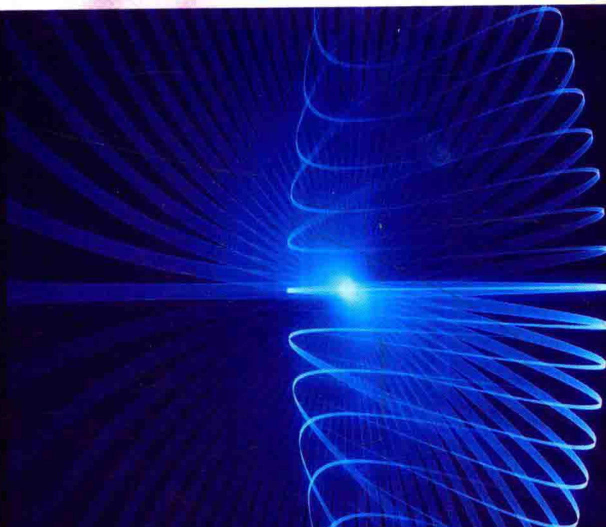
普通高等教育“十三五”规划教材

线性代数与空间解析几何

谭瑞梅　郭晓丽　主编



科学出版社

普通高等教育“十三五”规划教材

线性代数与空间解析几何

谭瑞梅　郭晓丽　主编

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书为普通高等教育“十三五”规划教材，是针对当前MOOC、SPOC微课的教学改革背景和普通高等院校的教学实际而编写的一本新形态数字化教材，在原有经典基本内容的基础上，适当增加了数字化时代下需要的新知识，删减了某些陈旧不必要的内容.

全书共有六章，主要内容为行列式及其计算、几何向量空间与几何图形、矩阵、n维向量与线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型. 每节后有习题. 每章最后有拓展知识，包括MATLAB数学软件介绍及相关应用程序和数学应用实例，书的最后附有习题和复习题的参考答案.

本书可作为普通高等院校理工科非数学类专业本科生教材或教学参考书.

图书在版编目（CIP）数据

线性代数与空间解析几何 / 谭瑞梅，郭晓丽主编. —北京：科学出版社，2018.1

普通高等教育“十三五”规划教材

ISBN 978-7-03-056026-1

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①谭… ②郭… Ⅲ. ①线性代数-高等学校-教材 ②立体几何-解析几何-高等学校-教材 Ⅳ. ①O151.2 ②O182.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 317552 号

责任编辑：张中兴 梁 清 / 责任校对：彭 涛

责任印制：师艳茹 / 封面设计：迷底书装

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

保定市中画美凯印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2018年1月第 一 版 开本：720 × 1000 1/16

2018年1月第一次印刷 印张：18 1/2

字数：373 000

定价：45.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

《线性代数与空间解析几何》编委会

主　编　谭瑞梅　郭晓丽

副主编　黄守佳

编　委（以姓氏笔画为序）

王淑娟　刘　强　李　乐

时海亮　孟令显

前　　言

在目前国内外流行的MOOC、SPOC、微课等教学改革的背景下，随着网络的普及和信息化的高度发展，学生的学习方式、学习环境发生了很大变化，已经突破了时间和空间的限制，并且不同的专业、不同的学生学习目标不同，导致他们的学习态度和动机有很大差异. 鉴于此，如何让学生在有限的课堂教学时间里，在接受大量繁杂信息的同时，切实掌握课程需要掌握的内容、思想、方法，编写更能适应新形势下学生学习的教材势在必行. 课程和教材本身就是社会的产物，社会的发展必然导致课程的改革. 教材是课程的重要组成部分，是课程改革的核心内容，是实现课程目标的主要途径. 一本好的教材对塑造学生的素质类型起着至关重要的作用. 基于此，我们编写了本书.

编写本教材我们有丰富的经验和课程改革成果做支撑.

我校“线性代数与空间解析几何”课程建设经历了从无到有、从弱到强，不断发展完善的过程. 我校“线性代数”课程的改革始于1998年. 在此之前课程名称是“线性代数”，使用的是同济大学数学系编写的《线性代数》教材. 1999年根据我校的实际情况，首次把“线性代数”与“空间解析几何”结合起来，形成了“线性代数与空间解析几何”课程. 该课程2000年被评为校级优秀课程，并于2001年在全校一年级第一学期开设(之前的“线性代数”安排在第三学期）. 该课程2004年被评为学校精品建设课程，同年获批省级项目“网络工程”建设， 2005年通过学校精品课程评审，2007年评为省级精品课程. 2015年9月成功申报河南省精品资源共享课建设课程，2016年4月通过河南省教育厅验收，正式成为河南省精品资源共享课程，也是该项目中河南省高校唯一的一门“线性代数与空间解析几何”精品资源共享课程，处于河南省同类高校的领先地位.

经过近二十年的课程改革，“线性代数与空间解析几何”课程取得了丰硕成果，获得学校教学成果奖多项，先后出版了《线性代数与空间解析几何》和《线性代数与空间解析几何及其应用》等教材，以及与之同步的《线性代数与空间解析几何习题课教程》，同时还制作了与教材配套的多媒体课件. 在课程改革与教材编写的过程中，我们取得了丰富的经验，后续的改革都是在前次改革的基础上听取了同行专家学者的意见和建议，取长补短，不断完善.

本书在原有经典基本内容的基础上，适当增加了数字化时代下需要的新知识，删减了某些陈旧不必要的内容. 本书有三大特点：其一，也是最大特点是把教材

内容通过二维码的平台与教学微视频等教学资源结合起来，突破了教学时间和空间以及条件的限制，给不同层次不同需要的学习者提供了更多的学习机会；其二在拓展知识中，把MATLAB软件程序应用于每章的主要内容(第6章除外)，为学生将来的实际应用和数学建模奠定基础；其三，进行理论与实际结合的引导，即在拓展知识中，有每章对应内容的应用模型或范例，可增强学生的应用意识和兴趣. 教材内容体系的呈现在强调科学性、系统性、逻辑性的同时，兼顾学生的可接受性. 把“线性代数”与“空间解析几何”进行了“数”与“形”的有机融合. 利用解析几何为抽象的代数理论提供形象直观的几何背景，同时线性代数又为研究几何图形的性质提供方法论基础,实现了从几何向量空间向n维向量空间的自然过渡. 比如，向量组的线性相关性是本书中较抽象难懂的内容，学生不易理解，而借助于几何向量的解释，挖掘揭示其中的数学思想，可大大降低其理解的难度.

全书内容的编排顺序合理，由易到难，循序渐进，既有理论知识的训练，又有实际应用案例的引导，可对学生数学素质的形成和提高起到应有的作用. 另外本书增加了使用MATLAB软件对相关问题的求解程序，并以线性方程组为主线贯穿整个教材，每章内容都与线性方程组有关. 第1章的行列式起源于解线性方程组；第2章的平面、直线方程可用线性方程组表示；第3章的矩阵更是讨论线性方程组解的有力工具；第4章的n维向量与线性方程组给出了解线性方程组的具体方法；第5章的特征值与特征向量实际就是线性方程组的应用；第6章的二次型化标准形,主要方法是求二次型对应矩阵的特征值与特征向量,也是解线性方程组. 整本书结构严谨，内容丰富，为学生数学建模并有效解决实际问题提供了保障.

全书由郭晓丽教授审稿并提出修改意见和建议，谭瑞梅最后统稿并整理. 黄守佳老师对编写本书做了很多工作并提出了宝贵的意见和建议. 第1、6章由李乐编写，第2、4章由谭瑞梅编写，第3章由刘强编写，第5章由黄守佳编写，每章拓展知识的第一部分MATLAB软件应用由时海亮编写，每章拓展知识的第二部分应用模型或案例由孟令显编写，王淑娟编写了课后习题与答案. 本书在申报与编写的过程中得到了郑州轻工业大学领导和教务处领导的关心与支持，同时也得到了数学与信息科学学院的大力支持，黄士国副院长做了很多相应的工作. 秦建国教授审阅了书稿并提出了建议. 科学出版社对本书的出版给予了很大的帮助，出版社张中兴老师做了很多细致具体的工作. 在此一并表示最诚挚的感谢.

尽管我们竭尽全力使本书成为一本便于教和学的新时代的教材,但限于水平，书中难免有不尽如人意的地方，恳请读者提出宝贵的意见.

编　者

2017年8月

目　录

前言
第 1 章　行列式及其计算 …… 1
1.1　n阶行列式 …… 1
1.1.1　二、三阶行列式 …… 1
1.1.2　排列与反序数 …… 4
1.1.3　n 阶行列式的定义 …… 5
习题1.1 …… 8
1.2　行列式的性质 …… 9
1.2.1　行列式的性质 …… 9
1.2.2　利用性质计算行列式 …… 13
习题1.2 …… 16
1.3　行列式按行(列)展开 …… 17
1.3.1　余子式、代数余子式的概念 …… 17
1.3.2　行列式按行(列)展开定理 …… 19
习题1.3 …… 24
1.4　克拉默法则 …… 25
1.4.1　克拉默法则 …… 25
1.4.2　齐次线性方程组有非零解的条件 …… 27
习题1.4 …… 28
复习题1 …… 29
*1 拓展知识 …… 33
*1.5　MATLAB软件介绍及计算行列式的程序 …… 33
1.5.1　MATLAB简介 …… 33
1.5.2　MATLAB桌面 …… 33
1.5.3　命令窗口 …… 33
1.5.4　M文件 …… 34
1.5.5　MATLAB基础知识 …… 35
1.5.6　计算行列式的软件程序示例 …… 38
*1.6　行列式的应用模型 …… 38

第 2 章　几何向量空间与几何图形 ······ 40
2.1　几何向量空间 ······ 40
2.1.1　向量及其线性运算 ······ 40
2.1.2　空间直角坐标系与向量的坐标 ······ 42
2.1.3　向量的模、方向角与方向余弦 ······ 44
2.1.4　几何向量的投影 ······ 48
习题2.1 ······ 48
2.2　几何向量的乘法 ······ 49
2.2.1　数量积 ······ 49
2.2.2　向量积 ······ 52
2.2.3　混合积 ······ 54
习题2.2 ······ 55
2.3　空间的平面与直线 ······ 56
2.3.1　平面及其方程 ······ 56
2.3.2　直线及其方程 ······ 60
2.3.3　距离与平面束 ······ 65
习题2.3 ······ 67
2.4　空间曲面与曲线 ······ 68
2.4.1　球面及其方程 ······ 68
2.4.2　柱面及其方程 ······ 70
2.4.3　锥面及其方程 ······ 72
2.4.4　旋转曲面和一般曲面及其方程 ······ 73
2.4.5　空间曲线及其方程 ······ 77
习题2.4 ······ 82
复习题2 ······ 82
$*_2$ 拓展知识 ······ 84
*2.5　MATLAB制作空间图形的程序示例 ······ 84
*2.6　几何上的应用 ······ 97
第 3 章　矩阵 ······ 99
3.1　矩阵 ······ 99
3.1.1　矩阵的概念 ······ 99
3.1.2　几种特殊的矩阵 ······ 101
3.1.3　矩阵概念的应用 ······ 103
习题3.1 ······ 104

3.2 矩阵的运算 ………………………………………………………… 105
3.2.1 矩阵的加法 ………………………………………………………… 105
3.2.2 矩阵的数乘 ………………………………………………………… 106
3.2.3 矩阵的乘法 ………………………………………………………… 107
3.2.4 方阵的幂 ………………………………………………………… 110
3.2.5 矩阵的转置 ………………………………………………………… 112
3.2.6 方阵的行列式 ………………………………………………………… 113
*3.2.7 共轭矩阵 ………………………………………………………… 114
习题3.2 ………………………………………………………… 114
3.3 矩阵的初等变换 ………………………………………………………… 115
3.3.1 线性方程组的高斯消元法 ………………………………………………………… 116
3.3.2 矩阵的初等变换 ………………………………………………………… 117
3.3.3 初等矩阵 ………………………………………………………… 120
习题3.3 ………………………………………………………… 122
3.4 逆矩阵 ………………………………………………………… 123
3.4.1 逆矩阵的概念 ………………………………………………………… 123
3.4.2 可逆矩阵的判定及求法 ………………………………………………………… 124
3.4.3 矩阵方程的解法 ………………………………………………………… 129
习题3.4 ………………………………………………………… 131
3.5 矩阵的分块 ………………………………………………………… 132
3.5.1 矩阵的分块方法 ………………………………………………………… 132
3.5.2 分块矩阵的运算 ………………………………………………………… 134
习题3.5 ………………………………………………………… 138
3.6 矩阵的秩 ………………………………………………………… 139
3.6.1 矩阵秩的概念 ………………………………………………………… 139
3.6.2 矩阵秩的求法 ………………………………………………………… 141
3.6.3 线性方程组解的判定定理 ………………………………………………………… 143
习题3.6 ………………………………………………………… 148
复习题3 ………………………………………………………… 150
*3 拓展知识 ………………………………………………………… 154
*3.7 有关矩阵的MATLAB软件程序示例 ………………………………………………………… 154
3.7.1 矩阵乘法的软件程序 ………………………………………………………… 154
3.7.2 求矩阵的秩软件程序 ………………………………………………………… 156
*3.8 矩阵的应用模型 ………………………………………………………… 156

3.8.1 矩阵在视图制作中的应用 …… 157
3.8.2 矩阵在密码和解密模型中的应用 …… 158
3.8.3 经济学中的投入产出模型 …… 160
第 4 章 *n* 维向量与线性方程组 …… 163
4.1 *n*维向量 …… 163
4.1.1 *n*维向量的概念 …… 163
4.1.2 *n*维向量的线性运算 …… 164
4.1.3 向量空间及其子空间 …… 165
习题4.1 …… 166
4.2 向量组的线性相关性 …… 166
4.2.1 向量组的线性表示 …… 166
4.2.2 向量组的线性相关性 …… 171
4.2.3 向量组线性相关性的有关定理 …… 176
习题4.2 …… 179
4.3 向量组的秩 …… 179
4.3.1 向量组的秩与极大线性无关组 …… 179
4.3.2 向量组的秩与矩阵秩的关系 …… 182
4.3.3 求极大线性无关组的方法 …… 183
4.3.4 向量空间的基、维数与向量的坐标 …… 185
习题4.3 …… 187
4.4 齐次线性方程组解的结构 …… 187
4.4.1 齐次线性方程组解的性质 …… 187
4.4.2 齐次线性方程组的基础解系与解的结构 …… 188
习题4.4 …… 192
4.5 非齐次线性方程组解的结构 …… 193
4.5.1 非齐次线性方程组解的性质 …… 193
4.5.2 非齐次线性方程组解的结构 …… 194
习题4.5 …… 198
复习题4 …… 199
$*_4$ 拓展知识 …… 201
*4.6 软件程序示例 …… 201
4.6.1 求矩阵的秩软件程序示例 …… 201
4.6.2 解线性方程组的软件程序示例 …… 202
*4.7 应用模型 …… 205

4.7.1 向量组线性相关性的应用模型 ······ 205
4.7.2 线性方程组的应用模型 ······ 209
第 5 章 矩阵的特征值与特征向量 ······ 212
5.1 n维向量的内积 ······ 212
5.1.1 n维向量的内积 ······ 212
5.1.2 正交向量组与标准正交向量组 ······ 214
5.1.3 施密特正交化方法 ······ 215
5.1.4 线性变换与正交变换 ······ 216
习题5.1 ······ 218
5.2 矩阵的特征值与特征向量 ······ 219
5.2.1 特征值与特征向量的概念 ······ 219
5.2.2 求特征值与特征向量的方法 ······ 220
习题5.2 ······ 224
5.3 相似矩阵 ······ 225
5.3.1 相似矩阵的概念 ······ 225
5.3.2 矩阵的相似对角化 ······ 226
5.3.3 实对称矩阵的对角化 ······ 228
习题5.3 ······ 234
复习题5 ······ 235
$*_5$ 拓展知识 ······ 237
*5.4 求特征值的软件程序示例 ······ 237
*5.5 特征值与特征向量的应用模型 ······ 239
5.5.1 矩阵的极限 ······ 239
5.5.2 离散动态系统的演化 ······ 240
第 6 章 二次型 ······ 243
6.1 二次型及其标准形 ······ 243
6.1.1 二次型及其标准形 ······ 243
6.1.2 化二次型为标准形的方法 ······ 246
习题6.1 ······ 250
6.2 正定二次型 ······ 250
6.2.1 正定二次型的概念 ······ 250
6.2.2 正定二次型的判定 ······ 251
习题6.2 ······ 253
复习题6 ······ 253

*6 拓展知识 …… 257
*6.3 二次型的应用 …… 257
习题参考答案与提示 …… 260
参考文献 …… 283

第 1 章　行列式及其计算

行列式起源于解 n 个方程 n 个未知量的线性方程组，是研究矩阵、线性方程组、向量间的线性关系、特征值和二次型等问题的有力工具，它不仅贯穿于线性代数的始终，在数学的其他分支领域以及经济管理、物理、工程技术等学科中也都有着广泛的应用. 本章从解二元与三元线性方程组入手引入二阶与三阶行列式的概念，进而用排列的奇偶性把行列式推广到 n 阶，再讨论行列式的性质、计算方法以及用行列式求解线性方程组的克拉默法则.

1.1　n 阶行列式

1.1.1　二、三阶行列式

对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

利用消元法可得

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2, \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}. \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，可得方程组的唯一解

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases}$$

为了便于记忆上述解的公式，引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

并给出如下二阶行列式的定义.

定义 1.1.1　由 2×2 个数构成的记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 称为**二阶行列式**，它表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}. \tag{1.1.1}$$

它的横排称为**行**，竖排称为**列**，数 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 称为行列式的**元素**. 元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为**行标**，表明该元素位于第 i 行；第二个下标 j 称为**列标**，表明该元素位于第 j 列. 通常用"D"或"det"表示行列式.

二阶行列式(1.1.1)中，等号右端的表示式又称为**行列式的展开式**. 二阶行列式的展开式可以用如下**对角线法则**来记忆：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

称上式的实线为**主对角线**，虚线为**副对角线**. 于是二阶行列式便是主对角线上两元素之积减去副对角线上两元素之积所得的差.

利用二阶行列式，可以把上述方程组的解表示为

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\frac{D_1}{D}, \qquad x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\frac{D_2}{D},$$

称 D 为方程组的系数行列式.

例 1.1.1　计算二阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$.

解　$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=1\times4-(-2)\times3=10$.

为解三个方程三个未知量的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases}$$

我们用类似的方法，引入三阶行列式的概念.

定义 1.1.2　由 3×3 个数构成的记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 称为**三阶行列式**，它表示代

数和 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

三阶行列式也可用对角线法则得到. 三阶行列式的对角线法则如图 1.1.1 所示. 图中有三条实线可看作平行于主对角线的连线，三条虚线可看作平行于副对角线的连线，实线上三元素的乘积带正号，虚线上三元素的乘积带负号，所得六项的代数和就是三阶行列式的展开式.

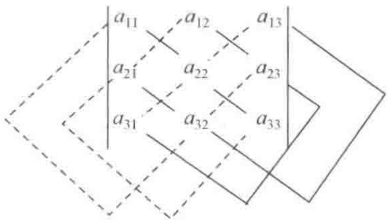


图 1.1.1

若上述三元线性方程组的系数行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0$，则方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

其中

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

例 1.1.2　计算三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$.

解　按对角线法则，有

$$\begin{aligned} D&=1\times2\times(-2)+2\times1\times(-3)+(-4)\times(-2)\times4-1\times1\times4-2\times(-2)\times(-2)\\ &\quad-(-4)\times2\times(-3)\\ &=-14. \end{aligned}$$

对角线法则只适用于二阶与三阶行列式. 为研究四阶及更高阶的行列式，下

面先介绍有关排列的知识，然后引出 n 阶行列式的概念.

1.1.2 排列与反序数

定义 1.1.3 由正整数$1,2,\cdots,(n-1),n$组成的一个有序数组，称为一个 n **级排列**.

如2431是一个4级排列，45123是一个5级排列，$12\cdots(n-1)n$是一个 n 级排列，它具有自然顺序，称为**自然排列**(或**标准排列**).

n 级排列共有$n!$个，例如，3级排列共$3!$个，它们分别是123，132，213，231，312，321，其中只有123是自然排列，其他的3级排列都或多或少破坏了自然顺序.

定义 1.1.4 在一个排列中，如果一个大数排在了一个小数前面，就称这两个数构成一个**反序**．一个排列的反序总数称为这个排列的**反序数**．以后用$\tau(j_1j_2\cdots j_n)$表示排列$j_1j_2\cdots j_n$的反序数.

反序数为奇数的排列称为**奇排列**，反序数为偶数的排列称为**偶排列**.

例 1.1.3 计算下列排列的反序数，并判断其奇偶性.

(1) 2431； (2) 45132.

解 (1) 在4级排列2431中,共有反序21,43,41,31,故$\tau(2431)=4$,所以2431为偶排列；

(2) 在5级排列45132中，共有反序41,43,42,51,53,52,32，故$\tau(45132)=7$，所以45132为奇排列.

例 1.1.4 求排列$n(n-1)\cdots321$的反序数，并讨论其奇偶性.

解 排列$n(n-1)\cdots321$的反序数

$$\tau(n(n-1)\cdots321)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2},$$

故当$n=4k$或$n=4k+1$时，排列$n(n-1)\cdots321$是偶排列，而当$n=4k+2$或$n=4k+3$时，排列$n(n-1)\cdots321$是奇排列.

定义 1.1.5 在一个排列中，交换其中某两个数的位置，而其余各数的位置不动，就得到一个同级的新排列.对排列施行这样的一个交换称为一个**对换**，将相邻的两个数对换，叫做**相邻对换**.

关于对换有如下结论：

定理 1.1.1 对换改变排列的奇偶性，即经过一次对换，奇排列变成偶排列，偶排列变成奇排列.

证明略.

推论 1 任意一个 n 级排列可经过一系列对换变成自然排列，并且所作对换次数的奇偶性与这个排列的奇偶性相同.

证明 由定理1.1.1知，对换的次数就是排列奇偶性的变换次数，而自然排列

是偶排列，因此结论成立.

推论 2　在全部的 n 级排列中，奇偶排列各占一半，即各有 $\frac{n!}{2}$ 个.

证明　设奇、偶排列各有 p, q 个，则 $p+q=n!$. 将 p 个奇排列的前两个数对换，则这 p 个奇排列全变成偶排列，并且它们互不相同，所以 $p \leqslant q$. 同理，将 q 个偶排列的前两个数对换，则这 q 个偶排列全变成奇排列，并且它们互不相同，所以 $q \leqslant p$. 综上所述有 $p=q=\frac{n!}{2}$.

1.1.3　n 阶行列式的定义

为了给出 n 阶行列式的定义，先来研究三阶行列式的展开式中项的构成规律. 三阶行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

容易看出：

(1) 它的每一项都是 3 个元素的乘积，并且这三个元素位于三阶行列式的不同行、不同列；

(2) 每一项的三个元素的行标排成自然排列 123 时，列标都是 1,2,3 的某一排列，这样的排列共有 3!=6 种，故三阶行列式展开式中含有 6 项；

(3) 当每一项中元素的行标按自然顺序排列时，带正号的三项的列标排列是 123, 231, 312，它们全是偶排列. 而带负号的三项的列标排列是 132, 213, 321，它们全是奇排列. 即三阶行列式展开式中每一项的符号是当每一项中元素的行标按自然顺序排列时，如果对应的列标为偶排列时取正号，为奇排列时取负号.

综上所述，三阶行列式的展开式中的一般项可表示为 $(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$，从而三阶行列式可简写为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2j_3}$ 表示对所有的 3 级排列求和. 类似地，二阶行列式可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2} (-1)^{\tau(j_1j_2)} a_{1j_1}a_{2j_2},$$