

· 第二十一辑  
数学与人文

“十三五”国家重点图书

北京市科学技术协会科普创作出版资金资助

# 数学竞赛和数学研究

主编 丘成桐 刘克峰 杨乐 季理真  
副主编 熊斌

高等教育出版社

Mathematics & Humanities

非外借

# 新加坡的港口新加坡



数学与人文·第二十二辑

Mathematics & Humanities

# 数学竞赛和数学研究

SHUXUE JINGSAI HE SHUXUE YANJIU

主编 丘成桐 刘克峰 杨乐 季理真  
副主编 熊斌

“十三五”国家重点图书  
北京市科学技术协会科普创作出版资金资助

高等教育出版社·北京

International Press

---

图书在版编目(CIP)数据

数学竞赛和数学研究 / 丘成桐等主编. -- 北京:  
高等教育出版社, 2017.11  
(数学与人文; 第22辑)  
ISBN 978-7-04-048737-4

I. ①数… II. ①丘… III. ①数学—普及读物 IV.  
①O1-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第247883号

---

Copyright © 2017 by  
**Higher Education Press Limited Company**  
4 Dewai Dajie, Beijing 100120, P. R. China, and  
**International Press**  
387 Somerville Ave., Somerville, MA 02143, U.S.A.

---

策划编辑 李 鹏  
责任编辑 李 鹏 李华英 赵天夫  
封面设计 王凌波  
责任印制 尤 静

---

出版发行 高等教育出版社  
社 址 北京市西城区德外大街4号  
邮政编码 100120  
购书热线 010-58581118  
咨询电话 400-810-0598  
网 址 <http://www.hep.edu.cn>  
<http://www.hep.com.cn>  
网上订购 <http://www.hepmall.com.cn>  
<http://www.hepmall.com>  
<http://www.hepmall.cn>  
印 刷 涿州市星河印刷有限公司  
开 本 787mm×1092mm 1/16  
印 张 12.25  
字 数 220千字  
版 次 2017年11月第1版  
印 次 2017年11月第1次印刷  
定 价 29.00元

---

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究  
物料号 48737-00

## 内 容 简 介

本专辑的主题是数学竞赛以及它与数学研究之间的关系。

在“数学史上有名的解题竞争”栏目中，汪晓勤和郭学萍以翔实的史料介绍了 16 世纪意大利数学家之间关于求解三次方程的激烈竞争——这场竞争导致复数的发现，并引发 19 世纪阿贝尔和伽罗瓦开创现代数学的工作。王善平介绍了 17 世纪法国数学家帕斯卡和费马如何通过信件来往互相挑战解决关于赌金分配的问题——他们的工作开创了近代概率论这门学科。在“数学竞赛面面观”栏目中，牛伟强介绍了美国“普特南数学竞赛”，汪杰良介绍了丘成桐中学数学奖，冷岗松的文章对数学竞赛命题的类型、评判标准作了深入的分析，田廷彦写了“奥数与奥数热之我见”，冯大诚回忆自己在 20 世纪 60 年代参加的中学生数学竞赛并批评了当前教育的急功近利。诺贝尔物理学奖获得者 Frank Wilczek 谈论了自己在高中时代所参加的“西屋青少年科学竞赛”。在“从数学竞赛到数学研究”栏目中，两位菲尔兹奖获得者兼 IMO 金牌获得者 W. Timothy Gowers 和 Stanislav Smirnov 分别撰文，以亲身的体验告诉我们，奥数竞赛问题与数学研究问题之间的根本差别。

本专辑还刊载了谢耘的“创新的挑战与教育的缺失”、郭书春的“李善兰翻译的微分、积分与《九章算术》”、约翰·麦卡利的“流形与纤维空间的历史”等文章。

## 丛书编委会

主 编 (按姓氏笔画排序):

丘成桐 刘克峰 杨 乐 季理真

名誉编委 (按姓氏笔画排序):

万哲先 王 元 石钟慈 齐民友 吴文俊 张景中

编 委 (按姓氏笔画排序):

于 靖 马绍良 王仁宏 王则柯 王善平 井竹君 田 野  
冯克勤 曲安京 朱熹平 刘献军 许洪伟 孙小礼 严加安  
李文林 李 方 李建华 杨 静 肖 杰 吴 杰 沈一兵  
张英伯 张顺燕 张海潮 张奠宙 周 坚 郑方阳 郑绍远  
胡作玄 姚恩瑜 袁向东 顾 沛 徐 浩 翁玉林 黄宣国  
康明昌 蔡文端

责任编委 (按姓氏笔画排序):

王善平 李 方

丛书编辑部 (按姓氏笔画排序):

邓宇善 刘建中 张 超 赵春莉

合作单位:

中国科学院晨兴数学中心

浙江大学数学科学研究中心

丘成桐数学科学中心

# 《数学与人文》丛书序言

丘成桐

《数学与人文》是一套国际化的数学普及丛书，我们将邀请当代第一流的中外科学家谈他们的研究经历和成功经验。活跃在研究前沿的数学家们将会用轻松的文笔，通俗地介绍数学各领域激动人心的最新进展、某个数学专题精彩曲折的发展历史以及数学在现代科学技术中的广泛应用。

数学是一门很有意义、很美丽、同时也很重要的科学。从实用来讲，数学遍及物理、工程、生物、化学和经济，甚至与社会科学有很密切的关系，数学为这些学科的发展提供了必不可少的工具；同时数学对于解释自然界的纷繁现象也具有基本的重要性；可是数学也兼具诗歌与散文的内在气质，所以数学是一门很特殊的学科。它既有文学性的方面，也有应用性的方面，也可以对于认识大自然做出贡献，我本人对这几方面都很感兴趣，探讨它们之间妙趣横生的关系，让我真正享受到了研究数学的乐趣。

我想不只数学家能够体会到这种美，作为一种基础理论，物理学家和工程师也可以体会到数学的美。用一种很简单的语言解释很繁复、很自然的现象，这是数学享有“科学皇后”地位的重要原因之一。我们在中学念过最简单的平面几何，由几个简单的公理能够推出很复杂的定理，同时每一步的推理又是完全没有错误的，这是一个很美妙的现象。进一步，我们可以用现代微积分甚至更高深的数学方法来描述大自然里面的所有现象。比如，面部表情或者衣服飘动等现象，我们可以用数学来描述；还有密码的问题、计算机的各种各样的问题都可以用数学来解释。以简驭繁，这是一种很美好的感觉，就好像我们能够从朴素的外在表现，得到美的感受。这是与文化艺术共通的语言，不单是数学才有的。一幅张大千或者齐白石的国画，寥寥几笔，栩栩如生的美景便跃然纸上。

很明显，我们国家领导人早已欣赏到数学的美和数学的重要性，在 2000 年，江泽民先生在澳门濠江中学提出一个几何命题：五角星五角套上五个环后，环环相交的五个点必定共圆，意义深远，海内外的数学家都极为欣赏这个高雅的几何命题，经过媒体的传播后，大大地激励了国人对数学的热情，我希望这套丛书也能够达到同样的效果，让数学成为我们国人文化的一部分，让我们的年轻人在中学念书时就懂得欣赏大自然的真和美。

# 前言

熊斌

没有什么学科领域比数学更像竞技体育了。数学家钻研数学难题，有时不仅仅是为了探究数学的抽象结构或解决重要的应用问题；而更像是在参加一场智力上的竞赛，优胜者赢得荣耀和地位。如同体育比赛，数学也是“胜者为王”——往往只承认第一名而忽视第二名。在近代数学史中，数学家的解题竞争曾经是数学发展的重要动力。在当代，各种数学竞赛作为数学课堂教学的补充盛行于大中小学，甚至出现了仿效体育奥林匹克的“国际数学奥林匹克”(IMO)。然而，特别是在中国，过分看重数学竞赛的成绩，把它们当作保送学生进名校的“敲门砖”的做法，也受到广泛的质疑和批评。

本专辑将呈现数学竞赛的若干方面，以期让读者对数学的这一重要特点有更多的了解，并能帮助推动关于如何正确理解数学竞赛与数学研究之间的关系以及如何在数学教育中合理开展数学竞赛活动等问题的深入思考和讨论。

汪晓勤和郭学萍的“16世纪的数学竞赛与三次方程求根公式的诞生”，以翔实的史料，生动描述了16世纪意大利数学家之间关于求解三次方程的激烈竞争；这场竞争导致复数的发现，并刺激后辈数学家寻找更高次方程的根式解——其最终结果是19世纪阿贝尔和伽罗瓦开创现代代数学的工作。王善平的“17世纪赌金分配的解题竞争与概率论的诞生”，通过解读当时法国两位数学家帕斯卡和费马之间的通信，介绍他们如何互相挑战解决关于赌金分配的问题——他们的工作开创了近代概率论这门学科。

牛伟强的“普特南数学竞赛简介”，让我们得以了解这个享有盛名的美国大学生数学竞赛的起源、规则和发展。汪杰良的文章，介绍了以国际数学大师丘成桐先生命名的中学数学奖，该奖的宗旨是：“激发中学生对于数学研究的兴趣和创造力，鼓励中学生在数学方面的创造性，培养和发现年轻的数学天才，建立中学教师和大学教授之间的联系。”

冷岗松的文章对数学竞赛命题的类型、评判标准作了深入的分析，并给出许多有趣的例子来演示如何产生合适的竞赛命题。田廷彦的“奥数与奥数热之我见”，结合其亲身经历，对奥数的特点、奥数热的形成及其所产生的社会问题进行了剖析和反思。冯大诚在其文章中，回忆自己在20世纪60年代



参加的中学生数学竞赛；并对比当时的教育状况，对现代中国教育的急功近利作了分析和批评。

诺贝尔物理学奖获得者维尔切克（Frank Wilczek）在其文章中，谈到自己在高中时代参加“西屋青少年科学竞赛”（现更名为“英特尔青少年科学竞赛”）获得优胜奖，这件事如何改变了他的一生，并认为这个青少年科学竞赛在美国科学中有重要的作用。两位菲尔兹奖获得者高尔斯（W. Timothy Gowers）和斯米尔诺夫（Stanislav Smirnov）——他们也是 IMO 金牌获得者——分别撰文，以亲身的体验告诉我们，奥数竞赛问题与数学研究问题之间的根本差别。

本专辑还刊载了谢耘的文章“创新的挑战与教育的缺失”，其中对现有的教育体系如何有效支撑创新作了很有启发性的论述和建议。郭书春的“李善兰翻译的微分、积分与《九章算术》”，通过对中国传统数学经典及其刘徽注的鞭辟入里的分析，考察了“微分”和“积分”这两个词在中西方数学中所代表之含义的异同。约翰·麦卡利（John McCleary）的“流形与纤维空间的历史”，形象地用“乌龟”和“兔子”来形容两类不同工作方式的数学家，他们共同创造和发展了现代微分几何中一些重要的基本概念。

# 目 录

《数学与人文》丛书序言（丘成桐）

前言（熊斌）

## 数学史上有名的解题竞争

- 3 16 世纪的数学竞赛与三次方程求根公式的诞生（汪晓勤、郭学萍）  
18 17 世纪赌金分配的解题竞争与概率论的诞生（王善平）

## 数学竞赛面面观

- 31 普特南数学竞赛简介（牛伟强）  
45 丘成桐中学数学奖介绍（汪杰良）  
60 谈谈数学竞赛命题（冷岗松）  
73 奥数与奥数热之我见（田廷彦）  
106 亲历 60 年代的数学竞赛——兼说教育的急功近利（冯大诚）  
109 青少年科学竞赛如何影响了美国科学  
（Frank Wilczek, 译者：梁丁当）

## 从数学竞赛到数学研究

- 115 国际数学奥林匹克问题与研究问题之比较  
——从 Ramsey 理论谈起（W. Timothy Gowers, 译者：张瑞祥）

- 129 如何比较研究问题与国际数学奥林匹克问题?  
——围绕游戏漫步 (Stanislav Smirnov, 译者: 姚一隼)

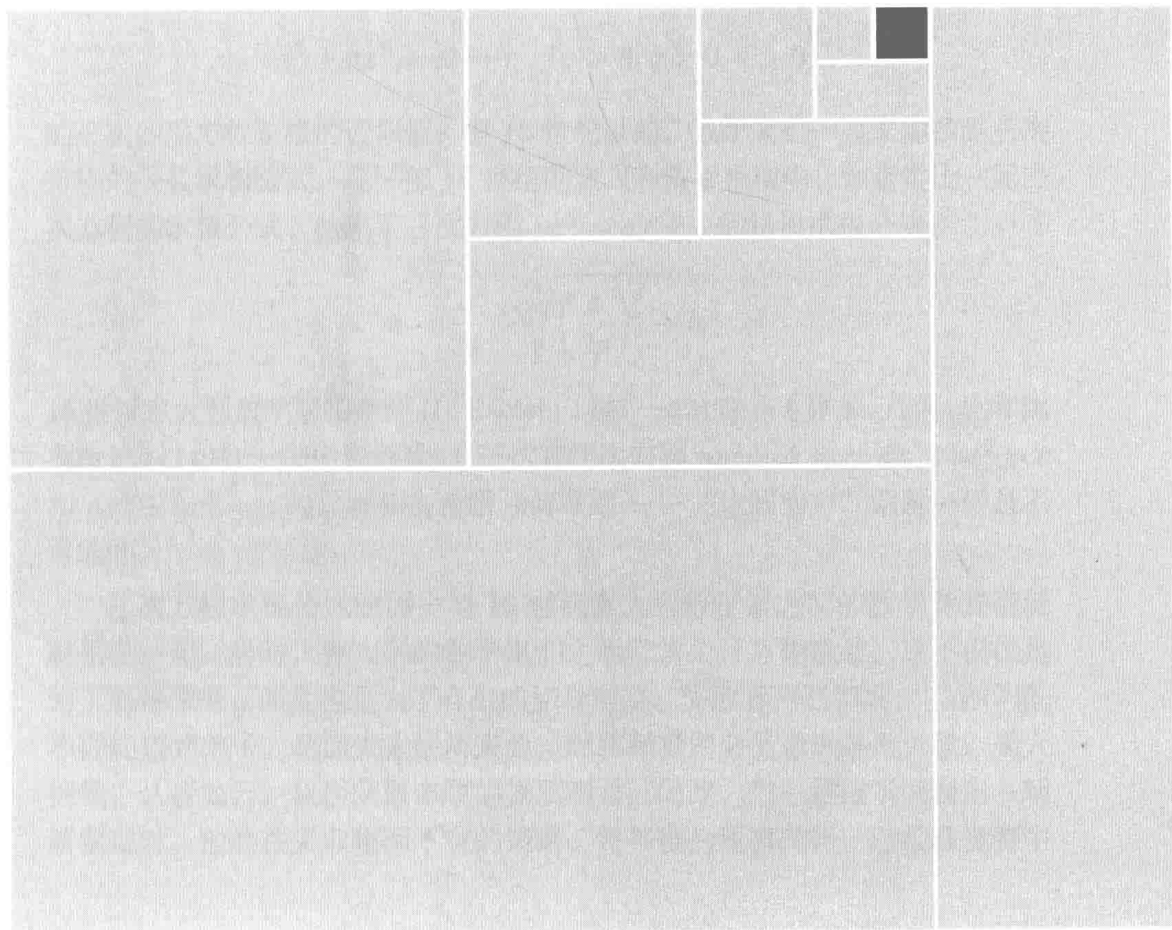
### 创新与教育

- 143 创新的挑战与教育的缺失 (谢耘)

### 数学史

- 149 李善兰翻译的微分、积分与《九章算术》(郭书春)  
163 流形与纤维空间的历史: 乌龟与兔子 (约翰·麦卡利, 译者: 罗之麟)

## 数学史上有名的解题竞争





## 16 世纪的数学竞赛与三次方程求根公式的诞生

汪晓勤、郭学萍

汪晓勤，华东师范大学教师教育学院教授，博士生导师，现任全国数学史学会副理事长和全国数学教育研究会副理事长。研究方向为数学史与数学教育。

郭学萍，华东师范大学数学系副教授。

虽然古代中国、印度和阿拉伯人都会解一元三次二项方程，5 世纪的中国数学家祖冲之、7 世纪的中国数学家王孝通和 13 世纪的意大利数学家斐波那契还会求形如

$$x^3 + px^2 + qx = r \quad (p > 0, q > 0, r > 0)$$

的三次四项方程正根的近似值，但 16 世纪以前，数学家们一直未能找到三次方程的一般求根公式。在一部 14 世纪的意大利数学手稿中，作者类比一元二次方程的求根公式，给出了三次方程  $px^3 = ax + b$  的错误求根公式：

$$x = \frac{a}{2p} + \sqrt[3]{\left(\frac{a}{2p}\right)^2 + b}.$$

15 世纪意大利数学家帕乔利 (L. Pacioli, 1445—1517) 在《算术、几何、比和比例概论》(1494) 一书中告诉我们，三次和四次方程  $ax^3 + bx = c$ ,  $ax^3 + bx^2 = c$  和  $ax^4 + bx^3 = c$  的求解和古希腊几何难题——“化圆为方”问题一样是不可能的。

三次方程求根公式的历史与 16 世纪意大利数学家之间的数学竞赛密切联系在一起。当时，意大利的数学家们之间常常公开互相挑战，这不仅仅是为了赢得荣誉，而且也是为了各自的切身利益。失败者声名扫地，门庭冷落，不再能招到弟子，从而失去经济来源；而胜利者则会受邀去各地讲学，受人拥戴，从者如云，从而获取丰厚的物质利益。因此，当一位数学家做出一项新发现时，他往往采取秘而不宣的策略，将其视为秘密武器，以便在竞赛中

凭借这样的秘密武器而战胜对手。然而，这样的秘密武器却给三次方程求根公式的发现者塔尔塔利亚 (N. Tartaglia, 1499—1557) 带来了不幸。

## 一、水城较量

塔尔塔利亚于 1499 年出生于意大利的布雷西亚城。父亲是一名邮递员，约于 1506 年去世，抛下母子三人相依为命。塔尔塔利亚 13 岁时，法国军队入侵布雷西亚，在教堂中避难的他头部五处受伤。幸亏有母亲的精心护理，他才活了下来，但留下了终身的后遗症：口吃。“塔尔塔利亚”在意大利语中即为“口吃”之意。14 岁时，塔尔塔利亚上了学，但很快由于缴不起学费而辍学，此后再也没有上过学。在同龄人接受学校教育的时候，他却为谋生而干起辛苦的体力活，用他自己后来的话说，“唯有‘贫穷’的女儿——‘辛劳’与他做伴”。但他很早就显示出了惊人的数学才能，约在 18 岁时，他当上了算术老师。而立之年，他成了家，并经营过一所学校。1534 年，他去了威尼斯，当上了数学教授。

1530 年，塔尔塔利亚的老乡、在布雷西亚经营一所算术学校的科瓦 (Zuan de Torrini da Coi) 向塔尔塔利亚请教如下问题：

- 一个数的平方根加 3，乘以这个数，乘积为 5，求这个数。
- 求三数，其中第二数比第一数大 2，第三数又比第二数大 2，三数乘积为 1000。

用今天的代数符号表示，这两个问题分别相当于求解三次方程  $x^3 + 3x^2 = 5$  和  $x^3 + 6x^2 + 8x = 1000$ 。

塔尔塔利亚答复说，他已经获得求解三次方程

$$x^3 + px^2 = q \quad (1)$$

的一般方法，但由于种种原因，他只能秘而不宣；至于第二个问题，他承认不会解，但他丝毫不相信它是不能解的。他措辞严厉地对科瓦说：“我知道布雷西亚的教授们对您敬而远之，因为，为了让他们视您为大数学家，您向他们提些连您自己也不会解的问题。我敢用 10 杜卡托<sup>1)</sup> 赌您 5 杜卡托，这两个问题就属于这种情况。您应该为这种行为感到羞愧！”

塔尔塔利亚自称会解三次方程的消息传到了博洛尼亚人费奥 (Antonio Maria Fiore) 的耳朵里。这个费奥曾经是博洛尼亚大学算术与几何学教师费罗 (S. Ferro, 1465—1526) 的学生。早在二十多年前，费罗成功地解出方程

<sup>1)</sup>威尼斯古金币名。

(1) 的根, 并把解法传授给了费奥。因此, 费奥有恃无恐, 夸下海口说, 既然塔尔塔利亚自称能解三次方程, 那他就要来羞辱他一番。塔尔塔利亚觉得费奥只是个没有任何理论知识的算术家, 起先并没有把他放在心上。但当他得知费奥的老师曾把方程 (1) 的解法教给费奥时, 他开始担心起来。于是, 他全身心投入对这个方程的研究, 终于在 1535 年 2 月 14 日找到了方程 (1) 以及

$$x^3 = px + q, \quad (2)$$

$$x^3 + q = px^2 \quad (3)$$

的解法。八天后, 即 1535 年 2 月 22 日, 费奥果真来到威尼斯, 并向他提出公开挑战。塔尔塔利亚接受了挑战。在公证人赞贝里 (Jacomo Zambelli) 家, 费奥提出了 30 个问题, 并拿出一笔钱; 塔尔塔利亚也准备了 30 个问题并出同样的钱。根据协定, 30 至 40 天以后, 谁解出对方的问题多, 谁就获胜, 并赢得对方的钱。费奥的前 15 个问题是这样的:

(1) 一个数加上它的立方根, 和为 6。求这个数。

(2) 有大小二数, 其中大数是小数的两倍。大数的平方乘以小数, 所得乘积再加上这两个数, 和为 40。求该数。

(3) 一个数加上它的立方, 和为 5。求该数。

(4) 有大小三数, 第二数是第一数的 3 倍, 第三数又是第二数的 3 倍。一、三、三数相乘, 所得乘积加上第二数, 和为 7。求这三个数。

(5) 二人共花钱 900 杜卡托, 其中一人所花钱数等于另一人钱数的立方根。两人各花多少?

(6) 二人共挣钱 100 杜卡托, 其中一人所挣钱数等于另一人钱数的立方根。两人各挣多少?

(7) 一数加上它的立方根的两倍, 和为 13。求这两个数。

(8) 一数加上它的立方根的三倍, 和为 15。求这两个数。

(9) 一数加上它的立方根的四倍, 和为 17。求这两个数。

(10) 将 14 分成两部分, 使其中一部分是另一部分的立方根。

(11) 将 20 分成两部分, 使其中一部分是另一部分的立方根。

(12) 珠宝商以 2000 杜卡托出售一钻石和一红宝石, 红宝石的价格是钻石价格的立方根。钻石与红宝石价格各多少?

(13) 守财奴放高利贷, 年息是本金的立方根。守财奴年末连本代息共收钱 800 杜卡托, 问本金多少?

(14) 将 13 分成两部分, 使得两部分的乘积等于小部分自乘的平方。求这两部分。



(15) 某人以 500 杜卡托的价格出售一蓝宝石，赢利为成本的立方根。问成本多少？

另外 15 个问题分别是：将 7、12、9、25、26、28、27、29、34、12、100、140、300、810、700 分成两部分，使其中一部分等于另一部分的立方根。

易见，所有这 30 个问题都相当于求解方程

$$x^3 + px = q. \quad (4)$$

塔尔塔利亚在不到两小时内解出了费奥的所有 30 个问题，而面对他所提出的 30 个问题，费奥却一筹莫展，无奈之中，交了白卷。塔尔塔利亚赢得荣誉，但对于费奥的钱他却分文不取。

1536 年 12 月 10 日，科瓦来到威尼斯，向塔尔塔利亚索要他向费奥提出的 30 个问题。塔尔塔利亚说，他并没有留底，不过公证人手头有一份。无论如何，他拒绝给出问题的答案。尽管如此，他还是把自己 30 个问题中的前 4 个告诉给了科瓦：

(1) 一个无理量的平方根加上 40，所得和乘以该无理量，乘积为一给定有理数。求该无理量。

(2) 30 与一个无理量的平方根的差，乘以该无理量，乘积为一给定有理数。求该无理量。

(3) 一个无理量加上它的立方根的 4 倍，和为 13。求该无理量。

(4) 一个无理量减去它的立方根的 3 倍，差为 10。求该无理量。

科瓦立即发现，这四个问题分别相当于求解三次方程  $x^3 + px^2 = q$ ， $x^3 + q = px^2$ ， $x^3 + px = q$  和  $x^3 = px + q$ 。既然菲奥从费罗那里学习过三次方程解法，又为何上述四个问题一个都没解出来？可见菲奥并没有真正掌握三次方程的解法。塔尔塔利亚的另外 26 个问题不详，但它们都属于几何与代数问题。

为了求出这些问题的解，科瓦冥思苦想，却一无所获。12 月 16 日，他再次来到塔尔塔利亚家，请求塔尔塔利亚的指点。塔尔塔利亚告诉他说，这些发现花费了他许多心思；他觉得，如未能获得荣誉和利益，他有什么义务非要公开这些发现呢？他知道完全隐藏这样的发现是不合理的；等到译完欧几里得《几何原本》后，他会把自己的发现全部发表。为了显示他并不过分看重自己的发现，他向科瓦提出：“对于你给我的附有答案的每一个问题，如果我解不出来，那么我会告诉你一个一般公式，以此来换取你的解法。”科瓦接受了这一建议，并立即提出如下两个问题：