

BAI KE SHI JIE ZHI SHI CONG SHU

百科世界知识丛书

科学素质教育文库

第三辑



5

抽象的数学

(下册)



广州出版社

科学素质教育文库：

百科世界知识丛书·第三辑

5

抽象的数学

(下册)

柯焕德 主编
刘韶远 编著
李以泉

广州出版社

奥新登字 16 号

责任编辑 辛 子

责任校对 容晓风

封面设计 一点工作室

学 校 的 变 迁

(下册)

书 名 百科世界知识丛书(第三辑)

编 者 柯焕德主编

出版发行 广州出版社(广州市人民中路同乐路10号 邮编:510121)

经 销 各地新华书店

印 刷 北京海德印务有限公司

规 格 787 × 1092 毫米 32 开本 82.5 印张

字 数 1396 千字

版 次 1997 年 11 月第 1 版

印 次 2004 年 9 月第 2 次

印 数 20001—30000 册

书 号 ISBN7 - 80592 - 707 - 3/G·131

定 价 163.00 元

前 言

数学是人类文明的一个重要组成部分,在文化发展中占据着举足轻重的地位。数学不仅是各门科学赖以精确化的工具和理论基础,是思想启蒙和思维训练的必修课程,还是各种哲学思想交锋之地。

数学反映了人们积极进取的意志、缜密周详的推理以及对完美境界的追求。人们一直认为每一个受教育者都必须具备一定的数学知识,对数学知识与训练的需要也日益增加。而数学的抽象却常常让人望而却步,数学教育的方法也存在问题。数学教学有时变为空洞的解题训练;数学研究也出现过于专门化和过于强调抽象的趋势,而忽视了数学的应用以及与其他领域的联系,这种情况严重影响了数学的发展和应用。数学不仅仅是数学家的事,民族素质的提高、国家的兴盛都和数学水平的提高密切相关。我们的祖先发展了先进的、具有自己特色的数学。占据世界领先地位的中国古代数学,在灿烂的中华文化中也有着非常重要

的地位。今天的我们应继承前人的传统,为世界数学的发展作出贡献。为此,我们要重视数学的教育和数学知识的普及。

本书力求将抽象的数学以通俗的形式介绍给读者,使读者对数学的特征、数学的发展、数学的各主要分支有一定的了解,首先从数开始,系统介绍了人类从正整数到有理数、从有理数到无理数、从实数到复数的认识过程,中间还附有几个有趣的数字游戏和故事,这一部分内容是通俗易懂的,然后介绍了著名的数学猜想、数学悖论,如费马猜想、四色定理、罗素悖论等,从问题的提出、解决过程以及猜想悖论对推动数学发展的作用作为较为详细的介绍。还将本世纪初希尔伯特提出的 23 个问题以及问题的进展一一列出。对数学发展的介绍我们从几个不同侧面加以分析,如历史上的数学中心使大家了解各国对数学的贡献;数学的四次重大转折介绍数学发展中四次质的飞跃;数学争论和各流派简介则介绍了人们对数学的认识、研究方法的不同,了解这些是非常有益的。数学方法的内容很多,我们介绍了几种常用的或重要的方法,如公理法、证明法等等。数学分支同样选择了一些重要的分支,最后介绍了一些重要的数学奖和数学竞赛。

《抽象的数学》分上、下册。此为下册。

目 录

数学各主要分支

一、数学各主要分支	(1)
1. 概率论与数理统计	(1)
2. 数论	(11)
3. 抽象代数	(18)
4. 编码学与密码学	(21)
5. 拓扑学	(26)
6. 运筹学	(30)
7. 模糊数学与模糊工程	(49)
8. 数理逻辑	(55)
9. 非欧几何学	(61)
10. 计算数学	(68)
11. 突变理论	(74)
12. 分形几何学	(79)
13. 初等几何学	(82)
14. 经济数学	(90)
二、数学奖与数学竞赛	(101)
1. 国际数学界的最高奖	(101)
2. 国际数学奥林匹克竞赛	(113)

一、数学各主要分支

1. 概率论与数理统计

概率论和数理统计是研究随机现象及其规律性的一门科学。

概率论创立于 17 世纪,但它的思想萌芽至少可追溯到 16 世纪。最先使数学家们对偶然现象产生兴趣的问题是由赌博者提出的。一些职业赌徒,为求增加获胜的机会,迫切需要计算取胜的思路。如一位意大利贵族请伽利略解释下述的问题:掷三颗骰子,出现 9 点与 10 点各有六种不同组合,但在经验上发现出现 10 点的次数多于 9 点,这是为什么?伽利略作了合理的解释。

他的解释是:出现 9 点有六种组合,它们是(1,2,6)、(1,3,5)、(1,4,4)、(2,2,5)、(2,3,4)、(3,3,3),出现 10 点也有六种组合。但各种组合出现的机会并非相等。例(3,3,3)只有一个途径掷出,而(3,3,4)则有三种不同途径掷出。这样,9 点共有 25 种不同途径掷

出,而 10 点则有 27 种不同途径掷出。

另一位法国赌徒梅耳则提出一个掷骰子中的难题:掷一粒骰子 4 次至少出现一个 6 点的机会要比掷两粒骰子 4 次至少出现一对 6 点的机会更大些,这就是有名的“梅耳猜想”,他请法国数学家帕斯卡来解答。这一问题引起了帕斯卡和费尔马的极大兴趣。经过多次通信研究,于 1654 年对此问题获得一般的解法,肯定了“梅耳猜想”是对的,并奠定了近代概率论和组合分析基础。所以说,概率论的起源是随机游戏,由此诞生了古典概率。

促使概率论产生的直接动力是来自保险事业的需要。17 世纪工业和商业的迅速发展,刺激了保险事业的兴起。保险公司为了获得必要的费用和利润,必须预先估计像火灾、水灾和死亡等意外事件的发生的概率,从而确定保险金和预算公司的利润。如假设可估计出某一年龄段的死亡率为 0.01,即这一年龄段的人在当年死亡的概率为 0.01,每人一年付 100 元的保险费。若有 1000 人参加,则保险公司收入为 10 万元,赔偿金如何确定呢?我们来看,1000 人中大概为 10 人死亡,则保险公司即使给每个死亡者付 5000 元,这一年也只预期付出 5 万元。而对投保者来说,100 元到 5000 元,这也是吸引人的。

1657 年,荷兰物理学家惠更斯发表了“论赌博中

的计算”的重要论文,提出了数学期望的概念。伯努利把概率论的发展向前推进了一步,于1713年出版了《猜测的艺术》一书,指出概率是频率的稳定值,并第一次阐明了大数定律的定义。1718年棣莫弗发表了《机遇原理》,并在1733年发现了正态分布的密度函数为

$$f(x, \mu, a^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}a} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2a^2}}, -\infty < x < +\infty$$

后来,高斯在研究测量同一物体所引起的误差这一随机现象时独立地发现了正态分布的密度函数,并发展了误差理论,提出了最小二乘法。法国数学家拉普拉斯对概率的意义如何抽象化作出了杰出的贡献,提出了概率的古典定义。他著有《分析概率》和《概率的哲学探讨》等书。这两本书总结了整个前一时代的研究成果,系统叙述了概率论的基本定理,给出了著名“棣莫弗——拉普拉斯中心极限定理”的理论证明。并把概率论有效应用于误差统计、人口统计、通信和天文学等方面,取得很多重要的成果。

19世纪末,20世纪初,俄国数学家切比雪夫继承了拉普拉斯的理论研究工作,把概率论的理论研究推进了现代化的门槛。他的学生马尔科夫作出了更有深远意义的工作。著名的马尔科夫过程,即无后效性的随机过程,已成为现代概率论的一个分支,在原子物理、理论物理、公用事业等方面有着广泛的应用。

尽管此时概率论的主要研究内容已基本形成,但作为数学的一个分支,概率论还没有建立自己的公理体系。这个问题直到 1933 年才由苏联数学家柯尔莫哥洛夫完成,提出了概率的公理化定义。从此,概率论的发展进入了一个新的时期。

早在本世纪 30 年代末至 50 年代初,著名数学家杜布和莱维又创立了鞅论。鞅论理论的发展,不仅成为随机过程中最活跃的分支之一,而且还越来越广泛地应用于马氏过程、点过程、估计理论、随机控制等各理论分支及其应用领域。现在随机过程论、随机场、随机微分、极限理论、鞅论等正成为当代概率论的主要研究方向。我国在概率论研究方面越来越引起世界的重视,在某些分支方面处于国际领先地位,许多分支已达到世界先进水平。

下面介绍一个简单的例子,这个例子会有出人意料的结果,这就是著名的浦丰针问题。

在一张纸上画一些平行线,相邻的两条平行线之间的距离为 $2a$,将一根长为 $2l$ ($l < a$) 的针任意投在纸上。这时,针和纸上的平行线可能相交,或不相交。投上几次,设有 m 次针与直线相交。在很多概率论教材上都可查到针与直线相交的概率为 $p = \frac{2l}{a\pi}$ 。此时,我们就可以近似计算 π 值,公式为 $\pi = 2 \cdot \frac{l \cdot n}{a \cdot m}$ 。用针

与平行线相交这一随机试验竟然能计算 π 值,这是很多人意想不到的。

数理统计的主要任务是研究随机数据的搜集、整理、分析和推断,它以概率论为理论基础,可分为描述性统计和分析性统计。前者主要研究数据的搜集和整理;后者主要研究数据的分析和推断。

描述性统计的产生可追溯到很久远。

公元前 2250 年,大禹治水,根据山川土质,人口和物质统筹开凿河道。三代时期实行井田制,根据人口和土地的统计资料按人分地。各朝代由于军事和征税的需要,对土地、人口、财产和年龄都有统计资料可查并绘有图表。可见我国早已应用描述性统计,只是缺乏专门研究,未形成系统知识。

埃及在建造金字塔时,为征集费用,对全国人口、财产进行全面统计。后来,统计逐渐往理性演变,统计在卫生、保险、贸易、军事和行政管理方面的应用都有详细记载。对现代统计学的形成有较大贡献者是英国人格朗特,他对生命统计、保险统计和经济统计都进行研究,在 1662 年出版了《对死亡表的自然观察和政治观察》一书。当时统计学被称为“政治算术”。

进入 18 世纪后,由于概率论的发展提供了理论根据,统计学的数学性质不断加强,得到迅速发展。到 19 世纪中叶,比利时统计学家凯特莱特和英国人类学

家高尔顿对统计作出了较大的贡献。凯特莱特不仅将统计方法应用于生物学,也应用于教育学和社会学,并预言:“统计方法,可应用于各种科学的各个部门。”

高尔顿对遗传学非常感兴趣,他搜集了从豌豆到人类很多资料,专门研究数据的模型及相关关系,他首先引入回归和相关的概念。1889年他出版《自然的遗传》一书,提出了相关系数。在遗传学的研究中发现,后代的属性与双亲相关,则儿子身高 Y 与父亲身高 X 可归结为以下关系式:

$$\hat{Y} = 0.516 \cdot X + 33.73 \quad (\text{单位:英寸})$$

英国的皮尔逊潜心研究数据的分布理论。他提出了标准差、正态曲线、平均变差、均方误差等一系列数理统计的基本术语。到1901年,他创办了《生物统计学》杂志,使数理统计有了自己的阵地。

英国统计学家费希尔对现代数理统计的形成和发展作出了重大的贡献。他致力于数理统计在农业科学和遗传学中的应用。他将66年的施肥、田间试验和气候资料加以整理、归纳,从中提取信息,为他作理论研究打下基础。他是一些有重要理论和应用价值的统计分支和方法的开创者。其主要成就有:系统地发展了正态总体统计量的抽样分布,这标志着相关分析、回归分析和多元分析等分支的初步建立;建立了以极大

似然估计为中心的点估计理论；他与耶茨合作创立了试验设计，并发展了与这种设计相适应的数据分析方法——方差分析法。

1928年~1938年，雷曼、皮尔逊等建立了假设检验的一种严格的数学理论，把假设检验问题作为一个数学最优化问题来处理。瓦尔德建立了统计决策理论。

英国是数理统计的发源地和研究中心。但从第二次世界大战开始，美国也发展得很快。在战争中，人们研究飞机上某种投弹装置的效果。首先用数学分析的方法列出连续向矩形阵地投三颗炸弹的方程，但不仅方程难列，计算复杂，实际结果也不好。后改用数理统计法，使用若干统计数据，综合投弹的概率模型，就很容易得出许多重要的信息。美国数理统计的研究颇有成效，哥伦比亚研究组在理论和实践上都有重大成就。其中最著名的是“序贯分析”，被称为“30年来最有威力的统计思想”。至今它仍是统计学中的重要领域之一。

“序贯分析”的产生是由于军方的需要。1942年，哥伦比亚大学应用数学研究所接到一项任务，改进原来用来求敌机一次射击恰巧击中并引爆我机携带炸弹的概率的公式。他们提出了一个更简单的公式，但为了有较高的精密度需要很大的样本，而且需要实弹试

验。能不能设计出一条比较节约的规则,使试验达到一定精度时自动停止?

1943年春,瓦尔德提出了序贯分析法。在经典统计推断中,全部数据只影响最后的结论,数据的个数也是预先确定的。序贯分析则不同,每收集一个数据都得考虑是否要停止观测以及对结论有何影响这两个问题。瓦尔德加上一条能判断是否需要停止的规则的数字描述,这一办法能用较少的试验得到化简公式,从而节约大量的弹药和试验费用。1950年,瓦尔德创立了统计决策理论,把统计推断看成是人和自然的一种“博弈”,企图把各种统计问题归并在一个统一的模式之下,这种理论对战后数理统计各分支的发展产生较大影响。

还值得提出的是80年代,由日本的田口玄一创建的“田口方法”。田口玄一是世界著名质量管理专家,他从实际出发,创建了一套在产品开发、设计和实验设计中有着广泛应用的方法,这种方法与传统的数理统计方法有所不同。但实际应用效果极佳。目前,很多国家都在应用、改进他的方法。

数理统计发展到现在,主要包括抽样、曲线拟合、假设检验、方差分析、试验设计、统计决策等主要内容。

我们对一个研究对象进行调查或试验时,理论上全面调查最完善,但有很多研究对象不允许这么做,也

没必要这样做。这样,调查只能“抽一部分”进行试验,这就是抽样。但抽多少合适,怎么抽最好,这些就构成抽样的基本内容。

曲线拟合就是根据积累的经验数据来求出理论分布曲线,从而获得整个问题的近似解。则如何求理论分布即按什么原则求理论分布?如何比较各种曲线的优劣?怎么判断与理论分布的真值的差别?这些问题就属于数理统计的曲线拟合问题。其实,中学物理实验中电流和电压的实验就是一个简单的曲线拟合问题,这是最简单的曲线——直线。

假设检验是指在用数理统计方法检验产品时,先作出一个假设,然后根据抽样观察的结果对假设作出有一定可靠程度的判断,决定接受或拒绝原来的假设。比如,厂方说其产品的次品率为5%,买方在不作全面检查的情况下,可任意抽取若干个产品检查,然后根据检查结果作出承认其次品率为5%或不承认其次品率的决定。

方差分析是用分解样本方差的方法对各个因素是否有明显的影响作出判断。如通过一些农田试验,运用方差分析,对种子、施肥量、地块等因素是否对产量有明显影响作出判断,从而指出哪些因素是主要因素,哪些不是。

试验设计就是研究如何科学地设计试验的一门统

计学科。是考虑如何以尽量少的试验次数而又能得到好的结果的。现在,正交设计,均匀设计正被广泛的应用。

统计决策是从人所采取行动的优劣由其后果来衡量的观点出发,研究如何依样本而采取行动的统计科学。例如,一个商店要决定今年内某种产品的进货量。假定每积压一件损失 20 元,而少销售一件则损失 10 元,商店必须根据抽样调查所得到的关于销售的信息,作出关于进货数量的决策。

概率论和数理统计通称为随机数学,它们密切相关又有所不同。数理统计是利用样本,对未知的或部分未知的模型作出推断。

需要强调的是,数理统计所作的任何推断都不是百分之百是对的,即总有出错的可能,这是由于它是由一部分的信息而对全体作推断,不过,它本身可控制犯错误的可能性。所以说,在数理统计中,不能以“一时成败”论“英雄”。这是和其他数学分支不同的地方。

我国统计学家经过多年努力,在参数估计、非参数统计、现代回归分析以及大样本理论等方面都取得世界一流的研究成果。在国外的华裔统计学家也取得了许多成果,在世界上较有影响,他们成立了“泛华统计学会”,对国内一些青年学者提供资助,促使他们早日成才。

2. 数 论

1900年,德国数学家希尔伯特在一次国际数学家大会上,提出了具有重要意义的23个问题,哥德巴赫猜想被列为第8个问题的一部分。谁解决了哥德巴赫猜想,谁就摘取了数学王冠上的明珠,这已是举世公认的事情。那么,究竟什么是哥德巴赫猜想呢?解决它为什么具有如此重大的意义呢?这要从数论这门学科的历史说起。

我们知道,6等于 2×3 ,但7不能同样写作两个因子之积。我们称像7这样的不能写作两因子乘积的数为素数(或称质数)。例如2、3、5、7、11、13、17等都是素数。称像6这样的能写成两因子乘积的数为合数,例:6、8、10、12等都是合数。

同样,我们知道,一个数可以逐步分解,直到它化为若干素数之积。像 $6 = 2 \times 3$ 即表为两个素数之积。而 $30 = 5 \times 6 = 5 \times 2 \times 3$ 为三个素数之积。同样, $24 = 3 \times 2 \times 2 \times 2$ 可分解为四个素数之积。因此人们总结出一般规律:“任何正整数都可以写作素数之积。”所以,人们有理由认为素数是全部正整数的基础。

人们在研究整数特性的过程中,发现数和数之间