复变函数与积分变换

周羚君　韩 静　狄艳媚　编著

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

复变函数与积分变换

周羚君　韩　静　狄艳媚　编著

同濟大學出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书是根据理工科“复变函数与积分变换”的课程要求编写而成的，主要讲述物理、电信、交通等专业常用的复变函数基本理论与方法．全书内容包括复数与复变函数的基本概念、解析函数的基本概念和积分理论、解析函数的级数理论及留数定理、Fourier 变换与 Laplace 变换及其应用、共形映照．本书内容简明得当，兼顾了数学的严密性和理工科的实用性．

本书可作为全日制大学本科理工科复变函数课程教材，也可供理工科背景的读者阅读参考．

图书在版编目（C I P）数据

复变函数与积分变换 / 周羚君，韩静，狄艳媚编著．—上海：同济大学出版社，2017.8

ISBN 978-7-5608-7325-1

Ⅰ．①复… Ⅱ．①周… ②韩… ③狄… Ⅲ．①复变函数—高等学校—教材②积分变换—高等学校—教材 Ⅳ．①O174.5 ②O177.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 202843 号

复变函数与积分变换

周羚君　韩　静　狄艳媚　编著

责任编辑　李小敏　　责任校对　徐春莲　　封面设计　潘向蓁

出版发行　同济大学出版社　www.tongjipress.com.cn
（上海市四平路 1239 号　邮编 200092　电话 021-65985622）

经　　销　全国各地新华书店

印　　刷　上海同济印刷厂有限公司

开　　本　787mm×960mm　1/16

印　　张　13.25

字　　数　265 000

版　　次　2017 年 9 月第 1 版　　2017 年 9 月第 1 次印刷

书　　号　ISBN 978-7-5608-7325-1

定　　价　39.00 元

前 言

复数概念自 16 世纪引入，到 18 世纪被数学家广泛接受，再到 19 世纪复变函数理论蓬勃发展，复数的发展经历了漫长曲折的过程. 随着科技的进步，复数理论不仅对数学本身的发展起了极其重要的作用，而且对物理学、信息学等学科领域影响巨大. 在物理、电信、交通等专业开设复变函数课程，已在国内外大学形成共识.

复变函数是以微积分为基础，以解析函数的基本性质为主要研究对象的一门课程. 与数学专业基础课程“复变函数”相比，面向理工科学生的“复变函数与积分变换”课程，不仅需要以通俗简明且不失严谨的方式阐述基本理论，而且要体现复变函数理论在其他数学分支以及理工科中的应用. 编者在教学中曾经参考使用过很多教材，都无法兼顾两方面的要求. 为了弥补这一不足，我们尝试编写了这本教材，并在以下方面做了改进.

首先，编者将部分无法在课程中证明，而表述相对简单，且与本课程有关的理论工具，纳入本教材. 这一做法，拓宽了工科学生的知识面，同时又能使部分论述简明扼要. 例如，本书多次利用积分与极限次序交换证明结论，并在附注中指出交换积分与极限次序的理论依据，相比以往避开使用积分与极限交换理论，直接使用极限定义的证明方法，本书的做法压缩了推导篇幅，降低了读者理解的难度，同时使读者了解了更加强大的数学定理. 又如有理函数在扩充复平面的亚纯性、Picard 定理、Riemann 映照定理等，在以往的理工科教材中多不涉及，而这些定理的陈述并不需要额外的知识准备，编者将这些定理加入教材，使读者能增加对解析函数特征的感性认识，全面了解复变函数的基本结论.

其次，根据理工科的实际需要，简化某些概念的陈述和定理的证明. 例如复

积分的定义，传统的教材采用积分的 Riemann 和的定义方式，这种定义方式不可避免地要涉及可求长曲线这一概念，但对理工科学生来说，应用中遇到的曲线基本都是逐段光滑的，因此编者在定义复积分时增加了积分曲线逐段光滑的假定，回避了曲线的可求长性.

此外，在各理工科专业对数学的需求越来越高，而国内高校数学基础课学时被压缩的大趋势下，如何在相对少的课时中，介绍更多的知识点一直是编者在教学中努力的方向. 编者将某些相对容易证明的定理，以及复变函数在其他数学分支或工科实践中的应用（例如生成函数、线性微分方程的齐次化原理等）编入习题，一方面可以使学生在扩大知识面的同时，进一步了解复变函数与其他学科之间的联系，另一方面也可以锻炼学生独立思考、探索的能力.

本书共分为五章，由同济大学数学科学学院周羚君副教授（第 1，4 章）、韩静讲师（第 2，5 章）和浙江工业大学理学院狄艳媚讲师（第 3 章）共同编写，由周羚君完成统稿. 第 1 章介绍了复数与复变函数的基本概念；第 2 章讲述了解析函数的基本概念和积分理论，并将调和函数的基本性质作为本章理论的直接应用放在最后一节；第 3 章讲述了解析函数的级数理论以及留数定理；第 4 章集中讲述了两种常用的积分变换—— Fourier 变换与 Laplace 变换；第 5 章介绍了共形映照. 在编写时，我们尽量使各章内容相对独立，以便在教学中可以根据学生的不同需求做适当的取舍，同时也方便不同专业背景、不同程度的读者自学. 在统稿过程中，三位作者不同教学理念和学术观点的碰撞，使作者相互间取长补短，促进了各章节的完善.

同济大学数学科学学院和浙江工业大学理学院拥有一批长期从事理工科数学教学的优秀教师，他们在教学方法、教材编写等方面给予编者无私的帮助，在编写过程中，颜启明副教授、项杏飞助理教授、王鹏副教授等提出了宝贵的意见，特此致谢. 在教学过程中，许多学生指出了本书初稿中的各种错误和疏漏，在此也特别感谢所有参与本课程的学生.

本书中编者的部分尝试，仍有待在教学实践中得到进一步的检验. 限于编者的水平，书中的错误与不当之处在所难免，恳请同行与读者斧正.

周羚君

2017 年 7 月

目 录

第 1 章 复数 **1**

1.1 复数的定义及其四则运算 1

1.1.1 复数的定义 2

1.1.2 复数的四则运算 3

1.2 复数的几何表示 4

1.2.1 复数的三角形式 4

1.2.2 复数的开方 8

1.2.3 复数的指数形式 9

1.2.4 共轭复数 10

1.2.5 球极投影 11

1.3 平面点集的复数表示 12

1.3.1 平面有向曲线 13

1.3.2 平面区域 15

1.4 复变函数 19

1.4.1 复变函数的定义 19

1.4.2 复变函数的分量表示 20

习题 1 22

第 2 章 解析函数的微积分 **24**

2.1 复变函数的极限和连续性 24

2.1.1 复数列的极限 24

2.1.2 复变函数的极限和连续性 25
2.2 复变函数的导数和解析函数 28
2.2.1 复变函数的导数 28
2.2.2 Cauchy-Riemann 方程 30
2.2.3 解析函数 32
2.2.4 解析函数的判定定理 33
2.3 初等函数 35
2.3.1 指数函数 36
2.3.2 对数函数 37
2.3.3 三角函数 40
2.3.4 双曲函数 42
2.3.5 幂函数 43
2.3.6 反三角函数 45
2.4 复变函数的积分 46
2.4.1 复积分 46
2.4.2 复变函数关于弧长的积分 50
2.4.3 复积分与路径的关系 53
2.5 Cauchy 型积分公式 56
2.5.1 Cauchy 积分定理 56
2.5.2 Cauchy 积分公式 59
2.5.3 Cauchy 高阶导数公式 63
2.6 调和函数 67
2.6.1 调和函数与共轭调和函数 67
2.6.2 极值原理和 Liouville 定理 72
习题 2 76

第 3 章 解析函数的级数理论与留数定理 82

3.1 复数列的级数与幂级数 82
3.1.1 复数项级数，函数项级数与幂级数 82
3.1.2 幂级数的收敛圆盘 84

3.1.3 幂级数的和函数 86
3.2 Taylor 级数 87
3.2.1 Taylor 级数 88
3.2.2 初等函数的 Taylor 级数 90
3.2.3 解析函数的零点 92
3.3 Laurent 级数 96
3.3.1 Laurent 级数的定义和 Laurent 级数定理 96
3.3.2 Laurent 级数的计算 99
3.4 孤立奇点 101
3.4.1 孤立奇点的定义与分类 102
3.4.2 解析函数在孤立奇点处的极限 104
3.4.3 解析函数在无穷远点的奇性 109
3.5 留数定理 112
3.5.1 留数 112
3.5.2 留数定理 115
3.5.3 函数在无穷远点的留数 117
3.6 留数定理在计算实积分中的应用 122
3.6.1 形如 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\mathrm{d}\theta$ 的积分 122
3.6.2 形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x$ 的积分 124
3.6.3 形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}\mathrm{d}x$ 的积分 126
3.6.4 其他类型积分计算举例 128
3.7 幅角原理与 Rouché 定理 132
3.7.1 幅角原理 132
3.7.2 Rouché 定理及其应用 133
习题 3 137

第 4 章 积分变换 **142**
4.1 Fourier 变换 142
4.1.1 Fourier 变换的定义 143

4.1.2 Fourier 变换的性质 145
4.1.3 Fourier 逆变换 149
4.1.4 Dirac-Delta 函数 152
4.2 Laplace 变换 156
4.2.1 Laplace 变换的定义与性质 156
4.2.2 Laplace 逆变换 164
4.2.3 有理函数的 Laplace 逆变换 166
4.3 积分变换在求解线性微分方程中的应用 169
4.3.1 利用 Laplace 变换求解线性常微分方程 169
4.3.2 利用 Fourier 变换求解微分方程 171
习题 4 172

第 5 章 共形映照 **176**

5.1 导数的几何意义与共形性 176
5.1.1 曲线间的夹角和映射的伸缩率 176
5.1.2 解析函数导数的几何意义 181
5.1.3 共形映照 183
5.2 分式线性变换 186
5.2.1 扩充复平面上的圆 186
5.2.2 分式线性变换及其共形性 187
5.2.3 保圆性、保域性和保对称点性 189
5.2.4 两个常用的分式线性变换 193
5.3 初等函数的共形性 195
5.3.1 幂函数 195
5.3.2 指数函数与对数函数 196
5.3.3 单连通区域到上半平面或单位圆盘的共形映照 197
习题 5 201

参考文献 **204**

第 1 章　复数

本章将给出复数、复数运算以及复变函数的基本定义.

1.1　复数的定义及其四则运算

人类对数的认识，起源于计数的需要，正整数的概念就是在这样的背景下产生的. 在建立了正整数的概念后，进一步产生了定义在其上的加法和乘法两种运算. 这两种运算满足

(1) 加法交换律：$a+b=b+a$;

(2) 加法结合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$;

(3) 乘法交换律：$ab=ba$;

(4) 乘法结合律：$(ab)c=a(bc)$;

(5) 分配律：$(a+b)c=ac+bc$.

正整数集关于加法和乘法无法定义逆运算，即下面的两个关于 x 的方程

$$m+x=n, \tag{1.1}$$

$$mx=n, \tag{1.2}$$

在正整数集中可能没有解，这里 m, n 为任意正整数. 出于这一需要，人们将数逐步扩充到整数和有理数. 在有理数集上，不仅可以定义满足交换律、结合律、分配律的加法和乘法运算，而且这两种运算都可以定义逆运算（即减法和除法），即对一切有理数 m, n ，方程 (1.1) 在有理数集中有解，对一切有理数 m, n 且 $m \neq 0$ ，方程 (1.2) 在有理数集中有解. 一元一次方程的求解问题解决后，人

们在求解二次方程时又遇到了问题，人们发现方程

$$x^2 = 2 \tag{1.3}$$

没有有理数解，从几何的观点看，即边长为 1 的正方形的对角线长度不是有理数. 出于这一需要，人们把式 (1.3) 的正数解形式地记为 $\sqrt{2}$，并对一切形如 $a+b\sqrt{2}$ 的数（这里 a, b 为任意有理数），定义加法和乘法如下

$$\left(a+b\sqrt{2}\right)+\left(c+d\sqrt{2}\right)=(a+c)+(b+d)\sqrt{2}, \tag{1.4}$$

$$\left(a+b\sqrt{2}\right)\left(c+d\sqrt{2}\right)=(ac+2bd)+(ad+bc)\sqrt{2}. \tag{1.5}$$

进一步可以验证，一切形如 $a+b\sqrt{2}$ 的数关于加法和乘法可以定义逆运算，事实上，可以定义减法是显然的，而除法可以用以下的分母有理化来实现

$$\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}=\frac{\left(a+b\sqrt{2}\right)\left(c-d\sqrt{2}\right)}{\left(c+d\sqrt{2}\right)\left(c-d\sqrt{2}\right)}=\frac{ac-2bd}{c^2-2d^2}+\frac{bc-ad}{c^2-2d^2}\sqrt{2}. \tag{1.6}$$

类似地，人们将诸如 $\sqrt{3}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{17}, \pi, \mathrm{e}$ 等的数添加进数集，将有理数集最终扩充到实数集，并将实数集记为 $\mathbf{R}$. 需要指出，并非所有的实数都是某个一元整系数多项式方程的解（数学上将这种实数称为**代数数**），比如 π, e 就不是代数数.

然而即使在实数范围内，当 $c<0$ 时，二次方程

$$x^2 = c \tag{1.7}$$

仍然无解，为此需要进一步扩充数集，复数就是在这样的背景下产生的.

1.1.1 复数的定义

为了使式 (1.7) 能够求解，形式地规定 -1 的一个平方根为 $\sqrt{-1}$（习惯上记 $\sqrt{-1}=\mathrm{i}$，称为**虚数单位**，工程类文献中有时为了避免与电流符号的混淆，也用 j 来记虚数单位），然后将 i 添加到实数集中，得到复数的概念.

定义 1.1 对实数 x, y，形如 $x+\mathrm{i}y$ 的数称为**复数**. 两个复数 $x_1+\mathrm{i}y_1$ 和 $x_2+\mathrm{i}y_2$ 称为**相等的**，当且仅当 $x_1=x_2$ 且 $y_1=y_2$. 由全体复数构成的集合记为 $\mathbf{C}$.

历史上，i 被人们所接受要比类似 $\sqrt{2}$ 这样的无理数晚得多，因为人们起初认为，i 不像实数一样是一个有实际意义的数（例如 $\sqrt{2}$ 可以看作边长为 1 的正方形的对角线的长度，π 可以看作单位圆周长的一半），是一个虚幻的对象，出于这一历史原因，数学家沿用了下面的名词.

定义 1.2 对复数 $z = x + \mathrm{i}y\,(x, y \in \mathbf{R})$，称 x 为 z 的**实部**，记作 $\operatorname{Re} z$，称 y 为 z 的**虚部**，记作 $\operatorname{Im} z$. 特别，若 $y = 0$，则将 z 与实数 x 等同；若 $x = 0$ 且 $y \neq 0$，则将 z 简记为 $\mathrm{i}y$，称为**纯虚数**，特别 $\mathrm{i}1$ 简记为 i.

根据定义 1.2，实数集 $\mathbf{R}$ 可以看作复数集 $\mathbf{C}$ 的子集.

为叙述简洁，在本书中，将复数 z 记为 $x + \mathrm{i}y$ 的形式时，均默认 x, y 为实数，不再特别说明.

1.1.2 复数的四则运算

有了复数的概念，进而可以定义复数的四则运算.

定义 1.3 对复数 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$，$z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$，规定 z_1 与 z_2 的**加法**和**乘法**为

$$(x_1 + \mathrm{i}y_1) + (x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1 + x_2) + \mathrm{i}\,(y_1 + y_2), \tag{1.8}$$

$$(x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + \mathrm{i}\,(x_1y_2 + x_2y_1). \tag{1.9}$$

这样的定义相当于将复数看作关于 i 的一次多项式作形式的加法和乘法，并在乘积的结果中将 i^2 替换为 -1. 不难验证，这两种运算满足本节最初提到的五条运算定律，且可以定义逆运算，事实上，可定义 z_1 与 z_2 的**减法**为

$$(x_1 + \mathrm{i}y_1) - (x_2 + \mathrm{i}y_2) = (x_1 - x_2) + \mathrm{i}\,(y_1 - y_2); \tag{1.10}$$

当 $z_2 \neq 0$ 时，利用分母实数化的思想，可定义 z_1 与 z_2 的**除法**为

$$\frac{x_1 + \mathrm{i}y_1}{x_2 + \mathrm{i}y_2} = \frac{(x_1 + \mathrm{i}y_1)(x_2 - \mathrm{i}y_2)}{(x_2 + \mathrm{i}y_2)(x_2 - \mathrm{i}y_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \tag{1.11}$$

在四则运算的意义下，复数 $x + \mathrm{i}y$ 可看作复数 x 和 $\mathrm{i}y$ 的加法，而 $\mathrm{i}y$ 可以看作 i 与 y 的乘法，因此 $x + y\mathrm{i}$ 与 $x + \mathrm{i}y$ 可视为等同.

像复数集这样，对四则运算都封闭的集合，称为**数域**. 特别，复数集 $\mathbf{C}$ 、实数集 $\mathbf{R}$ 、有理数集 $\mathbf{Q}$ 都是数域，而整数集 $\mathbf{Z}$ 就不是数域，因为整数集对除法不是封闭的.

例 1.1 计算 $\dfrac{1}{\mathrm{i}}+\dfrac{2}{1+\mathrm{i}}$.

解 $\dfrac{1}{\mathrm{i}}+\dfrac{2}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{-\mathrm{i}}{\mathrm{i}(-\mathrm{i})}+\dfrac{2(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=-\mathrm{i}+1-\mathrm{i}=1-2\mathrm{i}.$

与实数类似，可以定义复数的**乘方**.

定义 1.4 设 n 为正整数，定义 $z^1=z$ ，$z^{n+1}=z^n\cdot z$ ，对 $z\neq 0$ ，规定 $z^0=1$ ，$z^{-n}=\dfrac{1}{z^n}$.

例 1.2 计算 $\left(\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)^3$.

解 由于复数的四则运算满足与实数相同的运算律，从而二项式定理对复数乘方成立，从而

$$(\sqrt{3}+\mathrm{i})^3=(\sqrt{3})^3+3(\sqrt{3})^2\mathrm{i}+3\sqrt{3}\,\mathrm{i}^2+\mathrm{i}^3=(3\sqrt{3}-3\sqrt{3})+(9-1)\mathrm{i}=8\mathrm{i}.$$

1.2 复数的几何表示

复数不仅是代数学中的基本概念，在几何学中也有重要的地位.

1.2.1 复数的三角形式

在平面解析几何中，平面上的一个点或向量对应为一个有序实数对 (x,y) . 由上节定义看到，一个复数由其实部和虚部唯一确定，因此可以将复数 z 对应为一个有序实数对 $(\operatorname{Re}z,\operatorname{Im}z)$ ，于是一个复数，可看作平面上的一个点或向量（图 1.1），由此建立了复数集 $\mathbf{C}$ 到欧氏平面 $\mathbf{R}^2$ 上的一个一一对应，此时的欧氏平面 $\mathbf{R}^2$ 也称为复平面.

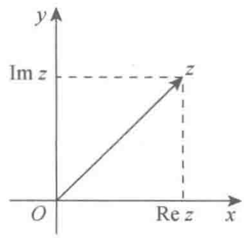

图 1.1

容易发现，复数的加法根据上述对应，恰好与向量的加法定义一致，即复数加法满足平行四边形法则（图 1.2）.

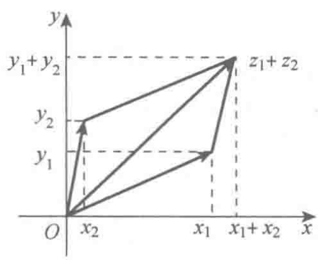

图 1.2

用极坐标表示一个复数也是非常直观且方便的.

定义 1.5 复数 $z = x + \mathrm{i}y$ 的**模**（或**绝对值**）规定为复数 z 作为向量的欧氏长度 $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$，非零复数 z 的**幅角**规定为 z 作为向量与 x 轴正方向的夹角，记作 $\mathrm{Arg}\, z$.

若以 r 和 θ 分别记一个非零复数的模和幅角（图 1.3），则 (r, θ) 恰为 z 的极坐标，根据欧氏坐标和极坐标的关系，对一切非零复数 z，有

$$z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta), \tag{1.12}$$

这一表达式称为复数 z 的**三角形式**. 在本书中，但凡出现形如式 (1.12) 的表达式，总是默认 r 为非负实数，θ 为实数，不再额外说明.

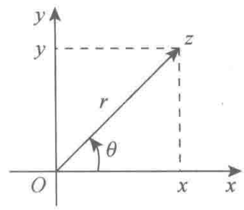

图 1.3

注 1.1 幅角的取值并不唯一. 显然, 如果 θ 为复数 z 的幅角, 则 $\theta+2k\pi$ (这里 k 为整数) 也是 z 的幅角, 其中取值在 $(-\pi,\pi]$ 上的幅角称为复数 z 的幅角**主值**, 记为 $\arg z$.

例 1.3 将 $z=-3\sqrt{3}-3\mathrm{i}$ 写为三角形式.

解 根据定义 $|z|=\sqrt{\left(-3\sqrt{3}\right)^2+(-3)^2}=6$. 又因为 z 在第三象限, 从而 $\arg z=-\pi+\arctan\dfrac{-3}{-3\sqrt{3}}=-\dfrac{5\pi}{6}$. 于是 $z=6\left(\cos\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)\right)$.

由初等几何的知识, 不难得到复数关于模的三角不等式.

定理 1.1 (三角不等式) $|z_1|-|z_2|\leqslant|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$.

根据模的定义, 结合三角不等式, 以下命题是显然的.

命题 1.2 $\max\{|\mathrm{Re}\,z|,|\mathrm{Im}\,z|\}\leqslant|z|\leqslant|\mathrm{Re}\,z|+|\mathrm{Im}\,z|$.

利用复数的三角形式计算复数乘法非常方便, 有以下定理.

定理 1.3 设非零复数 $z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)$, $z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$, 则 $z_1z_2=r_1r_2(\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2))$.

证明 根据乘法的定义

$$z_1z_2=r_1r_2((\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+\mathrm{i}(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)),$$

根据三角函数公式, 立即得到结论. 证毕.

由上述定理, 不难得到以下推论.

推论 1.4 设非零复数 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2)$，则 $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + \mathrm{i}\sin(\theta_1 - \theta_2))$.

推论 1.5 $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$. 当 $z_2 \neq 0$ 时，$\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$.

推论 1.6 对非零复数 z_1, z_2，$\mathrm{Arg}(z_1 z_2) = \mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2$（该式意义为等号两端可能取到的值的全体相同）.

注 1.2 通常情况下，

$$\arg(z_1 z_2) \neq \arg z_1 + \arg z_2,$$

这是因为两个幅角主值的和未必仍落在 $(-\pi, \pi]$ 内.

利用三角形式，结合定理 1.3 及其推论，立即得到以下公式.

定理 1.7 (De Moivre[1]公式) 若 $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ 为非零复数 z 的三角形式，n 为整数，则 $z^n = r^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta)$. 特别，对非零复数 z 和整数 n，有

$$|z^n| = |z|^n, \quad \mathrm{Arg}\, z^n = n\arg z + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}.$$

注 1.3 由于

$$n\mathrm{Arg}\, z = n\arg z + 2nk\pi,\ k \in \mathbf{Z},$$

从而 $\mathrm{Arg}\, z^n$ 与 $n\mathrm{Arg}\, z$ 可能取到的值不同，故当 $n \geqslant 2$ 时，

$$\mathrm{Arg}\, z^n \neq n\mathrm{Arg}\, z. \tag{1.13}$$

当复数的三角形式相对简单时，利用 De Moivre 公式计算乘方要比利用二项式定理更快捷.

例 1.2 解法二 因 $\sqrt{3} + \mathrm{i} = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$，从而

$$(\sqrt{3} + \mathrm{i})^3 = 2^3\left(\cos\frac{3\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{6}\right) = 8\mathrm{i}.$$

[1]De Moivre (1667–1754)，棣莫弗，法国数学家.

1.2.2 复数的开方

下面考虑乘方的逆运算——开方.

定义 1.6 对正整数 n 和复数 z，若存在复数 w，使得 $w^n = z$，则称 w 为 z 的一个 n 次方根.

在实数范围内，关于一个实数有几个 n 次方根，要分多种情况讨论，例如正实数有两个实的偶数次方根，负实数则没有实的偶数次方根，任意实数只有一个实的奇数次方根. 但在复数范围内，对任何非零复数 n 次方根，有统一的结论.

定理 1.8 任意一个非零复数 z 恰有 n 个互不相同的复 n 次方根. 若 $z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ 为非零复数 z 的三角形式，则 z 的 n 个互不相同的复 n 次方根为

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right), \tag{1.14}$$

这里 $k = 0, 1, \cdots, n-1$.

证明 首先证明式 (1.14) 中的复数互不相同且都是 z 的复 n 次方根. 事实上，对不同的 $k, k' \in \{0, 1, \cdots, n-1\}$，不妨设 $k > k'$，对应的幅角差

$$0 < \frac{\theta+2k\pi}{n} - \frac{\theta+2k'\pi}{n} = \frac{k-k'}{n}\cdot 2\pi \leqslant \frac{n-1}{n}\cdot 2\pi < 2\pi,$$

故式 (1.14) 中的复数互不相同，且

$$\left[\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right]^n = r(\cos(\theta+2k\pi) + \mathrm{i}\sin(\theta+2k\pi)) = z.$$

以下说明，z 的复 n 次方根只能是式 (1.14) 中所列复数之一. 设 w 为 z 的任一复 n 次方根，则

$$|z| = |w|^n, \quad \operatorname{Arg} z = n\arg w + 2k\pi,$$

这里 k 为整数，于是

$$|w| = \sqrt[n]{|z|}, \quad \operatorname{Arg} w = \frac{\theta+2k\pi}{n},$$

对 k 关于 n 作带余除法 $k = qn + r$，这里 q, r 为整数且 $0 \leqslant r < n$，于是

$$\frac{\theta+2k\pi}{n} = \frac{\theta+2r\pi}{n} + 2q\pi,$$