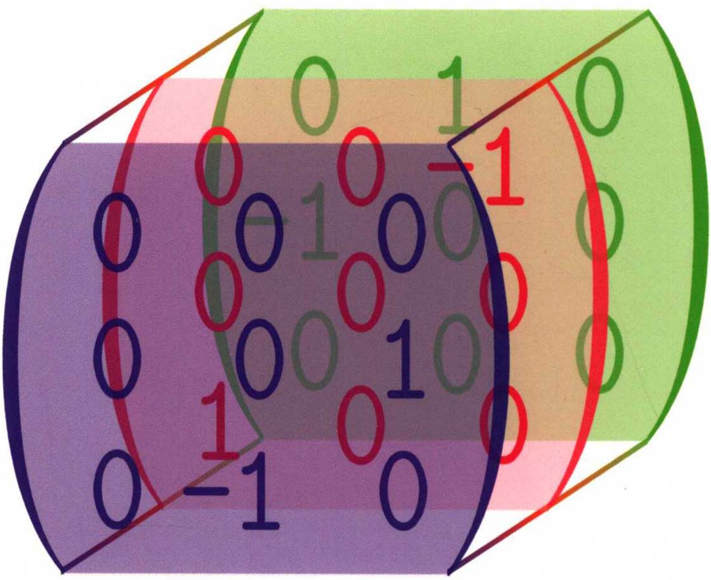
张量学习三讲

——学习和理解张量的基础

Three Lectures on the Tensor

A Foundation to Learn and Understand the Tensor

赵松年　于允贤　著



科学出版社

张量学习三讲

——学习和理解张量的基础

Three Lectures on the Tensor

A Foundation to Learn and Understand the Tensor

赵松年　于允贤　著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

学习和掌握张量基本知识是研究各种物质和结构的连续介质力学的基础，当然也是研究晶体结构、广义相对论的基础。然而，当前对张量的讲述和介绍方式的复杂化倾向，造成理解和运用它的很大困难。本书试图通过笛卡儿坐标系及其对偶坐标形式，引入张量概念和基本运算，阐明张量本质上是坐标变换，熟悉求和约定和指标表示是其关键，从而使张量能够体现出数学本身简单、和谐和美的统一，使得阅读和学习张量成为轻松愉悦的事，而不是一种沉重的学习负担。在阅读和理解了本书介绍的内容之后，能使读者达到张量入门级的水平。

本书叙述方式新颖，篇幅短小，内容精练，可读性高，图文并茂，可供物理学、力学、热能与动力工程、工程结构设计等相关专业本科生、研究生使用和参考，也可供科技工作者阅读使用。

图书在版编目(CIP)数据

张量学习三讲：学习和理解张量的基础/赵松年，于允贤著. —北京：科学出版社, 2018.3

ISBN 978-7-03-056966-0

Ⅰ. ①张…　Ⅱ. ①赵…　②于…　Ⅲ. ①张量–普及读物　Ⅳ. ①O183.2-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018) 第 050068 号

责任编辑：刘信力／责任校对：邹慧卿
责任印制：张　伟／封面设计：陈　敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京东华虎彩印刷有限公司 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

2018 年 3 月第　一　版　开本：720 × 1000　B5
2018 年 3 月第一次印刷　印张：8
字数：85 000

定价：48.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

序 言

读者朋友，当你读这本小册子的时候，作为作者，我们希望它能真正成为学习、理解和应用张量的捷径。因此，这本小册子的页数和字数是严格控制的，否则，即使不论可读性如何，叙述是否易懂，仅就小册子的容量超载，已经够不上捷径的标准。当今，生活节奏加快，研究生学制缩短，业余兴趣多元化，用于学习的时间不断减少。既然张量作为数学工具，许多读者只想知道如何用，对它的来龙去脉并无兴趣。我们充分考虑了这种情况，因而，限定小册子只有 3 篇，即：**基础篇**、**运算篇**和**应用篇**。从物理学的角度来看，在应用篇中以流体力学、电磁场和引力场为例，这些都是应当具备的基本知识，能适应不同专业的读者；从几何学的观点来看，就是从笛卡儿坐标系到闵可夫斯基平直时空坐标系再到黎曼弯曲空间坐标系的递进，不需要读者具有超过高等数学和普通物理学的背景知识，书中配有许多图示，提供了直观理解的途径，阅读这本小册子也不需要花费很多时间。

我们历经寒来暑往，阅读文献，对比研究，增删内容，调整顺序，斟酌推敲，反复修改，为的是实现我们的心愿：为学习张量知识的读者，提供一本名副其实的捷径读本。经过万般思索，对偶坐标系概念的闪现，使疑难困境豁然开朗，正像当年合作撰写《子波分析与子波变换》时那样，苦思冥索两年之久，Cantor 三分集掠过脑海，顿时醒悟，正是踏破铁鞋无觅处，得来全不费工夫，子波的数学解释的难点得以迎刃而解。现在通过引入对偶坐标系的概念，使这个心愿的实现

有了可能，能否最后实现，就要看我们的努力程度如何，知识水平是否到位。我们都已是耄耋老者，写作的环境简陋而狭小，又要面对很多困难，这是何求？其实目的也很简单，就是做一点力所能及的有益工作，我们也是科技人员，曾经在学习和扩展知识的过程中，不仅从那些优秀的专业著作中吸取营养，学到知识，还为我们读过的那些优秀著作的作者、译者和广大科技教育出版领域中的编辑的敬业精神，默默无闻的耕耘所感动，一直不忘，时至今日，仍然记忆犹新。

在 20 世纪 60 年代到 80 年代，张量分析、微分流形和纤维丛等微分几何分支学科正是在国际上迅速发展的关键时期，在许多科技领域得到广泛应用。然而，国内却处于停滞状态，90 年代开始，逐渐开展了一些研究，个别高校的力学系在连续介质力学课程中开设了介绍张量的选修课，也有在物理系讲授场论课程时，介绍张量基本知识的情况，意图是适应国际科学技术界张量迅速发展的态势，改变国内张量分析学科的落后局面。但是，直到现在，物理解释清楚、可读性很高，可供大学生、教师、科技人员学习的张量书籍仍然很少，鼓励专业人员编写、翻译这方面的著作，为大学生和科技人员提供各种数学读物，是提高张量分析水平和普及张量基本知识的有效途径之一。

没有优秀著作，对于教育工作者来说，终究是一件很遗憾的事。优秀的著作是大学、研究所和作者本人对科学技术事业的纪念碑式的贡献，人们可能并不记得作者的头衔、荣誉那些虚名，但是会记住那些优秀著作和它们作者的名字。

这次为写这本小册子，我们购买了国内外 40 种专著 (有些较早出版的中文张量书籍已经很难买到)，内容涉及以连续介质力学为应用对象的张量分析，以场论特别是广义相对论为应用的张量运算和以微分几何与群论为主的张量理论。我们已经对相关内容反复多次

读过，进行相互对比，也从网易公开课上听了美国斯坦福大学理论物理公开课的一组 6 节张量和引力的课程，有中文字幕，由资深的名家教授开讲，由于讲课时没有 PPT，只有几页纸的提纲，讲得比较吃力，听众也不时发问，表示听不明白。我们设想，如果将这个小册子制成 PPT，可以确信，不仅节省了在黑板上大量书写公式的时间，避免了张量上下角标容易出错的情形，效果会有明显改进，而且，通过对偶坐标的方式引入张量，能使读者豁然开朗，学习和理解张量的乐趣油然而生。我们凝聚心神的小册子就要出版与读者见面了，学习自然是需要刻苦努力的，希望读者能够仔细阅读，认真思考，理解和掌握基本的张量知识。若能如此，那就是对我们的辛苦和努力的最好回报！

这本小册子的一部分内容曾以论文《从坐标系到张量 —— 学习和理解张量的一条捷径》，于 2016 年在《力学与实践》第 38 卷第 4 期 (第 432—442 页) 上发表，受到读者的欢迎，下载次数很多。当时，由于我们身体健康状态较差，有些重要内容未能包括在内，也有个别打印错误未能改正，尽管如此，从未见面的胡漫编辑对该文编辑的一丝不苟的敬业精神和对论文长度的宽容，无论从作者的感受还是从读者的阅读方便而言，都是值得敬佩和感谢的，在此，我们向她表示衷心的感谢！

还要感谢《中国科学：物理学、力学、天文学》的王维编辑，同样也是未曾见面，与胡非教授合作的一篇论文从评审、修改到符合录用标准，她也是极具耐心，不断提出修改建议，完善了文中插图、文字表述，最终得以刊出，受到读者欢迎，对于王维博士在编辑工作中的认真、耐心和平和，我们一直记忆在心，借此机会，向她表示诚挚的感谢。

北京信息科技大学的刘畅博士给予作者很多及时的帮助，在此向他表示由衷的感谢。

感谢中国科学院大气物理研究所所长朱江教授的关心和支持。

程文君高级实验师一直关心、帮助和支持作者实现撰写这本小册子的心愿，尽其所能，帮助作者处理许多日常繁杂的事物；她和她的伙伴胡春红大夫、贾蕊副处长、胡景琳女士与作者的同事情谊，难能可贵，作者铭记在心。

LAPC 的程雪玲教授也给作者提供了许多便利条件和帮助，在此深致谢意。

胡非教授是大气湍流领域著名的科学家，在繁忙的科研和教学任务中，还一直记挂着和热忱地关注着我们，难能可贵，感人至深，借此机会，向他表示深深的谢意。

我们还要衷心感谢的几位教授朋友，他们是张兆田、熊小芸、邱钧、沈兰荪、卓力和张菁教授，对他们的关心、帮助和朋友情谊，深怀感激之情，永驻心中。

此外，还有几位同事和朋友，经常的关心问候，令人感动，他们是叶卓佳研究员、贾新媛研究员，陈焕森高级实验师。

这本小册子撰写和出版得到国家自然科学基金项目 (41675010，61271425) 的部分支持，谨致衷心的谢意。

自 2016 年作者的《湍流问题十讲》一书出版之后，受到读者的关注，指出书中错误不当之处，特别是物理学与生物复杂性领域研究卓有成绩的上海交通大学长江学者敖平教授，虽未曾见面，却是仔细阅读了该书和有关张量的论文，除了指出排印中的错误，还热情地肯定该书出版的价值，借此机会，向他们表示由衷的感谢。

作者原本打算在 2016 年科学出版社出版《湍流问题十讲》一书时，作为该书的附录，但是，正逢身体不适，未能如愿，这就只能另外作为小册子单独出版，以便供需要张量知识的读者阅读使用 (这一想法得到科学出版社副编审刘信力博士的理解和支持，作者铭记在心)，当然，内容更充实一些，主要是补充了应用方面的内容，作者不改初衷，在这本小册子的页数和字数，可读性和简明程度方面，尽量做到内容精炼，易读易懂，使这本小册子对学习张量能够称得上是捷径，也是我们对读者的心愿。

赵松年 (中国科学院大气物理研究所)
于允贤 (中国地震局地震灾害防御中心)
2017 年 7 月 27 日于北京

目 录

第一讲　基础篇：坐标系

“张量”(tensor, 紧张，张力) 一词，最早是德国著名数学家和语言学家格拉斯曼 (H. G. Grassmann, 1809~1877) 用于表达他提出的外微分形式和线性扩张理论的计算，之后，由哈密尔顿 (W. R Hamilton) 引入他的四元数 (1846 年)。赋予张量一词现代数学物理学意义的是沃格特 (Woldemar Voigt)，1899 年他用张量一词描述非刚体在出现应力和应变情况时的状态；而建立张量基本理论的则是意大利数学家里奇 (G. Ricci, 1853~1925) 和他的学生勒维–齐维塔 (T. Levi-Civita, 1873~1941)，当时他们将自己的重要著作称作“绝对微分学”(The Absolute Differential Calculus)，就是现在的“张量计算”(Calculus of Tensors)；在爱因斯坦于 1906 年至 1915 年研究广义相对论的过程中，从勒维–齐维塔那里学张量知识，实际上是从他在苏黎世联邦理工学院的同学、几何学家格罗斯曼 (M. Grossmann) 那里学习、理解和掌握了张量这一有效的数学工具，即用张量建立的物理方程的数学形式具有普适性，与选择何种坐标系无关，这就是协变性。爱因斯坦虽然学得很艰苦，但效果还是很显著的，他终于用张量这一数学工具建立了广义相对论，极大地推动了张量理论的研究和应用的发展。虽然高斯 (C. F. Gauss)、黎曼 (B. Riemann)、克里斯托费尔 (E. B. Christoffel) 等早在 19 世纪就引入了张量的概念，随后又由里奇和勒维–齐维塔进一步发展。但是，张量只是在广义相对论

中展示出数学形式的简洁优美，揭示时空结构的深刻性和统一性，以及强大的预测能力之后，才成为近代微分几何学的重要学科分支——张量分析，并在许多自然学科与工程技术中得到得到迅速发展。

在应用基础研究方面，无论是大尺度高速旋转的星系的结构演化，还是中小尺度的弹塑性物体、薄壳结构、桁架、桥梁等，在超载荷作用下产生大形变，甚至微小尺度的晶体结构、小形变的流体力学，都需要采用张量分析这一有效的数学工具。只不过前者是曲线坐标系的张量分析，后者是正交坐标系的张量计算。

我们知道，笛卡儿坐标系中各坐标轴互相正交，使得任一矢量的分解等效于在各坐标轴上的投影，矢量间的加法、乘法和微分、积分运算非常简洁。当立方体受到剪切力的作用发生形变时，各边不再正交，而形成斜角，投影与矢量的平行四边形分解不再等价，分析与运算变得很繁复。蜿蜒起伏的河流，各种复杂的弹性和塑性形变，则需要用曲线坐标系来描述，张量就是适应这些情况产生的一种数学工具，其中包括一些坐标之间的变换规则，主要是为了保证分析和运算的自洽性和一致性，判断经过这种变换后是否仍是张量，也就是里奇的具有变革意义的协变性思想，目的是在斜角直线 (仿射) 坐标系和曲线坐标系中建立类似于笛卡儿坐标系中矢量运算的规则，采用对偶坐标系可以做到这一点。进一步，将矢量与坐标点的数组对应起来，就可以在流形的意义下处理张量运算。当曲线坐标系的坐标轴彼此正交时，就退回到笛卡儿坐标系，这就意味着曲线坐标系中的张量与矢量运算退化为笛卡儿坐标系的张量与矢量运算，主要是梯度、散度和旋度的运算。但是，曲线坐标系中的基矢量的大小和方向将随着坐标

点的不同而变化，是局部坐标系；笛卡儿坐标系则是整体坐标系，基矢量在空间各处都是一样的。

张量是什么？直观上，可以认为它是矢量的扩展，或称作矢量的矢量、多重矢量。下面我们用最简单的方法引入对偶坐标系、指标表示、求和约定和坐标变换，它们是理解张量及其运算的基础。

1.1 对偶坐标系

在笛卡儿直角坐标系中，首先给出求和约定，然后介绍三种常见的坐标系各自的特点，说明引入对偶坐标系的方法，这是进行坐标变换和理解张量的关键所在，也是理解张量运算的基础。

1. 标架

空间一固定点 O 与三个有序基矢量的构型全体称之为标架，已有的各种坐标系就是用与各个基矢量方向一致的坐标轴线代替基矢量，因此是标架的特例。

2. 求和约定

爱因斯坦在研究广义相对论时，需要处理大量求和运算，为了简化这种繁复的运算，提出了求和约定，推动了张量分析的发展，具有重要意义，现在，它包括如下 3 点：

约定 1. 省去求和符号 $\sum$：在公式中，某一项的不同字母和变量分别有重复一次的上角标和下角标时 (称作 “哑标”，一般取值是 1,2,3)，求和符号 $\sum$ 略去，如下所示。

$$S = a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{i=1}^{n} a_ix^i$$
$$= \sum_{k=1}^{n} a_kx^k = a_ix^i = a_kx^k = \cdots = a_jx^j$$

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} A_{ij}x^iy^j = A_{ij}x^iy^j$$

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k}^{3} A_{ijk}x^iy^jz^k = A_{ijk}x^iy^jz^k$$

要注意的是，哑标必须是一上一下或上下数目对等，在每一项中的重复次数不能多于一次，不然就是错误的，没有意义，例如 $a_ib^ix_i$，$B_{ij}x^iy^iz^j$(这里的“哑标”也称作“傀标”，均对应于 dummy suffix 或 dummy index，它的含义就是虚设的指标，只是临时性的，经过求和之后就消失了。)。

约定 2.　自由标，在表达式的每一项中，出现一次且仅出现一次，用同一字母表示的下角标，如 $A_{ij} = B_{ip}C_{jq}D^{pq}$，自由标是 i 和 j，表示方程或变量的数目，并不作求和运算，哑标是 p 和 q；而像这样的表示式 $a_i = b_j + c_i$，$A_{ij} = A_{ik}$，都是无意义的。利用自由标也可以简化数学公式，如 $y_i = A_{ij}x^j$，用自由标 i 表示方程的数目，哑标 j 表示求和，一般取值为：$i, j = 1, 2, 3$；$y_i = A_{ij}x^j$ 实际上是下述方程的缩写

$$y_i = A_{ij}x^j \leftrightarrow \begin{cases} y_1 = A_{1j}x^j = A_{11}x^1 + A_{12}x^2 + A_{13}x^3 \\ y_2 = A_{2j}x^j = A_{21}x^1 + A_{22}x^2 + A_{23}x^3 \\ y_3 = A_{3j}x^j = A_{31}x^1 + A_{32}x^2 + A_{33}x^3 \end{cases}$$

约定 3.　数学表达式中，指标的“高度”是指上角标与下角标的

属性，同一高度的意思就是同为上角标或同为下角标。由上角标变为下角标是指标降低，反之是指标升高。

在斜角坐标系和曲线坐标系中，张量的重要内容是坐标、指标之间的转换，熟悉求和约定是很重要的。

3. 坐标系

下面的讨论限于实空间 $\mathbb{R}^3$，就是有实际意义并具有几何解释的情形。先讨论笛卡儿直角坐标系，接着讨论斜角直线坐标系，然后再推广至曲线坐标系 (如图 1.1 所示)。

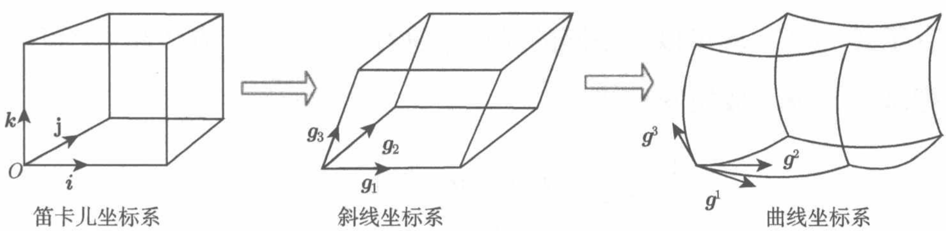


图 1.1 三个坐标系，图中给出了基矢量组成的标架

在实空间 $\mathbb{R}^3$ 中，有正交直角坐标系 (笛卡儿坐标系)，斜角直线坐标系 (仿射坐标系) 和曲线坐标系 (包括正交曲线坐标系)，记为 $O\text{-}x_1x_2x_3(x_1, x_2, x_3$ 也称作协变坐标)。对于这些坐标系均可以引入具有共同原点 O 的对偶坐标系 $O\text{-}x^1x^2x^3(x^1, x^2, x^3$ 也称作逆变坐标系)，也就是用具有上、下角标的对偶表示方法区分两类坐标系，同一个矢量 $\boldsymbol{d}$ 在不同的坐标系中记为 $\boldsymbol{d}_1$ 和 $\boldsymbol{d}^1$；它们在坐标系中，按照平行四边形分解的分量也用这种记法：$\boldsymbol{d}_1 = \boldsymbol{a}^1x_1 + \boldsymbol{a}^2x_2 + \boldsymbol{a}^3x_3$ 和 $\boldsymbol{d}^1 = \boldsymbol{a}_1x^1 + \boldsymbol{a}_2x^2 + \boldsymbol{a}_3x^3$，式中，$\boldsymbol{a}^1$，$\boldsymbol{a}^2$，$\boldsymbol{a}^3$ 是 $O\text{-}x_1x_2x_3$ 坐标系中的基矢量，$\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，$\boldsymbol{a}_3$ 是 $O\text{-}x^1x^2x^3$ 坐标系中的基矢量。之所以采用 $\boldsymbol{d}_1$

和 $\boldsymbol{d}^1$ 这样的上、下角标记法，就是表示具有上角标的基矢量是具有下角标的基矢量的“对偶”，在这里上角标不是指数。对偶记法在张量分析中非常有用：既区分不同的坐标系和它的基矢量，又便于微分和乘法运算。现在，我们通过矢量的点乘运算说明对偶基矢量之间的关系，不同坐标系如何简化复杂的运算：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{d}_1\cdot\boldsymbol{d}^1 &= (\boldsymbol{a}^1x_1+\boldsymbol{a}^2x_2+\boldsymbol{a}^3x_3)(\boldsymbol{a}_1x^1+\boldsymbol{a}_2x^2+\boldsymbol{a}_3x^3)\\ &= \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}^1x_1x^1+\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}^1x_2x^1+\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{a}^1x_3x^1\\ &\quad+\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}^2x_1x^2+\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}^2x_2x^2+\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{a}^2x_3x^2\\ &\quad+\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}^3x_1x^3+\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}^3x_2x^3+\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{a}^3x_3x^3\end{aligned}\tag{1-1}$$

有了式 (1-1)，就可以对不同的坐标系进行分析。为了方便起见，可以把基矢量表示成矩阵形式

$$\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}^j=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}^1 & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}^2 & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}^3\\ \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}^1 & \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}^2 & \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}^3\\ \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{a}^1 & \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{a}^2 & \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{a}^3\end{bmatrix},\quad i,j=1,2,3\tag{1-2}$$

下面我们要做的就是设法让式 (1-2) 可以表示成

$$\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}^j\delta_i^j=\begin{cases}a_ia^i, & i=j;\\ 0, & i\neq j;\end{cases}\qquad i,j=1,2,3$$

无论是对偶表示，还是张量与基矢量的坐标变换，都是为了这一目的。

1.2　笛卡儿直角坐标系

这时，矢量分解的平行四边形是矩形，它和矢量 $\boldsymbol{d}_1$ 和 $\boldsymbol{d}^1$ 分别在 $O\text{-}x_1x_2x_3$ 坐标系和 $O\text{-}x^1x^2x^3$ 坐标系中各坐标轴上的投影完全等

效，通过旋转和平移，$O\text{-}x_1x_2x_3$ 坐标系和 $O\text{-}x^1x^2x^3$ 坐标系总可以完全重合 (也就是同胚映射或双方单值，光滑的恒等变换)，如图 1.2 所示。由此很容易得出基矢量 $\boldsymbol{a}_i$ 和 $\boldsymbol{a}^i$ $(i=1,2,3)$ 的如下结果：

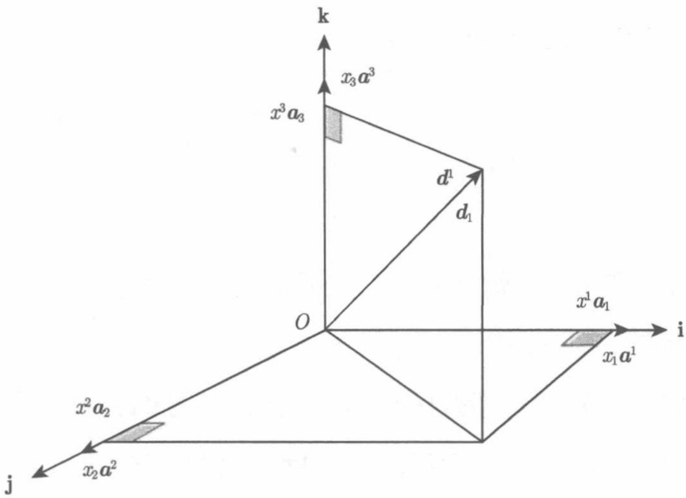


图 1.2 笛卡儿直角坐标系

凡是笛卡儿坐标系，无论处于空间何处，都可以看成同一个坐标系，单位基矢量不变，因此，是整体坐标系。至于处于其中的具体矢量，需要计入坐标系的平移和旋转后的效果

(1) 基矢量 $\boldsymbol{a}_i$ 和 $\boldsymbol{a}^i$ 是单位基矢量：$\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{a}^1\to\mathbf{i}$，$\boldsymbol{a}_2=\boldsymbol{a}^2\to\mathbf{j}$，$\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{a}^3\to\mathbf{k}$；

(2) 它们是正交的基矢量：$a_1\perp a^1, a_2\perp a^2, a_3\perp a^3$；$\boldsymbol{a}_2\perp\boldsymbol{a}^1, \boldsymbol{a}_3\perp\boldsymbol{a}^1$；$\boldsymbol{a}_1\perp\boldsymbol{a}^2$，$\boldsymbol{a}_3\perp\boldsymbol{a}^2$，$\boldsymbol{a}_1\perp\boldsymbol{a}^3$，$\boldsymbol{a}_2\perp\boldsymbol{a}^3$；

(3) $\boldsymbol{a}_i$ 和 $\boldsymbol{a}^i$ 的点积具有单位正交基矢量的特性：

$$\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}^1=\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{a}_3\cdot\boldsymbol{a}^3=1$$

$$\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{a}^1=\boldsymbol{a}_3\cdot\boldsymbol{a}^1=\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{a}_3\cdot\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{a}^3=\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{a}^3=0$$

因此，两个矢量的点积运算具有如下简洁的形式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{d}_1 \cdot \boldsymbol{d}^1 &= \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}^1 x_1 x^1 + \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}^2 x_2 x^2 + \boldsymbol{a}_3 \cdot \boldsymbol{a}^3 x_3 x^3 \\ &= x_1 x^1 + x_2 x^2 + x_3 x^3 \end{aligned} \tag{1-3}$$

矩阵 $\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}^j$ 简化为单位对角矩阵

$$\boldsymbol{a}_i\boldsymbol{a}^j = \delta_j^i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由于 $\boldsymbol{d}_1$ 和 $\boldsymbol{d}^1$ 本就是同一个矢量，它们在对偶坐标系中的对应分量是相等的，即 $x_1 = x^1$，$x_2 = x^2$，$x_3 = x^3$，$\boldsymbol{d}_1 \cdot \boldsymbol{d}^1 = (d)^2$ (注意：为了将对偶的上指标与指数区分开来，无圆括号的字符的上角标表示对偶，如 d^2；有圆括号的字符的上角标是指数，如 $(d)^2$)。由此可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{d}_1 \cdot \boldsymbol{d}^1 = \boldsymbol{d}^1 \cdot \boldsymbol{d}_1 = (d)^2 &= (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 \\ &= (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \end{aligned} \tag{1-4}$$

矢量模的平方等于各坐标分量的平方和，在更广泛的意义上，式 (1-4) 就是一类正交变换群。所以，笛卡儿直角坐标系只需要一组基矢量，就是我们熟悉的 **i**，**j**，**k**。在这里，可以把笛卡儿坐标系设想为两个正交的对偶坐标系的重合，为讨论和理解斜角直线坐标系和曲线坐标系中如何引入对偶基矢量以及张量分析奠定了基础。

1.3　斜角直线坐标系

如果不是笛卡儿直角坐标系，而是斜角直线坐标系，那情况将如何？在摄影和景物透视中经常遇到的仿射坐标系，就是现在要讨论的