

现代数学译丛 32

微积分及其应用

(原书修订版)

[美] Peter Lax 著
Maria Terrell

林开亮 刘 帅 邵红亮 等 译



科学出版社

现代数学译丛 32

微积分及其应用

(原书修订版)

〔美〕 Peter Lax Maria Terrell 著
林开亮 刘 帅 邵红亮 等 译

科学出版社

北 京

图字: 01-2016-4962 号

内 容 简 介

本书是美国著名数学家彼得·拉克斯与康奈尔大学数学教授玛丽亚·特雷尔合著的单变量微积分教材,内容覆盖了一元微积分的基础,包括:数列的极限、函数的连续性、函数的微分、可微函数的基本理论、导数的应用、函数的积分、积分的方法、积分的近似计算,以及微分方程.另有两章介绍复数与概率.本书与拉克斯的另一著名教材《线性代数及其应用》简明清晰、行云流水的风格一致,通过引入许多背景自然的应用实例,两位作者致力于引导读者对微积分这一重要的基础课题获得理解.本书末尾还提供了部分习题的答案.

本书可供高等院校师生作为一元微积分课程的教材或教辅参考.

Translation from the English Language edition:
Calculus with Applications. Second Edition. Peter Lax and Maria Terrell
Copyright © 2014 by Springer Science+business Media New York
All right Reserved

图书在版编目(CIP)数据

微积分及其应用/(美)彼得·拉克斯(Peter Lax), (美)玛丽亚·特雷尔(Maria Terrell)著;林开亮等译. —北京:科学出版社,2018.3

(现代数学译丛;32)

书名原文:Calculus with Applications

ISBN 978-7-03-056917-2

I. ①微… II. ①彼… ②玛… ③林… III. ①微积分 IV. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018) 第 049715 号

责任编辑:陈玉琢/责任校对:邹慧卿

责任印制:张伟/封面设计:陈敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京东华虎彩印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

2018年3月第 一 版 开本:720×1000 B5

2018年3月第一次印刷 印张:29 1/2

字数:593 000

定价:178.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

序 言

我们编写一本微积分教材的目标是,帮助学生直接了解到,数学是科学思想得以精确表述的一门语言,科学是深刻定型了数学发展的数学思想的源泉,而数学可以为重要的科学问题提供聪明的解答.本书是 Peter Lax, Samuel Burstein 和 Anneli Lax 的教材《微积分及其应用与计算》^①的全面修订版.原教材基于某些新颖的想法,纳入了一些新的非传统的内容.我们按照相同的精神编写修订版.有人自然会问,对于像微积分这样一门古老的学科,还需要引进什么新内容和新思想吗?答案是,科学和数学随着研究前沿的突飞猛进而成长,因此我们在高中、大学和研究生院所教的东西也不能落后得太远.作为数学家和教育学家,我们的目标必定是简化旧课题的讲授,留出空间来讲授新课题.

为达到这一目标,我们要将数学语言展现得自然而容易理解,要使它成为学生能够学以致用的一门语言.在全书中,我们对所有重要的定理都给出了证明,以便于学生理解其含义;但我们的目的是提供理解,而不是追求“严格性”.我们大大增加了例子和问题的数量.在内容的组织方面,我们做了某些重要的调整:熟悉的超越函数^②被放在导数和积分之前介绍.书名中的“计算”被舍弃了,因为与 1976 年相比,在今天,计算作为微积分不可分割的一部分,并且它对微积分提出了有趣的挑战,已经得到了广泛的认同.这从 4.4 节, 5.3 节, 10.4 节以及整个第 8 章可见一斑.但那些使得我们能够讨论在估计数据、用函数列来逼近函数等计算问题时用到的数学保留下来了,如一致连续和一致收敛.在修订版中,我们尽力表明了,一致收敛和一致连续要比逐点收敛和逐点连续更自然、更有用.从使用过本教材的学生那里得到的初步反馈是,他们“掌握了 (get it)”.

本教材是为两个学期的单变量微积分课设计的.读者只需要预先掌握高中水平的初等微积分.

第 1 章讨论 (实) 数、数的近似计算和数列的极限.第 2 章给出了关于连续函数的基本事实,描述了经典的函数:多项式、三角函数、指数函数和对数函数.还介绍了函数列的极限,特别是幂级数.

^① *Calculus with Applications and Computing*, 于 1976 年由 Springer-Verlag 出版.有中译本,唐述钊等译,人民教育出版社,1980 年.——译者注

^② 三角函数、指数函数和对数函数.——译者注

在第 3 章, 我们给出了导数的定义和基本的求导法则. 计算了各类经典函数——多项式、三角函数、指数函数和对数函数的导数. 第 4 章描述了微分学的基本理论, 包括高阶导数、Taylor 多项式和 Taylor 定理, 以及用差商逼近导数. 第 5 章描述了导数如何出现在科学特别是物理学的定律中, 微积分又如何用来推导这些定律的意义.

第 6 章通过距离、质量和面积的例子介绍积分的概念, 对积分作近似计算则引出了其定义. 证明并举例说明了微分和积分的关系. 在第 7 章, 介绍了积分的分部积分与变量代换的技巧, 证明了函数列的一致极限的积分等于函数列积分的极限. 第 8 章介绍了积分的近似计算, 推导了辛普森法则, 并与积分的其他数值逼近作了比较.

第 9 章表明, 微积分的许多概念可以推广到实变量的复值函数. 还介绍了复数的指数. 第 10 章将微积分应用于控制振动弦、种群演化和化学反应的微分方程. 还包括对 Euler 方法的一个简短介绍. 第 11 章用微积分的语言表述了概率论.

本书曾作为一学期的“微积分 II”教材在康奈尔大学成功使用过, 对象是主修数学和理工科的学生. 这些学生通常在高中修过一学期的微积分. 第 1, 2, 4 章被用来介绍数列和级数、幂级数、Taylor 多项式和 Taylor 定理. 第 6—8 章分别用来介绍定积分、积分对体积等累积问题的应用、积分的方法和近似计算. 讲完这些, 那个学期仍有富余的时间, 就介绍了第 9 章的复数和复值函数, 并在 10.1 节考察复函数及其微积分如何用来模拟振动.

我们要感谢支持我们写作本书的数学界的许多同事和学生. 本书第一版是与 Samuel Burstein 合写的.^① 感谢他允许我们吸收他的工作. 我们要感谢 John Guckenheimer 对本项目的鼓励和建议. 感谢 Matt Guay, John Meluso 和 Wyatt Deviau, 当他们还是康奈尔大学的本科生时, 就曾仔细阅读了初稿, 他们敏锐的评论让我们脑子时刻铭记着我们的学生读者. 我们还要感谢 Patricia McGrath, 康涅狄格州梅里登室的马洛尼高级中学的一位教师, 她对本书作了细心的评论与建议. 感谢康奈尔大学的研究生 Thomas Kern 和吴辰熙, 他们是我在那里教授“微积分 II”的助教, 他们帮助写出了一些课后问题的解答. 感谢康奈尔大学那些在 2011 年和 2012 年秋季学期使用过本书初稿的学生, 感谢你们所有人激发了我们开展这个项目, 使得本书更好.

如果没有 Bob Terrell——Maria 的夫君, 同时也是康奈尔大学工作多年的数学教授——的帮助, 本书不可能完成. 从将手稿变成 TEX 版、插图制作, 再到建议修

^① 另一位合作者 Anneli Lax(1922–1999) 是 Peter Lax 已过世的妻子.

改和改进, 每一步都有 Bob 的功劳, 我们感激不尽.

Peter Lax 感谢他在纽约大学柯朗研究所的同事们, 他曾与他们一起对教授微积分的挑战讨论了 50 多年.

Peter Lax 于纽约

Maria Terrell 于纽约伊萨卡

目 录

序言

第 1 章 数和极限	1
1.1 不等式	1
1.1.1 不等式的法则	3
1.1.2 三角不等式	3
1.1.3 算术-几何平均值不等式	4
问题	7
1.2 实数和最小上界定理	10
1.2.1 实数作为无限小数	10
1.2.2 最小上界定理	12
1.2.3 舍入	14
问题	16
1.3 数列及其极限	17
1.3.1 $\sqrt{2}$ 的近似	20
1.3.2 数列与级数	21
1.3.3 区间套	32
1.3.4 柯西数列	33
问题	35
1.4 数字 e	39
问题	42
第 2 章 函数及其连续性	45
2.1 函数的概念	45
2.1.1 有界函数	48
2.1.2 函数的运算	49
问题	51
2.2 连续性	52
2.2.1 用极限定义函数在一点处的连续性	54
2.2.2 区间上的连续性	57

2.2.3 介值定理与最值定理	58
问题	61
2.3 函数的复合及逆	63
2.3.1 反函数	66
问题	70
2.4 正弦与余弦	71
问题	74
2.5 指数函数	75
2.5.1 放射性衰变	76
2.5.2 细菌繁殖	76
2.5.3 代数定义	77
2.5.4 指数型增长	78
2.5.5 对数	80
问题	84
2.6 函数列及其极限	85
2.6.1 函数列	85
2.6.2 函数项级数	92
2.6.3 函数 $\sqrt{x}$ 与 e^x	96
问题	101
第 3 章 导数和微分	105
3.1 导数的概念	105
3.1.1 几何意义	107
3.1.2 可导与连续	110
3.1.3 导数的应用	112
问题	117
3.2 求导法则	119
3.2.1 和、积与商的导数	120
3.2.2 复合函数的导数	124
3.2.3 高阶导数及记号	127
问题	128
3.3 函数 e^x 和 $\ln x$ 的导数	132
3.3.1 函数 e^x 的导数	132

3.3.2 函数 $\ln x$ 的导数	133
3.3.3 幂函数的导数	135
3.3.4 微分方程 $y' = ky$	135
问题	136
3.4 三角函数的导数	138
3.4.1 正弦和余弦函数的导数	138
3.4.2 微分方程 $y'' + y = 0$	140
3.4.3 反三角函数的导数	142
3.4.4 微分方程 $y'' - y = 0$	144
问题	146
3.4.5 幂级数的导数	148
问题	151
第 4 章 可导函数的理论	153
4.1 中值定理	153
4.1.1 一阶导数用于最优化	156
4.1.2 利用微分证明不等式	160
4.1.3 推广的中值定理	162
问题	163
4.2 高阶导数	166
4.2.1 二阶导数检验	170
4.2.2 凸函数	171
问题	173
4.3 泰勒定理	175
4.3.1 泰勒级数的例子	180
问题	185
4.4 逼近导数	186
问题	191
第 5 章 导数的应用	194
5.1 气压	194
问题	196
5.2 运动定律	196
问题	201

5.3 求函数零点的牛顿法	201
5.3.1 平方根的逼近	203
5.3.2 多项式根的逼近	204
5.3.3 牛顿法的收敛性	206
问题	209
5.4 光的反射和折射	210
问题	215
5.5 数学与经济学	216
问题	219
第 6 章 积分	221
6.1 积分的例子	221
6.1.1 从速度表确定路程	221
6.1.2 细棒的质量	223
6.1.3 正函数下方图的面积	225
6.1.4 负函数和净总值	227
问题	228
6.2 积分	229
6.2.1 积分的近似	231
6.2.2 积分的存在性	235
6.2.3 积分的进一步的性质	238
问题	241
6.3 微积分基本定理	243
问题	251
6.4 积分的应用	253
6.4.1 体积	253
6.4.2 累积量	255
6.4.3 弧长	256
6.4.4 功	257
问题	259
第 7 章 积分方法	260
7.1 分部积分	260
7.1.1 带积分形式余项的泰勒公式	264

7.1.2 优化数值近似	266
7.1.3 微分方程的应用	267
7.1.4 π 的 Wallis 乘积公式	267
问题	269
7.2 换元法	271
问题	276
7.3 广义积分	277
问题	290
7.4 积分的其他性质	292
7.4.1 函数列的积分	292
7.4.2 含参变量的积分	295
问题	297
第 8 章 积分的近似数值计算	298
8.1 近似积分	298
8.1.1 中点法则	300
8.1.2 梯形法则	301
问题	302
8.2 辛普森法则	304
8.2.1 辛普森法则的替代方法	307
问题	309
第 9 章 复数	310
9.1 复数	310
9.1.1 复数的运算	311
9.1.2 复数的几何	315
问题	320
9.2 复值函数	323
9.2.1 连续性	323
9.2.2 导数	324
9.2.3 复值函数的积分	325
9.2.4 复变量的函数	326
9.2.5 复指数函数	329
问题	332

第 10 章 微分方程	334
10.1 用微积分描述振动	334
10.1.1 力学系统的振动	334
10.1.2 耗散和能量守恒	338
10.1.3 没有摩擦力时的振动	339
10.1.4 没有摩擦力的线性振动	342
10.1.5 带摩擦力的线性振动	344
10.1.6 外力驱动的线性系统	348
问题	352
10.2 种群动力学	355
10.2.1 微分方程 $\frac{dN}{dt} = R(N)$	355
10.2.2 人口增长与涨落	361
10.2.3 两个物种	365
问题	373
10.3 化学反应	374
问题	381
10.4 微分方程的数值求解	382
问题	386
第 11 章 概率	387
11.1 离散概率	387
问题	396
11.2 信息论: 感兴趣的事有多有趣?	397
问题	400
11.3 连续概率	401
问题	409
11.4 误差律	411
问题	419
部分问题的答案	421
术语对照表	448
译后记	454
《现代数学译丛》已出版书目	456

第1章 数和极限

摘要 本章将介绍实数的基本概念和性质, 它们对定义极限、导数和积分等微积分概念是必须的.

1.1 不等式

实数之间的不等式在微积分中非常重要. 不等式是收敛这个基本概念的核心, 收敛则是微积分的一个中心思想. 不等式可以用来证明两个数 a, b 相等, 只要证明 a 既不小于 b 也不大于 b . 例如, 阿基米德用这种方法证明了一个圆的面积等于一个以其周长为底、半径为高的三角形的面积.

不等式的另一个用处是描述数集. 用不等式描述的数集可以在数轴上画出来.

如果 $b - a > 0$, 则我们称 a 小于 b , 记作 $a < b$. 在图 1.1 所示的数轴上, a 将在 b 的左侧. 不等式通常用来描述数的区间. 满足 $a < x < b$ 的数 x 是介于 a 和 b 之间的数, 端点 a, b 不包含在内. 这是开区间的一个例子, 用圆括弧 (a, b) 表示.



图 1.1 数轴

如果 $b - a \geq 0$, 则我们称 a 小于或等于 b , 记作 $a \leq b$. 满足 $a \leq x \leq b$ 的数 x 是介于 a 和 b 之间的数, 端点 a, b 包含在内. 这是闭区间的一个例子, 用方括弧 $[a, b]$ 表示. 仅包含一个端点的区间称为半开区间或半闭区间. 例如, 区间 $a < x \leq b$ 记为 $(a, b]$ (图 1.2).

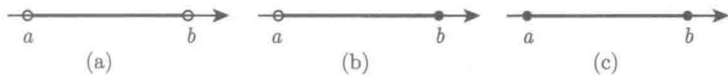


图 1.2 (a) 开区间 (a, b) ; (b) 半开半闭区间 $(a, b]$; (c) 闭区间 $[a, b]$

一个数 a 的绝对值 $|a|$ 是 a 到 0 的距离: 若 a 为正数, 则 $|a| = a$; 若 a 为负数, 则 $|a| = -a$. 差的绝对值 $|a - b|$, 可解释为 a, b 两点在数轴上的距离, 也可解释为 a, b 间的区间的长度 (图 1.3).

不等式

$$|a - b| < \varepsilon$$

可以解释为 a, b 两点在数轴上的距离小于 ε . 这相当于说, a, b 之间的差 $a - b$ 大于 $-\varepsilon$ 且小于 ε :

$$-\varepsilon < a - b < \varepsilon. \quad (1.1)$$

在问题 1.9 中, 我们将要求你用 1.1.1 节中的不等式来证明上述不等式.

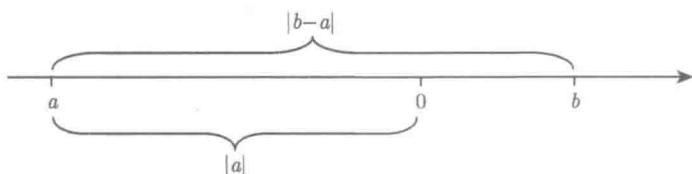


图 1.3 用绝对值来度量距离

例 1.1 不等式 $|x-5| < \frac{1}{2}$ 描述的是那些与 5 的距离小于 $\frac{1}{2} = 0.5$ 的 x . 这就是开区间 $(4.5, 5.5)$. 而不等式 $|x-5| \leq \frac{1}{2}$ 描述的则是闭区间 $[4.5, 5.5]$. 见图 1.4.



图 1.4 (a) 由不等式 $|x-5| < \frac{1}{2}$ 所指定的数; (b) $x-5$ 介于 $-\frac{1}{2}$ 与 $\frac{1}{2}$ 之间

不等式 $|\pi - 3.141| < \frac{1}{10^3}$ 可以解释为将 π 近似为 3.141 的一个陈述. 它告诉我们, 3.141 与 π 的误差在千分之一以内, 或者说, π 在以 3.141 为中心、半径为 $\frac{1}{10^3}$ 的区间内.

在图 1.5 中我们可以设想, 在大区间中有更小的区间, 将 π 包得更紧. 在本章稍后我们将看到, 用来确定一个数的方法就是用越来越紧的区间套住它. 这个过程在 1.3.3 节被描述为闭区间套定理.

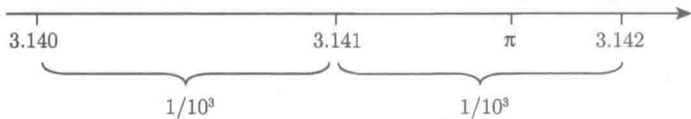


图 1.5 π 的近似

我们用 $(a, +\infty)$ 表示所有大于 a 的数的集合, 用 $[a, +\infty)$ 表示所有大于或等于 a 的数的集合. 类似地, $(-\infty, a)$ 表示所有小于 a 的数的集合, 用 $(-\infty, a]$ 表示所有小于或等于 a 的数的集合 (图 1.6).



图 1.6 从左到右, 依次是区间 $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$, $[a, +\infty)$, $(a, +\infty)$

例 1.2 不等式 $|x-5| \geq \frac{1}{2}$ 描述的是那些与 5 的距离大于或等于 $\frac{1}{2} = 0.5$ 的 x . 这就是 $(-\infty, 4.5]$ 或 $[5.5, +\infty)$ 中的数. 见图 1.7.

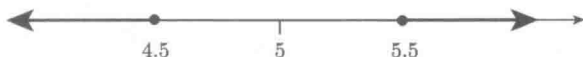


图 1.7 由例 1.2 中的不等式所指定的数

1.1.1 不等式的法则

接下来我们复习一些处理不等式的法则:

(a) 三分律: 对任意的两个实数 a 和 b , 或有 $a > b$, 或有 $a < b$, 或有 $a = b$.

(b) 传递性: 若 $a < b$ 且 $b < c$, 则 $a < c$.

(c) 加法的法则: 若 $a < b$, 则对任意的 c , 有 $a + c < b + c$. 由此可知, 若 $a < b$ 且 $c < d$, 则 $a + c < b + d$.

(d) 乘法的法则: 若 $a < b$, 则对任意的 $p > 0$, 有 $pa < pb$; 若 $a < b$, 则对任意的 $n < 0$, 有 $na > nb$.

(e) 取倒数的法则: 若 a, b 是正数, 且 $a < b$, 则 $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

这些关于不等式的法则可以用来化简不等式或从已知的不等式推导出新的不等式. 除了三分律 (a), 其余四条法则中的 $<$ 换成 $\leq$, 结论仍然成立. 在问题 1.8 中, 要求你利用三分律推导这样的结果: 如果 $a \leq b$ 且 $b \leq a$, 则 $a = b$.

例 1.3 若 $|x-3| < 2$ 且 $|y-4| < 6$, 则根据加法法则, 有

$$|x-3| + |y-4| < 2 + 6.$$

例 1.4 若 $0 < a < b$, 则根据乘法法则, 有

$$a^2 < ab \quad \text{以及} \quad ab < b^2.$$

进一步由传递性, 可得 $a^2 < b^2$.

1.1.2 三角不等式

我们经常用到两个著名的不等式: 三角不等式和算术-几何平均值不等式. 三角不等式重要而简单:

$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

我们不妨试着代入一些数验证. 例如, 对 $a = -3$, $b = 1$, 这个不等式表明了什么呢? 很容易检验, 如果 a, b 同号或其中之一为 0, 则等号成立; 如果 a, b 符号相反, 则严格的小于号成立.

三角不等式可以用来很快地估计近似和式的精度.

例 1.5 对不等式

$$|\pi - 3.141| < 10^{-3} \quad \text{以及} \quad |\sqrt{2} - 1.414| < 10^{-3},$$

利用和的法则, 有 $|\pi - 3.141| + |\sqrt{2} - 1.414| < 10^{-3} + 10^{-3}$. 从而, 根据三角不等式有

$$\begin{aligned} |(\pi + \sqrt{2}) - 4.555| &= |(\pi - 3.141) + (\sqrt{2} - 1.414)| \\ &\leq |\pi - 3.141| + |\sqrt{2} - 1.414| \\ &< 2 \times 10^{-3}. \end{aligned}$$

也就是说, 如果我们能够将 π 和 $\sqrt{2}$ 控制在 10^{-3} 的误差范围内, 那么就能够将 $\pi + \sqrt{2}$ 控制在 2×10^{-3} 的误差范围内.

三角不等式的另一个应用是将数轴上三点 x, y, z 之间的距离联系起来. 该不等式断言, x, z 之间的距离不超过 x, y 之间的距离与 y, z 之间的距离的和, 即

$$|z - x| = |(z - y) + (y - x)| \leq |z - y| + |y - x|.$$

在图 1.8 中我们图示了两种情况: y 在 x, z 之间, 以及 y 不在 x, z 之间.

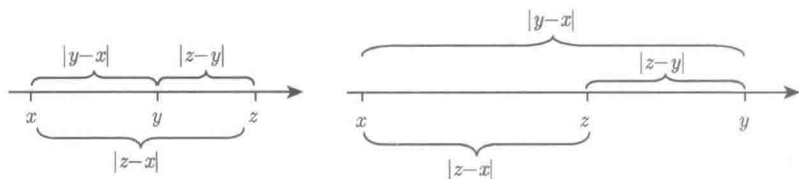


图 1.8 三角不等式涉及各个距离

1.1.3 算术-几何平均值不等式

我们先介绍这个重要的不等式.

定理 1.1 (算术-几何平均值不等式) 两个正数的几何平均值不超过其算术平均值:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2},$$

等号成立当且仅当 $a = b$.

我们简单称之为平均值不等式. “平均”是在下述意义下理解:

- (i) 两个数 a, b 的平均值应该在这两个数之间;
- (ii) 当这两个数 a, b 相等时, 平均值应该等于 $a = b$.

在此意义下, 可以验证不等式两边的表达式都是 a, b 的平均值. $\sqrt{ab}$ 称为 a, b

的几何平均值, 因为它是 a, b 的等比中项; $\frac{a+b}{2}$ 称为 a, b 的算术平均值, 因为它是 a, b 的等差中项.

数形结合的证明: 图 1.9 给出了不等式 $4ab \leq (a+b)^2$ 的一个图像化证明. 在这个不等式两边同除以 4 然后开方就得到平均值不等式.

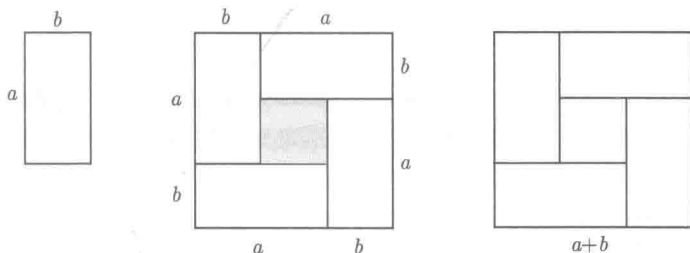


图 1.9 通过比较面积得到 $4ab \leq (a+b)^2$ 的图像化证明

代数的证明: 因为任何一个数的平方总是大于或等于 0 的, 所以有

$$0 \leq (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

并且等号成立当且仅当 $a = b$. 两边同时加上 $4ab$, 我们得到

$$4ab \leq a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2,$$

这是之前我们用图形得到的同一个不等式. 两边同除以 4 然后开方就有

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2},$$

等号成立当且仅当 $a = b$.

例 1.6 平均值不等式可以用来证明, 在具有相同周长的所有矩形中, 正方形具有最大的面积. 见图 1.10. 证明: 设矩形的长和宽分别为 L 和 W , 则其面积为 LW ; 而与它具有相同周长的正方形的边长则为 $\frac{L+W}{2}$, 其面积为 $\left(\frac{L+W}{2}\right)^2$. 通过对平均值不等式两边平方, 我们就得到

$$LW \leq \left(\frac{L+W}{2}\right)^2.$$

n 个数的平均值不等式

可以对两个以上的数定义算术平均值与几何平均值. $a_1, a_2, \dots, a_n$ 的算术平均值定义为

$$\text{算术平均值} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$