普通高等教育"十三五"规划教材
公共基础课精品系列

经济数学基础之二

总主编 朱弘毅

线性代数

（第二版）

上海高校《经济数学基础》编写组 编

立信会计出版社
LIXIN ACCOUNTING PUBLISHING HOUSE

等教育"十三五"规划教材
出课精品系列

经济数学基础之二

总主编 朱弘毅

线性代数

（第二版）

上海高校《经济数学基础》编写组 编

立信会计出版社
LIXIN ACCOUNTING PUBLISHING HOUSE

图书在版编目(CIP)数据

线性代数 / 上海高校《经济数学基础》编写组编. —2 版. —上海：立信会计出版社，2017. 8

普通高等教育“十三五”规划教材. 公共基础课精品系列/朱弘毅主编

ISBN 978 - 7 - 5429 - 5559 - 3

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①上… Ⅲ. ①线性代数—高等学校—教材 Ⅳ. ①O151. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 208279 号

策划编辑　蔡莉萍
责任编辑　蔡莉萍

线性代数(第二版)
Xianxing Daishu

出版发行	立信会计出版社		
地　　址	上海市中山西路 2230 号	邮政编码	200235
电　　话	(021)64411389	传　　真	(021)64411325
网　　址	www. lixinaph. com	电子邮箱	lxaph@sh163. net
网上书店	www. shlx. net	电　　话	(021)64411071
经　　销	各地新华书店		

印　　刷	上海肖华印务有限公司	
开　　本	710 毫米×960 毫米	1/16
印　　张	12. 75	
字　　数	267 千字	
版　　次	2017 年 8 月第 2 版	
印　　次	2017 年 8 月第 1 次	
印　　数	1—3100	
书　　号	ISBN 978 - 7 - 5429 - 5559 - 3/O	
定　　价	28. 00 元	

如有印订差错，请与本社联系调换

《经济数学基础》编写组

总主编　朱弘毅（上海应用技术大学）

编　委　（按姓氏笔画排列）

王洁明　车荣强　付春红　朱玉芳　朱建忠

朱弘毅　庄海根　许建强　孙海云　李潇潇

吴　珞　张　峰　张满生　罗　琳　罗　纯

周伟良　周家华　居环龙　查婷婷　赵斯泓

桂胜华　徐　洁　陈春宝　龚秀芳

主　审　陈启宏（上海财经大学）

审稿组　（按姓氏笔画排列）

王培康（上海大学）　许伯生（上海工程技术大学）

朱德通（上海师范大学）　沙荣方（上海海洋大学）

束金龙（上海市教委）　苏文悌（上海理工大学）

陈启宏（上海财经大学）

第二册《线性代数》（第二版）

主　编　车荣强　罗　琳　周伟良

副主编　吴　珞　桂胜华　徐　洁

第二版前言

经济数学是经济管理类各专业的一门基础课，其目的在于将数学应用于经济学，为经济分析服务为适应高等教育的发展和教学改革的需要，在《经济数学基础》（第一版）基础上，组建了《经济数学基础》（第二版）编写组，进行《经济数学基础》（第二版）的编写工作。

本教材在第一版的基础上，按照经济管理类数学课程教学基本要求，结合教学改革成果，力求使《经济数学基础》（第二版）满足应用型人才培养的要求。

《经济数学基础》（第二版）共分三册。第一册《微积分》，内容包括函数、极限与连续，导数与微分，微分中值定理与导数的应用，不定积分，定积分及其应用，多元函数微积分，微分方程及其应用，无穷级数，MATLAB 软件的应用共九章；第二册《线性代数》，内容包括行列式，矩阵，线性方程组，线性规划，特征值、特征向量及二次型，MATLAB 软件的应用共六章；第三册《概率论与数理统计》，内容包括随机事件及其概率，随机变量及其分布，二维随机变量及其分布，随机变量的数字特征与极限定理，数理统计的基本概念，参数估计，假设检验，方差分析与回归分析，MATLAB 软件的在概念统计中的应用共十章。

为了让学生掌握数学知识的实质及所含的数学思想，本教材详细介绍了基本概念的实际背景，让学生掌握处理问题、解决问题的方法；注意加紧基本运算方法的训练、计算能力和应用能力的培养；不追求过分复杂的计算，始终贯彻理论联系实际和启发式教学原则。

为了将计算机融入高等数学，本教材简单介绍国际上最流行的 MATLAB 数学软件的操作及其在高等数学中的应用。

本教材每节后面配有习题，每章后配有复习题。

为便于学习，由立信会计出版社另行出版本教材的同步学习辅导书。

《经济数学基础》(第二版)由朱弘毅任总主编,参加编写的有(按姓氏笔画为序),王洁明、车荣强、付春红、朱玉芬、朱建忠、朱弘毅、庄海根、许建强、孙海云、李潇潇、吴珞、张峰、张满生、罗琳、罗纯、周伟良、周家华、居环龙、查婷婷、赵斯泓、桂胜华、徐洁、陈春宝、龚秀芳。

《经济数学基础》(第二版)由上海财经大学教授陈启宏主审,参加审稿的(按姓氏笔画为序)有:王培康(上海大学)、许伯生(上海工程技术大学)、朱德通(上海师范大学)、沙荣方(上海海洋大学)、束金龙(上海市教委)、苏文悌(上海理工大学)、陈启宏(上海财经大学)。各位专家认真审阅原稿,并提出了许多宝贵的意见。本书在编写和出版过程中得到立信会计出版社领导以及蔡莉萍编辑的支持和帮助,在此表示衷心的感谢。

限于编者的水平和时间的仓促,对于书中所存在的未发现的不妥之处,恳请广大教师和学生提出批评指正。

朱弘毅于香歌丽园

2017 年仲夏

初版前言

为适应高等教育的发展，在上海市教委的组织和领导下组成上海高校《经济数学基础》编写组。为培养德、智、体、美等方面全面发展的高等应用型人才，我们编写了一套具有特色的经济类和管理类专业的教材。

《经济数学基础》共分三册，第一册《微积分》，内容包括函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数应用、不定积分、定积分及其应用、二元函数微积分、微分方程与级数；第二册《线性代数》，内容包括行列式、矩阵、向量及线性相关性、线性方程组、投入产出模型、线性规划问题；第三册《概率论与数理统计》，内容包括随机事件与概率、随机变量及其分布、二维随机变量、随机变量的数字特征、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析。

这套教材，以“理解基本概念、掌握运算方法及应用”为依据，按照《经济数学基础课程教学基本要求》，结合数学教学改革的实际经验编写。这套教材注意从实际问题中引入概念；注意把握好理论推导证明的深度；注重基本运算能力、分析问题和解决问题能力的培养；贯彻理论联系实际和启发式教学原则；深入浅出，通俗易懂，便于教师讲授和读者自学。本教材中每节后面配有习题，每章后面配有复习题。

《经济数学基础》由朱弘毅任总主编，参加编写的有(按姓氏笔画为序)：车荣强、朱弘毅、刘志石、李树冬、余敏、沈昕、张福康、周伟良、居环龙、赵斯泓、施国锋、费伟劲、桂胜华、钱锦、龚秀芳。

《经济数学基础》由上海交通大学教授李重华主审，参加审稿的还有：邱慈江(上海应用技术学院)、冯珍珍(上海第二工业大学)、姚力民(上海商学院)、俞国胜(上海

大学)、罗爱芳(上海城市管理学院)。他们认真审阅原稿,提出了许多宝贵的意见。本教材在编写和出版过程中得到了上海市教委高等教育办公室徐国良副主任、立信会计出版社孙时平总编辑、蔡莉萍编辑的支持和帮助,在此一并表示衷心感谢。

在编写过程中,因作者水平有限,疏漏之处在所难免,恳请同仁和读者不吝指正。

朱弘毅于秀枫翠谷

2000 年暮春

目　　录

第一章 行 列 式

行列式是线性代数中一个重要概念。行列式是在讨论线性方程组的解法中产生的。本章在给出 n 阶行列式的递归定义后讨论了 n 阶行列式的性质和计算方法。本章最后介绍了应用行列式求解线性方程组的克莱姆法则。

第一节 行列式的概念

一、二阶行列式与三阶行列式

对两个未知量的线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1-1}$$

用消元法进行求解。为消去未知量 x_2，以 a_{22} 与 a_{12} 分别乘方程组(1 - 1)的两个方程的两端，然后将两个方程相减，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2$$

类似地，我们消去 x_1，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，得线性方程组(1 - 1)的解为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases} \tag{1-2}$$

在(1 - 2)式中，分子、分母都是四个数，分两对相乘再相减而得。由此，引进二阶行列式概念。

定义 1 用 2^2 个数组成的符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

称为**二阶行列式**，表示数值 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

其中，a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22}称为行列式的**元素**。横排称**行**，竖排称**列**。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

图 1-1
对角线法则

二阶行列式表示的代数和，可用图 1-1 所表示的对角线法则来记忆，即代数和等于其中实线连接的两个元素的乘积减去虚线连接的两个元素的乘积。

根据二阶行列式的定义，(1-2)中的分子也可以写成二阶行列式，即

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\ a_{11}b_2-b_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\ D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

那么(1-2)式可写成

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\ x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

行列式 D 是由方程组(1-1)式的系数所构成的，称为方程组(1-1)式的**系数行列式**，行列式 D_1 与 D_2 则分别是用方程组(1-1)式的常数项 b_1，b_2 替代其系数行列式 D 中 x_1 与 x_2 的系数列后所构成的。当系数行列式 $D\neq 0$ 时，方程组(1-1)式一定有上述公式给出的唯一解。

【例 1】 计算二阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$。

解 由对角线法则，得

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 2 \times 7 - 5 \times 3 = -1$$

【例 2】 解线性方程组$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 8 \\ x_1 - 2x_2 = -3 \end{cases}$。

解 因为$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \times (-2) - 3 \times 1 = -7$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 8 \times (-2) - 3 \times (-3) = -7$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2 \times (-3) - 8 \times 1 = -14$$

又 $D = -7 \neq 0$，故所给方程组有唯一解。

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-7}{-7} = 1，x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-14}{-7} = 2$$

同样地，为便于求解三个未知量的线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

我们引入三阶行列式。

定义 2 由 3^2 个数组成的符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

称为**三阶行列式**，表示数值

$$(-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$+ (-1)^{1+3} \cdot a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

由二阶行列式的计算方法，得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1-3}$$

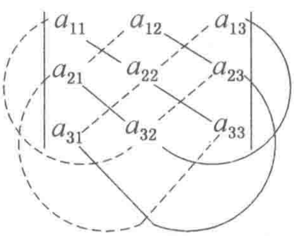

图 1-2　对角线法则

(1-3)式称为三阶行列式的**展开式**。它有如下特点：共有六项，每一项都是行列式的不同行、不同列的三个元素之积，其中三项取“+”号，三项取“-”号。记忆方法如图 1-2 所示的对角线法则：用实线连接的三个元素之积取正号，用虚线连接的三个元素之积取负号。

【例 3】 计算三阶行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$。

解　按对角线法则，有

$$D = 1 \times 2 \times (-2) + 2 \times 1 \times (-3) + (-4) \times (-2) \times 4$$
$$- (-4) \times 2 \times (-3) - 1 \times 1 \times 4 - 2 \times (-2) \times (-2) = -14$$

【例 4】 求解方程 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix} = 0$。

解　方程左端

$$D = 3x^2 + 4x + 18 - 12 - 9x - 2x^2 = x^2 - 5x + 6$$

由 $x^2 - 5x + 6 = 0$，解得 $x = 2$ 或 $x = 3$。

二、n 阶行列式

按照三阶行列式的定义，我们可用三阶行列式定义四阶行列式。

定义 3 用 4^2 个数组成的符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

称为**四阶行列式**，表示数值

$$(-1)^{1+1}\cdot a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}\cdot a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{1+3}\cdot a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}+(-1)^{1+4}\cdot a_{14}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+1}\cdot a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}\cdot a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{1+3}\cdot a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}+(-1)^{1+4}\cdot a_{14}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} \tag{1-4}$$

【例 5】 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 4 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$。