

复杂动力网络的 同步分析与控制

李宁 孙海义 孙常春◎著

工程技术领域研究人员参考用书



中国工信出版集团



人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

复杂动力网络的 同步分析与控制

李宁 孙海义 孙常春◎著

工程技术领域研究人员参考用书

人 民 邮 电 出 版 社
北 京

图书在版编目 (C I P) 数据

复杂动力网络的同步分析与控制 / 李宁, 孙海义, 孙常春著. — 北京: 人民邮电出版社, 2017.12
ISBN 978-7-115-47591-6

I. ①复… II. ①李… ②孙… ③孙… III. ①大系统
理论—研究 IV. ①N941.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第311571号

内 容 提 要

近几年, 复杂动力网络受到国内外学者的广泛关注。复杂动力网络是描述和研究复杂系统的一种重要方法。所有的复杂系统都可以从实际出发, 根据不同的研究角度, 使其抽象成为由相互作用的个体组成的复杂网络。同步是复杂网络上典型的集体行为, 是复杂网络中的一项代表性课题, 它普遍存在于各类复杂网络系统中, 并关系着众多具体问题。本书内容主要包括: 网络拓扑特性与模型、有向多重边复杂动力网络的同步分析及控制、有向多重边复杂网络的牵制同步控制、时延复杂网络的同步分析及控制、有向多重边复杂动力网络的自适应间歇控制、神经元复杂网络的间歇控制。

研究网络系统上同步行为的分析与控制问题具有积极的现实意义和理论价值。本书可以作为高等学校的控制、动力、航空、电力、管理等专业高年级本科生、研究生学习有关复杂网络同步分析及其控制问题的参考书, 也可供自然科学和工程技术领域中的研究人员参考。

◆ 著 李 宁 孙海义 孙常春

责任编辑 王飞龙

执行编辑 杨佳凝

责任印制 焦志炜

◆ 人民邮电出版社出版发行 北京市丰台区成寿寺路11号

邮编 100164 电子邮件 315@ptpress.com.cn

网址 <http://www.ptpress.com.cn>

北京京华虎彩印刷有限公司印刷

◆ 开本: 700 × 1000 1/16

印张: 16

2017年12月第1版

字数: 235千字

2017年12月北京第1次印刷

定 价: 55.00元

读者服务热线: (010) 81055656 印装质量热线: (010) 81055316

反盗版热线: (010) 81055315

广告经营许可证: 京东工商广登字 20170147号

前 言

复杂动力网络是一门新兴的交叉科学,它描述的是自然界和人类社会各个方面的形态结构及其演化规律的知识。目前它已渗透到自然科学、社会科学和工程技术中的各个领域。作者在近年从事科研工作和为本科生与研究生讲授《复杂化网络控制》《非线性动力系统混沌与控制》和《非线性分析》等课程教学的基础上编写此书。本书从复杂网络的拓扑结构和节点动力学与网络同步的相互关系出发,深入浅出地概括了复杂网络同步领域中基本的、重要的理论、方法和部分应用,以及一些新的前沿问题。本书选题新颖,紧跟时代步伐,研究内容具有积极的现实意义和理论价值。本书不仅对复杂网络同步能力和同步准则进行了深入的研究,而且对同步的控制方法及相关控制器的设计进行了深入的阐述,同时还介绍了复杂网络同步理论在工程领域和神经系统等领域的疾病防治方面的应用。作者在写作中注重实际应用,在阐明基本概念的同时,介绍了如何从工程实际问题出发,建立复杂力学网络与控制模型,应用不同的方法进行复杂网络的同步分析与控制,获取所研究模型的混沌同步动力学特征与控制效果。全书既有严格的数学推导,又有便于理解的实例,在分析的基础上尽可能提出一些值得读者进一步思考的问题。

全书共分为8章,包括如下内容。

1. 本书第1章和第2章,介绍复杂动态网络拓扑特性与常规模型,以及复杂动态网络同步的基本概念和影响同步能力的因素及提高同步能力的途径。

2. 本书第3章至第6章,介绍目前研究复杂网络同步控制的重要方法及相关控制器的设计。首先,本书介绍了同时具有耦合时延和节点时延、形式更一般的复杂网络的同步分析与控制,运用自适应理论建立了具有较强鲁棒性的自适应同步反馈控制器,所得结论不需要满足太强的条件,并且外部耦合矩阵也不需要对称或者不可约。其次,针对有向多重边复杂网络的模型,本书利用

Lyapunov 稳定性理论、线性矩阵不等式技术、分解时延项系数矩阵和自由权矩阵的方法,研究了该模型的同步性能,得到了以线性矩阵不等式形式给出的保守性更小的时延相关同步判定准则;针对外部耦合系数已知和未知、内部耦合系数为线性的情况下,分别设计了有向(无向)多重边复杂网络的线性反馈和自适应反馈同步控制器;然后又针对外部耦合系数未知且内部耦合系数为非线性的情况,分析了有向(无向)多重边复杂网络的自适应同步控制。再次,通过对部分节点施加控制作用的方法,作者设计了具有更小保守性的牵制同步控制器,使得多重边有向(无向)复杂网络达到同步。在此基础上,本书将控制器的设计问题转化为求解线性矩阵不等式(LMI)组合的凸优化问题。该问题可以借助现有的优化软件求解,大大降低了问题求解的复杂性。然后作者又对结果进一步加以改进,得到易于实现的牵制同步判别的方法。最后,本书着重讨论了有向多重边复杂网络的自适应周期间歇同步控制问题。应用 Lyapunov 稳定性理论,结合周期间歇控制技术和自适应控制、牵制控制等方法,本书分别得到了系统指数同步的自适应间歇同步控制器、自适应间歇牵制同步控制器和脉冲控制器的设计方案以及相应的准则。而且,所用方法以及所得结论均可应用到无时滞或单边的系统中去。本书所得定理中去掉了传统证明中间歇控制的控制宽度和时延上需要满足的两个条件,这样可使应用范围更广。

3. 本书第7章,分别讨论了神经元复杂网络的间歇控制以及同步控制问题,并设计了包括自适应同步控制器、牵制同步控制器、自适应非周期间歇同步控制器、脉冲同步控制器以及多时滞自适应间歇同步控制器等,并讲述了复杂神经网络的多时滞同步控制在神经系统疾病治疗中的应用。

4. 本书第8章,介绍了随机网络控制系统的鲁棒均方指数稳定性及无源控制器、 H_∞ 控制器等。本书综合考虑了同时具有网络诱导时延、数据包丢失、数据包时序错乱、系统参数扰动和外部随机扰动下的网络控制系统的随机鲁棒均方指数稳定。如果系统参数扰动中有一部分扰动是由随机过程引起的,那么在服从维纳过程的情况下,可将参数扰动分为两部分,即一般的不确定项和维纳随机过程,这样可以有效利用已知条件进一步改善系统的性能及允许网络传输的最大的时间间隔(MATI),并由此推导出系统随机鲁棒无源控制器和 H_∞ 控

制器的设计方法。

作者在写作中参考了若干已出版的有关复杂网络同步及混沌控制等方面的文献，谨向文献作者表示感谢。

本书得到了辽宁省博士启动基金（编号：20170520283）、辽宁省自然科学基金（编号：20170540769，2016010624）、辽宁省百千万人才工程资助项目（编号：2017076）和中央高校基本科研业务费项目国家项目培育种子基金（编号：N140504009）的资助，在此致以诚挚感谢。

复杂网络同步分析及其控制是一门涉及学科门类众多、发展十分迅速的新兴学科。鉴于笔者水平有限，谬误之处在所难免，敬请读者指正。

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 复杂动力网络同步分析的背景及意义	1
1.2 复杂网络的结构特征及其拓扑模型	4
1.2.1 复杂网络的特征度量	5
1.2.2 网络拓扑基本模型	8
1.3 复杂动力网络的同步及其研究现状	13
1.3.1 复杂网络的同步模式	14
1.3.2 复杂网络的同步控制研究现状	17
1.4 网络控制系统及其研究现状	21
1.5 本书的主要研究内容	22
第 2 章 复杂网络同步判别方法及同步化能力提高的途径	23
2.1 复杂网络同步判别方法	23
2.1.1 基于主稳定函数的方法	23
2.1.2 基于 Lyapunov 的方法	30
2.1.3 基于图论的方法	33
2.2 几类典型网络的同步化能力	36
2.2.1 规则网络	36
2.2.2 小世界网络	38
2.2.3 无标度网络	41
2.3 提高复杂网络同步能力的方法	42
2.3.1 通过时滞提高网络同步能力	42

2.3.2	无序扰动提高同步能力	48
2.3.3	加权耦合和去耦合提高网络同步能力	49
2.3.4	降低网络的最大介数, 提高网络同步能力	51
2.3.5	降低网络的平均距离, 提高网络同步能力	52
2.3.6	通过全局优化算法, 提高网络同步能力	52
2.4	本章小结	53
第3章	时延复杂网络的同步分析及控制	55
3.1	引言	55
3.2	预备知识	56
3.3	模型建立	57
3.4	时延复杂网络的同步准则	60
3.5	时延复杂网络的线性反馈同步控制	63
3.6	时延复杂网络的自适应同步控制	66
3.7	时延复杂网络的自适应周期间歇同步控制	69
3.8	时延复杂网络的自适应周期间歇牵制同步控制	74
3.9	数值仿真	79
3.10	本章小结	89
第4章	有向多重边复杂动力网络的同步分析及控制	91
4.1	引言	91
4.2	预备知识	92
4.3	具有线性内部耦合的有向多重边复杂网络同步分析及控制	94
4.3.1	模型建立	94
4.3.2	同步判定准则	97
4.3.3	线性反馈同步控制器设计	102
4.3.4	自适应同步控制器设计	107
4.3.5	数值仿真	111

4.4 具有非线性内部耦合的有向多重边复杂网络同步控制	120
4.4.1 模型建立	121
4.4.2 自适应同步控制器设计	122
4.4.3 数值仿真	126
4.5 本章小结	129
第5章 有向多重边复杂网络的牵制同步控制	131
5.1 引言	131
5.2 模型建立	132
5.3 有向多重边复杂网络的线性牵制同步控制	134
5.4 有向多重边复杂网络的自适应牵制同步控制	141
5.5 数值仿真	143
5.6 本章小结	146
第6章 有向多重边复杂网络的间歇同步控制	147
6.1 引言	147
6.2 模型及引理	148
6.3 多重边复杂网络的指数自适应间歇同步控制准则	150
6.3.1 多重边复杂网络的自适应周期间歇同步控制	150
6.3.2 多重边复杂网络的自适应牵制周期间歇同步控制	157
6.4 数值仿真	162
6.5 本章小节	168
第7章 复杂神经元网络的同步控制	169
7.1 引言	169
7.2 耦合神经网络自适应非周期间歇同步控制	170
7.2.1 模型及引理	170
7.2.2 耦合神经网络指数同步控制	172

7.2.3	系统仿真	179
7.3	耦合神经网络自适应周期间歇多时滞同步控制	183
7.3.1	模型及引理	184
7.3.2	病态复杂神经网络的多时滞同步	186
7.3.3	系统仿真	191
7.4	本章小结	194
第8章	随机网络控制系统的鲁棒控制	195
8.1	引言	195
8.2	不确定时延网络控制系统的 H_∞ 性能分析及 H_∞ 控制	196
8.2.1	不确定时延网络控制系统的建模	196
8.2.2	不确定时延网络控制系统的 H_∞ 控制	200
8.2.3	仿真	204
8.3	多时延网络控制系统的 H_∞ 控制	205
8.3.1	多时延网络控制系统模型的建立	205
8.3.2	多时滞网络控制系统的 H_∞ 性能分析及 H_∞ 控制器的设计	206
8.3.3	仿真	211
8.3.4	结论	211
8.4	随机网络控制系统的鲁棒无源控制	212
8.4.1	系统描述	212
8.4.2	主要结果	215
8.4.3	数值算例	226
8.5	本章小结	227
	参考文献	229

第1章 绪论

20 世纪科学的发展揭示出某些简单系统会展现复杂行为,如混沌现象等。这是用迭代过程和微分方程描述的简单系统由于非线性关系展现出的复杂行为,这是复杂性的一种重要范式。另一方面,在 21 世纪初人们广泛观察到,大量复杂系统也可由某些简单规则自组织演化而形成,这可能是复杂性更重要的一种范式,而描述这种范式的关键工具之一就是网络。

20 世纪 90 年代以来,以互联网为代表的信息技术的迅猛发展使人类社会大步迈入了网络时代,从互联网到万维网,从大型电力网络到全球交通网络,从生物体中的大脑到各种新陈代谢网络,从科研合作网络到各种经济、政治、社会关系网络等,可以说我们就生活在一个充满着各种各样的复杂网络的世界中。在自然界和人类社会中,个体总是和周围的环境紧密联系的,无论是否情愿,或多或少,个体总是时刻被环境影响,也不停地影响着环境。所以,对系统的分析不仅要分析个体自身的内容和特征,也必须关注其他个体对它的影响,采用整体的系统的分析方法。复杂网络可以用来描述从技术到生物直至社会各类开放复杂系统的骨架,而且是研究它们拓扑结构和动力学性质的有力工具。复杂网络研究为探讨复杂系统的性质提供了一个新的视角,它对探索复杂性具有一定的启发和借鉴意义。对现实世界中的系统研究需要放在复杂网络这个平台中,才能更准确地刻画其行为和功能特征。因此,对复杂网络的研究具有重大理论与实际意义,复杂网络已经逐渐成为当今科学研究的前沿和热点。本书主要将在复杂动力网络同步分析和控制等方面开展分析和研究。

1.1 复杂动力网络同步分析的背景及意义

在实证研究和网络建模的基础上来探讨、研究及预测网络系统的行为是目

前复杂动力网络的研究热点，也是复杂动力网络研究中的关键性问题之一。复杂动力网络的特点之一就是不仅网络中节点具有非线性和复杂性，而且网络的连接结构和时空演化更是错综复杂。其中，复杂动力网络系统在时空演化过程中出现的同步行为及其控制方法研究因其是复杂网络系统中最常见的一种合作行为而成为备受关注的一类课题。

同步是指性质全同或相近的两个或多个动力系统，通过系统间的相互作用，使得在不同的初始条件下各自演化的动力系统的状态逐步接近，最后达到全同的状态。应该说同步现象是耦合非线性系统中最基本、最简单的现象之一。许多合作行为的背后，其基本机制都与同步有着直接的关系。

早在 1665 年，荷兰物理学家惠更斯就在给父亲的信中提到他卧病在床的几天中观察到悬挂在同一横梁上的两个钟摆经过一段时间会出现一起摆动趋向于同步的现象，并正确地理解了这种现象发生的原因——它们通过悬挂其上的横梁相互作用而趋于同步。1680 年，荷兰旅行家 Engelbert Kaempfer 在暹罗（即现在的泰国）旅行时，记录了他在湄南河上顺流而下时观察到的大量萤火虫聚集在树上而出现的同步闪灭现象，这可能是关于复杂系统同步行为的最早记录。就目前而言，同步行为已被证实普遍存在于自然、社会以及人造环境等各类复杂系统。生活中常见的如共振现象、蟋蟀齐奏、鸟群翔集、剧院里观众响起的节奏性掌声等都是广为熟知的同步现象。2000 年，《自然》（*Nature*）杂志上发表的一篇文章从非线性动力学的观点阐述了观众掌声同步的产生机理。我们的心脏中，无数的心脏细胞同步震荡着，它们同时做着同一个动作，使心瓣膜舒张开，然后它们又一下子同时停下来，心瓣膜就收缩了。今天，同步在核磁共振仪、信号发生器、颗粒破碎机、激光系统、超导材料和通信系统等领域起着非常重要的作用。

在网络的概念被引入同步研究之前，大量的关于耦合系统同步的讨论，不论是针对两个振子还是无穷多个振子，也不论是针对极限环系统还是混沌系统，一个基本的假设是振子间的相互作用是全局的，并且动力学系统是全同的。如果将每一个动力学系统用一个点来表示，存在相互作用的两个系统间连一条线，就形成了一个动力网络。从这个角度看，因为任何两个振子之间都存在相互的

耦合作用, 以前的大部分研究就等价于完全图 (complete graph) 上的同步问题。另外, 针对规则网络 (regular network) 和随机网络 (random network) 的研究也是比较深入的。但是, 最近大量实证研究却表明, 从互联网到万维网, 从性伴侣关系到合作网络, 从神经网络到蛋白质相互作用网络, 从语义关系网到数学关系网, 丰富的真实网络具有完全不同于规则网络和随机网络的复杂结构。尽管在这些出现各种同步行为的网络中, 节点构成迥异, 数目众多, 但大规模节点突然地一起运动或行动就会出现同步现象。众多节点一起运动或行动的重要原因就在于节点间的耦合关系形成的复杂网络。复杂动力网络系统的同步研究就是围绕着网络结构与网络上的行为间的关系展开的。

理解并应用复杂网络系统中的同步行为是研究复杂系统同步的核心问题。同步行为的出现关系着众多具体问题, 直接或间接地影响着人类的和生活工作的各个方面, 如钟摆、激光、乐器、神经和心脏等。在复杂网络系统中, 同步行为的影响更广泛, 受益或所造成的危害也因系统的大尺度而更大, 例如自然界中大规模蝗灾的发生或人类社会中流行疾病 (如艾滋病、非典型性肺炎、禽流感 and 甲型 H1N1 流感等) 的爆发, 社会系统选举时群体意见的出现对候选人起着至关重要的作用, 当然也包括网络舆论问题等。同步控制的一个关键任务是控制同步行为的发生, 即在有利时产生或增强它, 在其有害时消除或减弱它, 最终达到趋利避害的目标。一个典型的例子是通信网络中的同步问题, 如在无线传感器网络中存在两种同步: 一方面, 网络中的每个处理器都有自己的内部时钟和本地时间, 即使初始时各个处理器是同步的, 时间长了也会因漂移产生很明显的偏差, 为了保证分布式数据库的一致性就必须确定操作 (事件) 的先后顺序, 这就需要时钟同步; 另一方面, 互联网上的每一个路由器都要周期性地发布路由消息, 尽管各个路由器都是自己决定什么时候发布路由消息, 但是研究人员发现不同的路由器最终会以同步的方式发送路由消息。由于通信带宽有限而可能出现周期性的拥塞现象, 这种同步现象对数据的传输和处理是有害的, 应避免这种现象的出现。

同时, 复杂网络的同步研究为仿真、控制、设计并实现复杂系统提供了新的

研究思路和研究手段。例如,现实中众多复杂系统的同步行为源于个体的自适应性。个体的自适应性逐渐演化形成群体的一致性,群体的一致性又可通过控制个体的某种特定行为而实现。由整体到个体,再由个体到整体是研究复杂系统同步控制的重要思想,同时对复杂动态过程有一个深入系统的理解。在理解个体行为通过网络与网络上的同步行为间关系的基础上,能够构建、控制、协调网络的合作行为并将其应用到诸如无人飞行器的合作、自动化公路调度、无线传感器网络的协调控制等实际网络系统中。因此,研究网络系统同步控制对探索复杂网络合作行为的形成及其控制具有重要的理论价值和潜在的应用需求。

总之,复杂动力网络系统的同步研究涉及生物学、社会科学、经济学、计算机科学与控制工程等多个领域的众多实际问题,意义深远,具有广阔的研究背景和实际需求。复杂网络同步研究与系统科学、复杂性科学、网络科学、控制理论等相互交叉结合,对未来网络化世界的探索具有重大意义。

1.2 复杂网络的结构特征及其拓扑模型

从数学描述的角度看,网络可以用图这个概念进行描述:节点可看作系统的基本个体,边可以描述节点间的相互作用。其实,早在18世纪人们就尝试用网络来描述真实系统,并在随后的两百多年里认为规则图和随机图是描述真实网络的恰当表示。直到20世纪末,计算机数据采集处理和运算能力得到飞速发展,科学家们发现大量的现实网络具有与规则图和随机图皆不相同的统计特征,并将其称为复杂网络。Watts 和 Strogatz 在1995年提出的小世界网络与Barabási 和 Albert 在1999年提出的无标度网络揭示了不同真实网络具有普遍的、不平凡的特性,被公认为复杂网络研究的两项开创性工作。这两项工作彻底颠覆了人们对真实世界网络的传统认识,掀起了复杂网络研究的热潮。众多复杂系统诸如互联网、万维网、人际关系网络、科研合作网络、电力网、交通网络、新陈代谢网络、基因调控网络、疾病传播网络等都采用复杂网络进行研究并取得了可喜的阶段性成果,复杂网络也成为一种描述和理解复杂系统的重要方法。

1.2.1 复杂网络的特征度量

现实中的复杂系统往往因其个体差异和系统结构等不同而成为独一无二的，由此抽象的网络也被理所当然地认为互不相同。然而，一个令人惊讶的结果是大部分真实网络尽管具体的拓扑结构不尽相同，但不约而同地表现出共通的统计性质，最具典型意义的是小世界效应（small - world effect）和无标度特性（scale - free feature）。这两个特征的定义均采用了不同于传统的特征度量进行描述，下面介绍几种主要的复杂网络的特征度量。

(1) 网络的图表示

网络的图（graph）表示，就是用抽象的点表示网络中的节点，用点之间的连线表示网络中节点之间的相互关系。从图论的观点来看，一个具体网络可抽象为由一个点集 V 和边集 E 组成的图 $G = (V, E)$ ，其中节点数记为 $N = |V|$ ，边数记为 $M = |E|$ 。若点对 (i, j) 与 (j, i) 对应同一条边，则为无向网络（undirected network），否则为有向网络（directed network）；若按照不同的性质，如速度、类别等，节点 i 与节点 j 之间对应着两条及两条以上的边，则为多重边网络（multi - link network），否则称为单重边网络（single link network）；若每条边都有各自相应的权值即为加权网络（weighted network），否则为无权网络（unweighted network）。当然，无权网络也可以看作是每条边的权值都为 1 的等权网络。此外，一个网络中还可能包含不同类型的节点，如在社会关系网络中可以用权表示两个人的熟悉程度，而不同类型的节点可以代表具有不同国籍、地区、年龄、性别和收入的人。本书重点介绍的是有向、加权、多重边复杂网络的同步分析与控制。

(2) 平均路径长度

网络中两个节点 i 和 j 之间的距离 d_{ij} ，定义为连接这两个节点的最短路径上的边数。特别地，网络中任意两个节点之间距离的最大值称为网络的直径，记为 D ，即：

$$D = \max_{i,j} d_{ij} \quad (1.1)$$

网络的平均路径长度 L 定义为两个节点之间的距离的平均值, 即:

$$L = \frac{1}{\frac{1}{2}N(N+1)} \sum_{i>j} d_{ij} \quad (1.2)$$

其中 N 是网络的节点数。网络的平均路径长度描述了网络中节点的分离程度。对真实网络平均路径长度的计算, 揭示了网络的“小世界 (small-world) 特性”, 比如说具有十几亿个节点的万维网, 其平均路径长度不到 20。

(3) 聚类系数

社会网络的一个共同特征是聚类特性, 比如在朋友关系网络中, 一个人的两个朋友很可能彼此也是朋友。网络的这一特性可以用聚类系数来定量描述, 假设网络的一个节点 i 有 k_i 条边将它和其他节点相连, 所连接的 k_i 个节点被称为节点 i 的邻居。这 k_i 个节点间实际存在的边数 E_i 和可能的总边数 $\frac{k_i(k_i-1)}{2}$ 之比为节点 i 的聚类系数 C_i , 即:

$$C_i = \frac{2E_i}{k_i(k_i-1)}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.3)$$

整个网络的聚类系数 C 就是网络中所有节点的聚类系数的平均值, 即:

$$C = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_i \quad (1.4)$$

显然, $0 \leq C \leq 1$ 。 $C = 0$ 当且仅当网络中所有节点均为孤立节点, 即没有任何连接边; $C = 1$ 时, 网络是全局耦合的, 即网络中任意两个节点都直接相连。对于一个含有 N 个节点的完全随机网络, 当 N 很大时, $C = O(N^{-1})$ 。而许多大规模的实际网络都具有明显的聚类效应, 它们的聚类系数尽管远小于 1 但却比 $O(N^{-1})$ 要大得多。事实上, 在许多类型的网络 (如社会关系网络) 中, 你朋友的朋友同时也是你的朋友概率会随着网络规模的增加而趋向于某个非零常数, 即当 $N \rightarrow \infty$ 时, $C = O(1)$ 。这意味着这些实际的复杂网络并不是完全随机的, 而是在某种程度上具有类似于社会关系网络中“物以类聚, 人以群分”的特性。

(4) 度与度分布

节点 i 的度 (degree) k_i 为与该节点连接的其他节点的数目。有向网络中节点的度分为入度 (in-degree) 和出度 (out-degree)，节点的入度为从其他节点指向该节点的边数，出度为从该节点指向其他节点的边数。直观上看，一个节点的度越大就意味着这个节点在某种意义上越“重要”。网络中所有节点的度的平均值为网络的平均度，记为 $\langle k \rangle$ 。网络中节点的度的分布情况可以用函数 $P(k)$ 来描述，表示一个随机选定的节点的度恰好为 k 的概率。

对于规则的格子网络，所有的节点具有相同的度，度分布为 Delta 尖峰分布。网络中任何随机性连接的引入都会使这个尖峰变宽，完全随机网络的度的分布近似为 Poisson 分布，如图 1.1 (a)，分布曲线在远离峰值 $\langle k \rangle$ 处为指数下降。当 $k \gg \langle k \rangle$ 时，度为 k 的节点概率极小，实际上是不存在的，这类网络为均匀网络 (homogeneous network)。

现实中很多网络的度分布明显不同于 Poisson 分布而可以用幂律形式 $P(k) \propto k^{-\gamma}$ 来描述，如图 1.1 (b)，被称为无标度 (scale-free) 分布。幂律分布曲线比 Poisson 指数分布曲线下降要缓慢得多。在无标度网络中，绝大多数节点的度相对很低，而少量节点的度相对很高，因此这类网络为非均匀网络 (inhomogeneous network)，那些度数很高的节点成为网络的“集线器” (hub)。

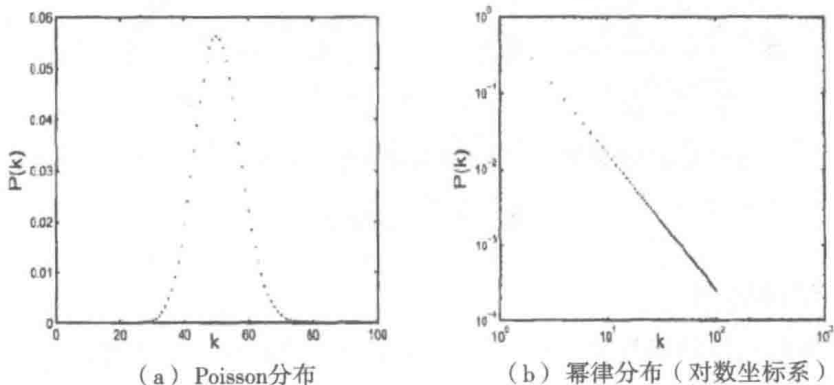


图 1.1 两种度分布的对比