



博士后文库

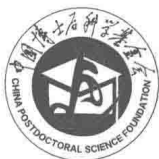
中国博士后科学基金资助出版

区间分析岩土工程理论与方法

唐利民 郑健龙 著



科学出版社



博士后文库

中国博士后科学基金资助出版

区间分析岩土工程理论与方法

唐利民 郑健龙 著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书是关于区间分析岩土工程理论与方法的专著,系统介绍区间变量及区间分析理论在岩土工程领域的最新研究成果。本书共9章,主要内容包括区间分析基础、INTLAB工具箱、岩土参数区间取值基本理论、区间超宽度的处理理论、区间分析土力学、区间岩土本构模型的构建方法、区间适应反演分析理论和方法、区间分析变形监测基础及区间分析岩土工程计算实例。

本书可供高等院校、科研院所相关专业的教师与研究生参考,也可供从事岩土工程及其他土木类工程科研、设计、施工与建设管理人员使用。

图书在版编目(CIP)数据

区间分析岩土工程理论与方法/唐利民,郑健龙著. —北京:科学出版社, 2017. 6

(博士后文库)

ISBN 978-7-03-052988-6

I. ①区… II. ①唐…②郑… III. ①岩土工程-区间-分析-研究
IV. ①TU4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 118007 号

责任编辑:杨向萍 张晓娟 / 责任校对:桂伟利
责任印制:张伟 / 封面设计:陈敬

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京数图印刷有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017年6月第一版 开本:720×1000 1/16

2017年6月第一次印刷 印张:15

字数:302 000

定价:88.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

《博士后文库》编委会名单

主 任 陈宜瑜

副主任 詹文龙 李 扬

秘书长 邱春雷

编 委 (按姓氏汉语拼音排序)

付小兵	傅伯杰	郭坤宇	胡 滨	贾国柱	刘 伟
卢秉恒	毛大立	权良柱	任南琪	万国华	王光谦
吴硕贤	杨宝峰	印遇龙	喻树迅	张文栋	赵 路
赵晓哲	钟登华	周宪梁			

《博士后文库》序言

1985年,在李政道先生的倡议和邓小平同志的亲自关怀下,我国建立了博士后制度,同时设立了博士后科学基金。30多年来,在党和国家的高度重视下,在社会各方面的关心和支持下,博士后制度为我国培养了一大批青年高层次创新人才。在这一过程中,博士后科学基金发挥了不可替代的独特作用。

博士后科学基金是中国特色博士后制度的重要组成部分,专门用于资助博士后研究人员开展创新探索。博士后科学基金的资助,对正处于独立科研生涯起步阶段的博士后研究人员来说,适逢其时,有利于培养他们独立的科研人格、在选题方面的竞争意识以及负责的精神,是他们独立从事科研工作的“第一桶金”。尽管博士后科学基金资助金额不大,但对博士后青年创新人才的培养和激励作用不可估量。四两拨千斤,博士后科学基金有效地推动了博士后研究人员迅速成长为高水平的研究人才,“小基金发挥了大作用”。

在博士后科学基金的资助下,博士后研究人员的优秀学术成果不断涌现。2013年,为提高博士后科学基金的资助效益,中国博士后科学基金会联合科学出版社开展了博士后优秀学术专著出版资助工作,通过专家评审遴选出优秀的博士后学术著作,收入《博士后文库》,由博士后科学基金资助、科学出版社出版。我们希望,借此打造专属于博士后学术创新的旗舰图书品牌,激励博士后研究人员潜心科研,扎实治学,提升博士后优秀学术成果的社会影响力。

2015年,国务院办公厅印发了《关于改革完善博士后制度的意见》(国办发〔2015〕87号),将“实施自然科学、人文社会科学优秀博士后论著出版支持计划”作为“十三五”期间博士后工作的重要内容和提升博士后研究人员培养质量的重要手段,这更加凸显了出版资助工作的意义。我相信,我们提供的这个出版资助平台将对博士后研究人员激发创新智慧、凝聚创新力量发挥独特的作用,促使博士后研究人员的创新成果更好地服务于创新驱动发展战略和创新型国家的建设。

祝愿广大博士后研究人员在博士后科学基金的资助下早日成长为栋梁之才,为实现中华民族伟大复兴的中国梦做出更大的贡献。



中国博士后科学基金会理事长

前 言

岩土工程涉及两大重要研究课题,一是岩土的基本力学性质,二是岩土工程问题计算方法的研究及验证。岩土的基本力学性质包括岩土力学参数的获取。以试验或检测为基础的参数抽样及获取方法,其“真值”难以获取,只能获得岩土力学参数值的一个范围。从量子效应和测不准原理看,岩土力学参数的“真值”是不能被最终确定的。

目前,一般用点变量表示岩土力学参数的取值。由于岩土参数本身的复杂性及土工试验采样的特点,点变量不能充分反映岩土体的不均匀性等复杂特征。针对点变量表达岩土力学参数的不足,本书采用区间变量来表达岩土力学参数。在此基础上,基于区间分析理论,结合岩土工程相关理论问题,对区间分析岩土工程的基本理论问题进行研究,重点构建区间分析土力学的基本理论框架。结合岩土工程实际问题,提供区间分析在岩土工程诸多领域中的计算实例。

全书共9章,第1章对区间分析(区间数学)这个新的数学分支做简单介绍;第2章介绍区间分析计算工具箱 INTLAB 的安装及基本计算操作;第3章讨论岩土参数区间取值的各种方法,明确指出区间取值理论是区间分析岩土工程的基础理论;第4章介绍区间超宽度理论,重点讨论消除或减少区间超宽度的几种方法;第5章基于经典土力学知识,着重讨论区间分析土力学的基本理论,建立起区间分析土力学的基本框架;第6章探讨区间莫尔-库仑准则、一般区间岩土本构模型及区间非饱和膨胀土抗剪强度模型的构建理论和方法;第7章讨论区间适定反演分析的基本理论,重点分析区间适定反演的步骤和方法;第8章主要探讨区间分析理论在岩土工程变形监测领域的应用;第9章给出区间分析在岩土工程九个方面的计算实例,每道例题均提供了 INTLAB 可执行代码,方便读者自行练习。

从点变量到区间变量的拓展,是计算数学向前发展的一大步。区间分析岩土工程是对目前以点变量为理论基础的岩土工程学科的一步推进。本书的出版也为进一步研究和推广基于区间指标的岩土工程、路基路面工程、建筑工程、水利工程等工程领域专业的试验、设计、施工、验收等方面的理论与方法(包括相关规范规程)奠定了部分基础。

本书的出版得到了中国博士后科学基金资助项目(2013M531776)、国家重点研发计划(2017YFC0805300)、湖南省自然科学基金资助项目(14JJ3090)、湖南省教育厅优秀青年项目(15B010)、长沙理工大学公路养护技术国家工程实验室开放基金重点资助项目(kfj140102)、2016年度博士后研究人员优秀学术专著出版

资助、现代公路交通基础设施先进建养技术协同创新中心和长沙理工大学出版资助的支持,在此一并表示感谢!

研究生王雷和谢佳伟承担了本书部分编校工作,科学出版社的张晓娟编辑及其同仁对本书的出版给予了大力支持和帮助,在此表示感谢!

区间分析是一门非常年轻的数学分支,区间分析岩土工程的研究更是刚刚起步。无论区间分析本身的理论,还是区间分析岩土工程的基本理论,均有待进一步深入研究。限于作者水平,书中难免存在不足之处,敬请广大读者批评指正。

目 录

《博士后文库》序言

前言

第 1 章 区间分析基础	1
1.1 区间分析简介	1
1.1.1 区间分析理论的提出	1
1.1.2 区间分析研究工具和资源	2
1.1.3 区间分析研究方向和现状	3
1.2 区间分析计算基础	9
1.2.1 区间表示	9
1.2.2 区间运算法则	10
参考文献	12
第 2 章 INTLAB 工具箱	26
2.1 INTLAB 工具箱安装	26
2.2 INTLAB 应用	30
2.2.1 区间输入和输出	30
2.2.2 区间计算	32
参考文献	41
第 3 章 岩土参数区间取值基本理论	42
3.1 参数区间取值的概率统计法	42
3.1.1 岩土参数的统计与分析	42
3.1.2 岩土参数的可靠性和适用性分析	42
3.1.3 岩土参数的统计方法	43
3.1.4 岩土参数的标准值与设计值	44
3.1.5 岩土参数的统计优化	45
3.1.6 岩土参数区间取值的概率统计法	46
3.2 区间变量的仪器精度取值法	50

3.3 区间变量的最大最小取值法	51
参考文献	53
第4章 区间超宽度处理理论与方法	54
4.1 区间超宽度的基本理论	54
4.2 缩小岩土参数的区间宽度	58
4.3 改写计算式	59
4.4 区间变量分解方法	60
4.5 区间拆分法	61
参考文献	63
第5章 区间分析土力学	65
5.1 绪论	65
5.1.1 土力学的概念	65
5.1.2 土力学发展简介	66
5.2 土的组成	67
5.2.1 概述	67
5.2.2 土中固体颗粒	68
5.2.3 土中水和土中气	71
5.2.4 土的结构和构造	72
5.3 土的物理性质及分类	73
5.3.1 概述	73
5.3.2 土的三相比例指标	74
5.3.3 黏性土的物理特征	80
5.3.4 无黏性土的密实度	83
5.3.5 粉土的密实度和湿度	85
5.3.6 土的胀缩性、湿陷性和冻胀性	85
5.4 土的渗透性及渗流	87
5.4.1 土的渗透性	87
5.4.2 渗透破坏与控制	89
5.5 土中应力	93
5.5.1 概述	93

5.5.2 土中自重应力	94
5.5.3 有效应力原理	96
5.6 土的压缩性和地基沉降计算	101
5.6.1 土的压缩性	101
5.6.2 地基沉降量计算	101
5.7 土的抗剪强度	107
5.7.1 抗剪强度的基本理论	108
5.7.2 残余抗剪强度	109
5.8 挡土结构物上的土压力	110
5.8.1 挡土结构类型	110
5.8.2 墙体位移与土压力类型	110
5.8.3 静止土压力的计算	111
5.8.4 朗肯土压力理论	112
5.8.5 库仑土压力理论	114
5.8.6 几种常见情况的主动土压力计算	115
5.9 地基承载力	117
5.9.1 地基的变形和失稳	117
5.9.2 原位试验确定地基承载力	118
5.9.3 按塑性区开展深度确定地基的容许承载力	118
参考文献	120
第6章 区间岩土本构模型的构建方法	121
6.1 概述	121
6.2 应力和应变	122
6.2.1 应力	122
6.2.2 应变张量	123
6.2.3 土的应力-应变特性	123
6.3 土的弹性模型	125
6.3.1 概述	125
6.3.2 邓肯-张双曲线模型	127
6.3.3 K 、 G 模型	129

6.4	高阶的非线弹性理论模型	129
6.4.1	土的弹塑性模型的一般原理	129
6.4.2	弹塑性模量矩阵的一般表达式	131
6.4.3	剑桥模型	132
6.4.4	Lade-Duncan 模型和清华模型	132
6.4.5	土的损伤模型	132
6.5	本构模型区间变量的基本选择原则	133
6.5.1	重要性原则	133
6.5.2	区间变量的宽度大小原则	134
6.5.3	参数区间变量的出现次数原则	134
6.6	一般区间岩土本构模型的构建	134
6.7	区间非饱和膨胀土抗剪强度模型	135
6.7.1	区间莫尔-库仑准则	135
6.7.2	区间非饱和膨胀土抗剪强度模型	136
6.7.3	工程实用型区间非饱和膨胀土本构模型	137
6.8	区间路基土回弹模量预估模型	139
6.8.1	区间路基土回弹模量预估模型的建立	139
6.8.2	平衡湿度下的路基回弹模量	140
	参考文献	140
第7章	区间适定反演分析理论与方法	141
7.1	概述	141
7.2	不适定问题基本理论	143
7.3	区间不适定性的定义	144
7.4	岩土工程参数反演解的唯一性问题	145
7.4.1	邓肯-张模型反演解的不唯一性	145
7.4.2	解的不唯一性产生的原因分析	148
7.4.3	解唯一性区间的确定方法	149
7.4.4	工程应用计算实例	151
7.5	岩土工程参数反演解的稳定性问题	152
7.5.1	参数反演的双正则化算法	152

7.5.2 参数反演的正则化牛顿迭代法	156
7.5.3 路面结构层模量的正则化反算方法	163
参考文献	167
第8章 区间分析变形监测基础	169
8.1 变形监测数据的区间取值基本方法	170
8.2 多源变形监测数据的融合	171
8.2.1 前期处理	171
8.2.2 中期处理	172
8.2.3 后期处理	172
8.3 区间变形监测数据处理理论与方法	172
8.3.1 回归分析法	173
8.3.2 时间序列分析模型	174
8.3.3 灰色系统分析模型	179
参考文献	183
第9章 区间分析岩土工程计算实例	184
9.1 岩土工程勘察	184
9.2 浅基础	189
9.3 深基础	195
9.4 地基处理	199
9.5 土工结构与边坡防护	203
9.6 基坑与地下工程	208
9.7 特殊条件下的岩土工程	212
9.8 地震工程	217
9.9 岩土工程检测和监测	220
参考文献	223
编后记	225

第 1 章 区间分析基础

1.1 区间分析简介

区间分析(interval analysis), 又称区间数学, 是一门用区间变量代替点变量进行运算的数学分支, 最初是从计算数学的误差理论研究发展起来的^[1-3]。区间分析理论是美国数学家 Moore^[4-6]在 20 世纪 60 年代第一次系统提出的。为了提高计算结果的可靠性, Moore 基于数值计算与误差分析理论, 借鉴前人的研究成果, 提出了一套完整的区间分析与计算方法。随后, 有关区间分析的研究越来越多。随着基础理论的发展, 区间分析方法越来越受到关注, 人们发现其可以有更为广泛的应用。

1.1.1 区间分析理论的提出

由于计算机有限字长的限制, 绝大多数实数无法被计算机精确存储, 这种真实值和近似值之间的误差在有限精度的浮点计算机上进行运算时将会被进一步传播。同时, 由于测量精度问题, 输入数据本身存在的误差也会在计算中被传播。由于存在这些因素, 数值计算结果往往含有输入误差、舍入误差和截断误差等。虽然通过运算可以得到一个精确结果, 但实质上这个结果并不准确, 而且计算结果也不包含任何准确度的信息。人们通常认为, 采用浮点计算机运算舍去小数点多位之后的误差应当不会对结果有太大影响, 因此可以忽略不计。但实际情况并非如此。文献[6]中给出了一个例子:

设 $a=77617.0, b=33096.0$, 试计算

$$f=333.75b^6+a^2(11a^2b^2-b^6-121b^4-2)+5.5b^8+\frac{a}{2b} \quad (1-1)$$

Rump 基于 IBM 370 计算机, 分别采用单精度、双精度、扩展精度模式对式(1-1)进行了计算。

单精度运算结果: $f=1.17260361\cdots$

双精度运算结果: $f=1.17260394005317847\cdots$

扩展精度运算结果: $f=1.17260394005317863185\cdots$

一般会认为至少计算结果的前几位有效数字(如 1.172603)是正确的。但是, 真实结果却是 $f=-0.82739605994683135$ (误差为 10^{-7}), 显然, IBM 370 的计算

结果是错误的,甚至连符号都不对。

为了提高计算结果的可靠性,并且能够自动进行误差分析,美国数学家 Moore 提出了区间分析理论。区间分析(又称区间计算、区间数学)理论是定义在区间集上的数学理论,它是将一个实数用一个包含其真值的区间表示,并利用区间进行计算的理论与算法。区间分析思想最早出现于文献[1]~[3]中。公认的区间分析理论的奠基人是美国数学家 Moore,他在 1962 年的博士论文中提出了较完整的区间分析理论^[4],并于 1966 年出版了专著《区间分析》^[5]。随后该理论迅速发展,很快成为计算数学的一个较活跃的分支。区间分析以区间来实现对数据的存储与运算,运算结果保证包含所有可能的真实值,即结果是准确可靠的。另外,人们可以很方便地把某些不确定性计算参数表述为区间并直接包含在区间算法之中,这在实际应用中也具有重要意义,如土木工程中的结构计算参数及反演分析。区间分析理论从产生至今,已经在科学计算和工程领域中得到了大量成功的应用。

1.1.2 区间分析研究工具和资源

区间分析理论产生至今,已经引起了研究者的极大关注。美国、德国、法国、加拿大等许多国家的知名大学成立了相关的研究中心。美国路易斯安那大学拉法叶分校、美国得克萨斯大学埃尔帕索分校、德国汉堡大学等在区间分析求解非线性方程组和全局优化及优化软件包实现等方面取得的突出成果,是区间理论研究最成功、最典型的代表。IEEE 控制系统学会成立了一个专门研究区间方法在控制领域应用的组织,给研究者提供交流平台。1991 年,一个专门的国际期刊被用来发表区间分析方面的研究成果,原名为《区间计算》(*Interval Computations*),1995 年更名为《可靠计算》(*Reliable Computing*)。随着感兴趣研究者的增多,学者们还定期召开区间分析国际会议和一些特别会议,讨论和交流区间分析的最新研究成果。另外,在数值分析、可靠计算、计算机、人工智能、控制等领域的国际会议也有相关的特别专题。

同时,支持区间计算的软件也在不断增加,人们可以在互联网上得到越来越多与区间计算有关的资源。区间算法常用的编程语言包括 C++、Fortran、MATLAB 等。人们开发了一些区间软件库来实现在浮点计算机上进行严格的区间运算,如 INTLAB、PROFIL/BLAS 等。此类软件库通常都包含基本区间算术运算、集合运算、基本初等函数,以及一些工具子程序等。其中,Rump 教授带领团队开发的 INTLAB 工具箱,使用较为方便且有广泛的应用。

区间计算的一个重要信息网站是 <http://cs.utep.edu/interval-comp/main.html>。该网站提供了许多区间分析研究的信息和相关链接,包括区间分析简介、编程语言、区间运算库链接地址、研究者的主页地址、区间计算专门杂志《可靠计算》的链接等。

1.1.3 区间分析研究方向和现状

区间分析或称区间数学,是近五十多年发展起来的一个新的数学分支,其基本思想是用区间变量代替点变量进行计算。

“区间”在数学上的使用可追溯到 20 世纪 30 年代以前,例如,用有理数端点的“区间套”定义实数等。但区间分析作为一个数学分支出现却是近五十多年的事情。由于科学技术和工程问题对计算提出越来越高的要求以及高速计算工具——电子计算机的迅速发展,误差问题变得非常突出。工程问题中给出的初始数据总是有误差的,中间计算也总有截断误差的累积。这就使计算结果具有一定的误差。怎样才能估计计算结果的误差?这是摆在 20 世纪 60 年代初期计算数学面前的紧迫课题。以美国斯坦福大学 Forsythe 和英国牛津大学 Fox 为首的计算数学家多次开会讨论研究误差问题,后来发展成两种不同的误差估计理论。一种是以 Wilkinson 为代表的预先估计的理论,另一种就是区间分析的理论。

区间运算是指定义在区间集合上的运算,较早的区间运算形式出现在 1924 年 Burkill^[1]和 1931 年 Young^[2]的文献中,1958 年 Sunaga^[3]也对区间运算进行了研究。1962 年,美国斯坦福大学的 Moore^[4]发表了其博士论文,1966 年在其博士论文基础上,出版了经典著作《区间分析》^[5],该书系统地提出了区间运算的理论。此后,区间分析的研究大范围地开展起来,区间算法很快就成为计算数学的一个活跃分支。国际杂志 *Reliable Computing* 专门发表区间算法的最新研究成果,由俄罗斯和西欧合办,每年刊载的文献有一百多篇。其他相关的杂志还有 *Computing*、*Global Optimization*、*SIAM Journal on Numerical Analysis* 等。此外,每年都有很多涉及区间算法的国际会议。德国弗赖堡大学应用数学所还设有专门的“区间图书馆”。在数学研究中,涉及区间分析的有区间代数、区间拓扑、区间几何和区间微积分等,更多是应用于计算数学和工程部门及其他科学,如区间软件、区间逼近、数学规划、系统识别、统计和心理学,在此基础上,还发展出了圆域分析、集值函数计算等相近理论。以上这些理论可统称为区间数学。

五十多年来,区间分析理论受到了广泛的关注并逐渐被越来越多的人所接受,同时有大量的相关著作出版^[6-10]。而关于区间分析的论文也在不断增加,区间分析开始从理论走向实际,在越来越多的领域发挥作用。

1. 国外研究进展

区间分析逐渐成为应用数学的一个分支,其在数学、计算机、工程科学等领域的应用越来越多,发表的文献无法计数,推动了相关领域的科技进步,为部分领域的研究工作提供了一个新的思路。

区间分析的最初思想是用来估计计算机的计算误差。其在数学领域的研究,较其他领域的工作更详尽、更丰富。Hansen^[11]研究了区间分析方法对一维和多维情形下全局优化结果的求解;Caprani 等^[12]讨论了中值形式的区间分析;Hansen 等^[13]分析了带约束条件方程组的区间解;Hansen 等^[14]探讨了区间牛顿方法;Rall^[15]研究了中值和泰勒级数形式的区间分析;Matijasevich^[16]讨论了后验条件下的区间分析;Oppenheimer^[17]讨论了区间分析技术在线性系统中的应用;Soh 等^[18]研究了连续和离散区间矩阵的稳定性;Ishibuchi 等^[19]讨论了多目标规划的区间目标函数优化;Wang 等^[20]比较了基于区间分析的自我验证和矩形二元正态概率算法的结果;Neumaier^[21]讨论了一种线性方程组的区间分析算法;Ratschek 等^[22]总结了区间分析在全局优化中的作用;Kearfott 等^[23]研究了预条件的区间高斯-赛德尔方法;Dubois 等^[24]探讨了随机集和模糊区间分析理论;Kubota 等^[25]提出了快速自动化和区间分析相结合的舍入误差估计方法;Jaulin 等^[26]通过区间分析进行非线性有界误差估计;Vaidyanathan 等^[27]利用区间分析讨论了全局非凸非线性规划的优化及非凸的 MINLP 的区间分析;McKinnon 等^[28]基于区间分析讨论了相平衡问题的全局优化;Ichida^[29]讨论了区间分析下的约束优化;Rao 等^[30]提出了不确定结构系统的区间分析方法;Chen 等^[31]则提出了区间卡尔曼滤波方法;Kieffer 等^[32]研究了递推非线性状态估计的区间分析法;Hua 等^[33]利用区间分析进行状态模型三次方程的可靠性计算;Markov 等^[34]分析了 Sunaga 对区间分析和可靠性计算的贡献;Gau 等^[35]利用区间分析进行非线性参数估计;Dubois 等^[36]探讨了模糊区间分析方法;Bhattacharyya 等^[37]讨论了模糊均值-方差-偏度的区间分析;Kolev^[38]讨论了全局非线性分析的区间方法;Litvinov 等^[39]研究了全幂等区间分析及优化问题;Hargreaves^[40]开发了基于 MATLAB 的区间分析程序;Qiu^[41]分析了采用凸模型和区间分析方法的结构静态响应比较结果;Casado 等^[42]提出了基于梯度信息的区间分析支持函数在全局最小化算法中的应用;Moore 等^[43]研究了区间分析法和模糊集理论;Su 等^[44]基于区间分析提出了没有加宽和变窄的一类多项式可解的约束范围;Fusiello 等^[45]使用区间分析解决全局收敛的自动校准;Andújar 等^[46]讨论了基于区间数学的稳定性分析与多变量模糊系统的综合使用;Kearfott 等^[47]提出了区间分析中的标准化符号方法;Fortin 等^[48]讨论了模糊区间分析的常规数字及其应用;Abdallah 等^[49]采用区间分析研究了盒粒子滤波的非线性状态估计。

区间分析在医学领域中,Fuster 等^[50]基于区间分析研究了电池放电在电子视觉系统中的应用;Cheng 等^[51]分析了视动性眼球震颤的影响;Blatz 等^[52]研究了分门机制;Laguna 等^[53]基于区间分析提出了 24h 动态心电图分析新算法等。区间分析在医学领域得到了广泛应用,主要包括心电图数据处理、细菌数据的分析和健康监测相关数据的分析等^[54-64]。

在电路电子等领域,区间分析方法也得到了广泛使用。Oppenheimer 等^[65]利

用区间分析技术讨论了电路线性系统的初始值问题; Leenaerts^[66]讨论了基于区间分析的电路设计; Timmer 等^[67]分析了电子资源约束条件下区间分析的执行问题; Ratschek 等^[68]采用区间分析来解决电路设计问题; Wabinski 等^[69]利用区间分析来测量振幅和振动时间; Sadler 等^[70]讨论了周期性脉冲的区间分析; Shi 等^[71]根据参数变化对线性模拟电路进行了区间分析; Benedetti 等^[72]研究了基于复数区间分析位宽度的 DSP 优化配置; Kieffer 等^[73]、Barboza 等^[74]也讨论了区间分析在电子信号处理中的应用。

计算机图形学中, Mitchell^[75]研究了基于区间分析的射线相交方法; Snyder^[76]讨论了区间分析在计算机绘图中的应用; Noblet 等^[77]提出了一种基于分层变形和区间分析优化的 3D 变形图像配准拓扑技术。

化学物理方面, Stadtherr 等^[78]、Kieffer 等^[79]、Hua 等^[80]、Braems 等^[81]发表了相关研究论文。

机械制造和自动化领域中, 区间分析的应用研究较多。Piazzi 等^[82]基于区间分析研究了复杂机械制造的轨迹全局最小时间问题; Rao 等^[83]基于区间分析提出机器人逆运动的解决措施; Kieffer 等^[84]讨论了机器人自动定位的区间分析方法; Merlet^[85]提出了基于区间分析的空间并联机构与指定工作空间的设计改进方法; Sainz 等^[86]利用模态区间分析进行故障检测; Chablat 等^[87]研究了以区间分析为基础的三自由度并联运动机床的设计; Lhommeau 等^[88]提出基于区间分析的鲁棒控制器设计; Wu 等^[89]讨论了区间方式为公差的应用; Lee 等^[90]讨论了五点精度合成的区间分析; Madi 等^[91]提出了基于区间分析的 LuGre 摩擦模型参数的建立和反演技术; Merlet^[92]研究了求解 Gough 型并联机器人运动状态的区间分析方法; Hao 等^[93]提出了基于区间分析的并联机器人多标准优化设计方法; Wu 等^[94]提出了基于区间分析的机器人机械手关节的不确定性分析; Rocca 等^[95]讨论了区间分析在散射数据处理和反演中的应用。

区间分析的另一个重要应用领域是材料力学和结构力学等力学领域。Dimarogonas^[96]提出了振动系统的区间分析; Qiu 等^[97,98]基于区间分析对结构参数的不确定性非概率特征值问题进行了分析; Nakagiri 等^[99]讨论了位移及荷载不确定性的有限元区间分析问题; Chen 等^[100]分析了梁结构的区间有限元方法; Mcwilliam^[101]基于区间分析探讨了不确定结构的优化; Qiu 等^[102]还研究了基于区间分析的非概率不确定性反优化技术; Chen 等^[103,104]讨论了区间静态位移分析与区间参数及区间特征值分析等问题; Qiu 等^[105-107]研究了使用非概率区间分析法、凸模型和区间分析方法来预测复合材料结构的屈曲问题, 提出参数摄动法求解有界参数结构的动态响应等问题; Jiang 等^[108]探讨了基于非线性区间数学规划和区间分析的一个不确定结构优化方法; Sim 等^[109]基于区间分析对不确定但有界参数结构的模态进行了分析; Degrauwe 等^[110]通过仿射算法对区间分析的有限元计算方法进行了改进。