随机生物模型和传染病模型

季春燕　蒋达清　著

科学出版社

随机生物模型和传染病模型

季春燕　蒋达清　著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书介绍了建立随机生物模型和传染病模型的方法，研究一些基本的随机种群模型和传染病模型的渐近行为的方法，以及后续的一些工作和待解决的问题. 随机生物模型主要介绍了基本的单种群模型、Lotka-Volterra型互惠和竞争模型以及具有不同功能反应函数的捕食-食饵模型在随机扰动下正解的存在性、灭绝性、持久性和平稳分布的存在性等. 随机传染病模型主要介绍了 SIR 传染病模型在不同随机扰动下动力学行为，探讨了系统疾病流行和消失的条件.

本书可作为应用数学专业高年级本科生及学习随机微分方程的研究生的教材与参考书.

图书在版编目(CIP)数据

随机生物模型和传染病模型/季春燕，蒋达清著. —北京：科学出版社，2018.4

ISBN 978-7-03-057003-1

Ⅰ. ①随… Ⅱ. ①季… ②蒋… Ⅲ. ①随机微分方程-应用-生物模型-随机模式-高等学校-教材②随机微分方程-应用-传染病学-随机模式-数学模型-高等学校-教材 Ⅳ. ①Q141②R51③Q-332④O211.63

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 053111 号

责任编辑：李 欣 / 责任校对：邹慧卿
责任印制：张 伟 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京教图印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2018 年 4 月第 一 版 开本：720 × 1000 B5
2018 年 4 月第一次印刷 印张：13 1/2
字数：272 000

定价：98.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

1951 年，从日本数学家 Kiyoshi Itô (伊藤清) 引入 Itô 微积分对随机现象进行定量分析和研究开始, 历经半个多世纪的发展, 随机微分方程的研究取得了辉煌的成果. 随机微分方程具有非常广泛的应用背景, 在物理、力学、化学、生物学、经济与金融学、控制理论、航天工程、疾病传播等诸多领域中都扮演着重要角色. 随机微分方程的发展过程与其他数学分支 (如测度论、偏微分方程、微分几何、势论等) 都有着深刻的联系.

生物数学是生物学与数学之间的边缘学科. 它以数学方法研究和解决生物学问题，并对与生物学有关的数学方法进行理论研究. 从 20 世纪 80 年代开始，以中国科学院陈兰荪研究员为首的一批科研工作者长期从事与生物数学相关的研究工作，并取得了丰富的成果，积累了宝贵的经验. 传染病的防治是关系人类健康和国计民生的重大问题. 传染病动力学是对传染病进行理论性定量研究的一种重要方法. 1927 年, Kermack 与 McKendrick 创立了研究传染病动力学的著名的“仓室”模型. 至今，很多研究工作者仍然不断使用和不断发展该数学模型，并取得了辉煌的研究成果. 到了 21 世纪，由于生物数学模型和传染病模型的广泛而深刻的实际背景, 对它们的研究显得越来越重要, 它们及其相关领域逐渐成为科学界研究的热点问题之一. 由于各种形式的随机干扰无处不在，用确定性模型对系统行为所作的描述和预测并不总是令人满意. 因此, 许多经典的确定性模型的结果被推广到随机的情况. 特别地, 随着随机微分方程理论在生物数学模型和传染病模型中的广泛应用, 大量实际问题的研究与突破, 使生物数学与现代随机微分方程理论都得到了长足发展. 但对随机生物数学模型和传染病模型的研究只有二十多年的历史, 这方面的结果还是很少, 还存在许多有待解决的问题. 本书给出了由连续随机微分方程表示的随机生物模型、传染病模型的动力学性质, 包括系统正解的存在唯一性, 种群的随机持久性、非持久性, 传染病的灭绝和流行, 以及系统平稳分布的存在行、遍历性等渐近性态.

感谢常熟理工学院和东北师范大学给作者提供了一个优越的工作学习环境! 感谢本书的合作者：东北师范大学史宁中教授、李晓月教授、杨青山副教授, 爱尔兰国立大学的 Donal O’Regan 教授，与他们的合作交流使得本书得以顺利完成! 感谢所有合作过的老师、朋友、讨论班的全体成员以及已经毕业和在读的研究生! 作者还要对国家自然科学基金委员会、江苏省自然科学基金委员会、中国博士后科学基金委员会、江苏省青蓝工程和 “333 工程” 等的一贯支持，表示由衷的感谢!

由于作者水平有限，本书可能有不当之处，甚至失误或疏漏，热诚地欢迎各位同行专家和读者批评指正！

季春燕　蒋达清

2017 年 1 月

目　　录

第 1 章　预备知识

本章将给出本书所需要的有关随机过程、随机微分方程等的一些基本定义和基本定理, 以及证明中要用到的图论知识、基本不等式等, 更详细的内容可参考文献 [2—5, 9, 10, 64, 73, 74, 81, 96, 110, 112, 124, 167, 184, 219].

记 $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i > 0$ 对所有的 $1 \leqslant i \leqslant n\}, \bar{\mathbb{R}}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geqslant 0$ 对所有的 $1 \leqslant i \leqslant n\}$, $J_i = \{1 \leqslant j \leqslant n,$ 但 $j \neq i\}, a \wedge b = \min\{a, b\}$, $a \vee b = \max\{a, b\}$, $\mathbb{S}_h = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| < h\}$.

1.1　随机过程

假设 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 是完备概率空间. 考虑 $\mathcal{F}$ 的部分 σ- 代数构成的类 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$, 如果满足以下条件:

(1) 当 $s \leqslant t$ 时, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$;

(2) 对所有的 $t \geqslant 0, \mathcal{F}_t = \cap_{s>t}\mathcal{F}_s$,

则称这个类是 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的一个流. 称流 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ 满足通常条件, 若其是单调递增右连续, 且 $\mathcal{F}_0$ 包含所有的零测集. 以后总假设这个通常条件成立. 直观地说, $\mathcal{F}_t$ 是到时刻 t 为止, 能够观测到的事件的全体.

定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的随机过程 $X = \{X_t\}_{t\geqslant 0}$ 被称为 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ 适应的, 如果对每个 $t \geqslant 0, X_t$ 是 $\mathcal{F}_t$-可测的.

称赋予流 $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}$ 的概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geqslant 0}, P)$ 为带流概率空间或漏斗空间.

一族 $\mathbb{R}^d$ 实值随机变量 $\{X_t\}_{t\in I}$ 称为指标集为 I、状态空间为 $\mathbb{R}^d$ 的随机过程.

定义 1.1.1　称定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的 $\{\mathcal{F}_t\}$-适应过程 $X = \{X_t\}_{t\geqslant 0}$ 为鞅, 若满足如下条件:

(1) 对每一个 $t \geqslant 0, E[|X_t|] < \infty$;

(2) 对于所有的 $s, t \geqslant 0, s \leqslant t, E[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s$.

若上述的等号分别换成 $\leqslant$ 或 $\geqslant$, 则分别称其为下鞅或上鞅.

定义 1.1.2 (停时)　设 $\{\mathcal{F}_t; t \in T\}$ 是定义在 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的非降 σ-代数族, 称取值于 $T \cup \{\infty\}$ 的随机变量 $\tau(\omega)$ 是 $\mathcal{F}_t$ 停时, 若 $\forall t \in T$, 有 $\{\omega : \tau(\omega) \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$. 称 τ 是 $\{\mathcal{F}_t\}$ 宽停时, 若 $\{\omega : \tau(\omega) < t\} \in \mathcal{F}_t$.

显然, $\tau \equiv t$ (常数时间) 是一个停时. 可见停时是对时间的一个推广.

定理 1.1.1 (强大数定律)　设 $M=\{M_t\}_{t\geqslant 0}$ 是实值连续局部鞅, 且 $M(0)=0$. 则

$$\lim_{t\to\infty}\langle M,\ M\rangle_t=\infty\ \ \text{a.s.}\quad\Rightarrow\quad\lim_{t\to\infty}\frac{M_t}{<M,\ M>_t}=0\ \ \text{a.s.}$$

以及

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{\langle M,\ M\rangle_t}{t}<\infty\ \ \text{a.s.}\quad\Rightarrow\quad\lim_{t\to\infty}\frac{M_t}{t}=0\ \ \text{a.s.}$$

定理 1.1.2　设 $\{A_t\}_{t\geqslant 0}$ 和 $\{U_t\}_{t\geqslant 0}$ 是两连续的 $\mathcal{F}_t$ 适应的递增过程, 且 $A_0=U_0=0$ a.s.; $M(t)$ 是一实值连续局部鞅, 且 $M(0)=0$ a.s.; ξ 是一非负的 $\mathcal{F}_0$ 可测随机变量. 定义

$$X(t)=\xi+A(t)-U(t)+M(t)\quad(t\geqslant 0).$$

若 X_t 非负, 则

$$\left\{\lim_{t\to\infty}A_t<\infty\right\}\subset\left\{\lim_{t\to\infty}X_t\ \text{存在且有限}\right\}\cap\left\{\lim_{t\to\infty}U_t<\infty\right\}\ \ \text{a.s.},$$

其中 $B\subset D$ a.s. 是指 $P(B\cap D^c)=0$.

特别地, 若又有 $\left\{\lim\limits_{t\to\infty}A(t)<\infty\right\}$ a.s., 则对几乎所有的 $\omega\in\Omega$ 有

$$\lim_{t\to\infty}X(t,\omega)\ \text{存在且有限},\quad\lim_{t\to\infty}U(t,\omega)<\infty.$$

定理 1.1.3 (控制收敛定理)　设 $p\geqslant 1,\{X_k\}\subset L^p(\Omega;\mathbb{R}^d),Y\in L^p(\Omega;\mathbb{R})$. 若 $|X_k|\leqslant Y$ a.s. 且 $\{X_k\}$ 依概率收敛于 X. 则 $X\in L^p(\Omega;\mathbb{R}^d),\{X_k\}$ L^p 收敛于 X, 且

$$\lim_{t\to\infty}E[X_k]=E[X].$$

当 Y 有界时, 此定理也称为有界收敛定理.

引理 1.1.1 (Borel-Cantelli 引理)　(1) 若 $\{A_k\}\subset\mathcal{F}$, 且 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}P(A_k)<\infty$, 则

$$P\left(\limsup_{k\to\infty}A_k\right)=0.$$

即, 存在一集合 $\Omega_0\in\mathcal{F}$ 且 $P(\Omega_0)=1$ 和一整值随机变量 k_0 使得对每一个 $\omega\in\Omega_0$, 当 $k\geqslant k_0(\omega)$ 时 $\omega\notin A_k$.

(2) 若序列 $\{A_k\}\subset\mathcal{F}$ 相互独立, 且 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}P(A_k)=\infty$, 则

$$P\left(\limsup_{k\to\infty}A_k\right)=1.$$

即存在一集合 $\Omega_\theta\in\mathcal{F}$ 且 $P(\Omega_\theta)=1$ 使得对每一个 $\omega\in\Omega$, 存在子序列 $\{A_{k_i}\}$, 使得 ω 属于每个 A_{k_i}.

定理 1.1.4 假设 n 维随机过程 $X(t)$ $(t \geqslant 0)$ 满足如下条件

$$E|X(t)-X(s)|^{\alpha} \leqslant c|t-s|^{1+\beta}, \quad 0 \leqslant s, t < \infty,$$

这里 α, β, c 都是正常数. 则存在 $X(t)$ 的连续修正 $\tilde{X}(t)$，且对任意的 $\gamma \in (0, \beta/\alpha)$，存在正的随机变量 $h(\omega)$ 满足

$$P\left\{\omega : \sup_{0<|t-s|<h(\omega), 0 \leqslant s,t<\infty} \frac{|\tilde{X}(t,\omega)-\tilde{X}(s,\omega)|}{|t-s|^{\gamma}} \leqslant \frac{2}{1-2^{-\gamma}}\right\} = 1.$$

换言之，$\tilde{X}(t)$ 的几乎每一个样本轨道都是依指数 γ 局部一致 Hölder 连续的.

定义 1.1.3 设 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geqslant 0}, P)$ 是完备概率空间. 若一维实值连续 $\{\mathcal{F}_t\}$ 适应的随机过程 $B(t)$ 满足下列条件:

(1) $B(0)=0$ a.s.;

(2) 对任意的 $0 \leqslant s < t < \infty, B(t)-B(s)$ 服从零均值, 方差为 $t-s$ 的正态分布, 即 $B(t)-B(s) \sim N(0, t-s)$;

(3) 对任意的 $0 \leqslant s < t < \infty, B(t)-B(s)$ 与 $\{\mathcal{F}_s\}$ 独立,

则称 $B(t)$ 为布朗运动, 或维纳过程.

称 n 维随机过程 $B(t)=(B_1(t), B_2(t), \cdots, B_n(t))^{\mathrm{T}}$ 为 n 维布朗运动, 若每个分量 $B_i(t)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 都是一维布朗运动, 且 $B_1(t), B_2(t), \cdots, B_n(t)$ 是相互独立的.

引理 1.1.2 布朗运动 $B(t)$ 具有如下性质:

(1) 布朗运动 $B(t)$ 几乎处处连续但无处可微;

(2) 布朗运动 $B(t)$ 在任意有限区间上是无界变差的;

(3) 布朗运动 $B(t)$ 是连续平方可积鞅, 其二次变分为 $\langle B_t, B_t\rangle_t = t$ $(t \geqslant 0)$;

(4) 由 (3) 和强大数定律可得

$$\lim_{t\to\infty} \frac{B(t)}{t} = 0 \quad \text{a.s.};$$

(5) (重对数定律)

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{B(t)}{\sqrt{2t\log\log t}} = 1 \quad \text{a.s.};$$

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{B(t)}{\sqrt{2t\log\log t}} = -1 \quad \text{a.s.}$$

定理 1.1.5 设 $M(t)=\displaystyle\int_0^t e^s dB(s)$, 其中 $B(t)$ 是一维标准布朗运动, 则

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{|e^{-t}M(t)|}{\sqrt{\log t}} = 1 \quad \text{a.s.}$$

定义 1.1.4 (四种收敛性) 设 X 和 X_k $(k \geqslant 1)$ 是 $\mathbb{R}^d$ 上的实值随机变量.

(a) 若存在一 P 零测集 $\Omega_0 \in \mathcal{F}$, 使得对每个 $\omega \notin \Omega_0$, 序列 $\{X_k(\omega)\}$ 在通常意义下收敛到 X, 则称 $\{X_k\}$ 几乎必然 (或以概率 1) 收敛到 X. 记为 $\lim\limits_{k\to\infty} X_k = X$ a.s.

(b) 若对任意的 $\epsilon > 0$, 当 $k \to \infty$, 有 $P\{\omega : |X_k(\omega) - X(\omega)| > \epsilon\} \to 0$, 则称 $\{X_k\}$ 随机 (或依概率) 收敛到 X.

(c) 若 $X_k \in L^p, X \in L^p$, 且 $E|X_k - X|^p \to 0$, 则称 $\{X_k\}$ 在 p 阶矩意义下 (或 L^p 意义下) 收敛到 X.

(d) 若对任意的定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的实值连续有界函数 g, 有 $\lim\limits_{k\to\infty} Eg(X_k) = Eg(X)$, 则称 $\{X_k\}$ 依分布收敛到 X.

1.2 随机微分方程

设 $B(t) = (B_1(t), \cdots, B_m(t))^{\mathrm{T}}, t \geqslant 0$ 是定义在上述概率空间上的 m 维标准布朗运动. 设 $0 \leqslant t_0 < T < \infty, x_0$ 是 $\{\mathcal{F}_{t_0}\}$ 可测的 $\mathbb{R}^d$ 中取值的随机变量, 且 $E[x_0^2] < \infty$. 设 $f : \mathbb{R}^d \times [t_0, T] \to \mathbb{R}^d$ 和 $g : \mathbb{R}^d \times [t_0, T] \to \mathbb{R}^{d\times m}$ 都是 Borel 可测函数. 设初值为 $x(t_0) = x_0$ 的 d 维随机微分方程:

$$dx(t) = f(x(t), t)dt + g(x(t), t)dB(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant T, \tag{1.2.1}$$

其等价于下面的随机积分方程:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s), s)ds + \int_{t_0}^{t} g(x(s), s)dB(s), \quad t_0 \leqslant t \leqslant T. \tag{1.2.2}$$

定义 1.2.1 称取值于 $\mathbb{R}^d$ 中的随机过程 $\{x(t)\}_{t_0\leqslant t\leqslant T}$ 为方程 (1.2.1) 的解, 若 $x(t)$ 具有如下性质:

(i) $\{x(t)\}$ 是连续的, 且是 $\{\mathcal{F}_t\}$ 适应的;

(ii) $f(x(t), t) \in \mathcal{L}^1([t_0, T]; \mathbb{R}^d)$, $g(x(t), t) \in \mathcal{L}^2([t_0, T]; \mathbb{R}^{d\times m})$;

(iii) 当 $t \in [t_0, T]$ 时, 方程 (1.2.2) 以概率 1 成立.

定理 1.2.1 假设函数 $f : \mathbb{R}^d \times [t_0, T] \to \mathbb{R}^d$ 和 $g : \mathbb{R}^d \times [t_0, T] \to \mathbb{R}^{d\times m}$ 关于 $(x, t) \in \mathbb{R}^d \times [t_0, T]$ 可测, 且关于 x 满足局部 Lipschitz 条件, 即存在 $c_k > 0$ $(k = 1, 2, \cdots)$, 使得当 $\forall x, y \in \mathbb{R}^d, |x| \vee |y| \leqslant k$ 时, 满足

$$|f(x, t) - f(y, t)| \vee |g(x, t) - g(y, t)| \leqslant c_k|x - y|.$$

则随机微分方程 (1.2.1) 存在唯一连续的局部解 $x(t), t \in [t_0, \tau_e)$, 其中 τ_e 是爆破时刻.

定理 1.2.2 (存在唯一性定理) 假设函数 $f:\mathbb{R}^d\times[t_0,T]\to\mathbb{R}^d$ 和 $g:\mathbb{R}^d\times[t_0,T]\to\mathbb{R}^{d\times m}$ 关于 $(x,t)\in\mathbb{R}^d\times[t_0,T]$ 可测, 且关于 x 满足局部 Lipschitz 条件和线性增长条件, 即存在 $c_k>0$ $(k=1,2,\cdots)$, 使得当 $\forall x,y\in\mathbb{R}^d$ 且 $|x|\vee|y|\leqslant k$ 时, 满足不等式

$$|f(x,t)-f(y,t)|\vee|g(x,t)-g(y,t)|\leqslant c_k|x-y|.$$

同时存在 $c>0$, 满足

$$|f(x,t)|\vee|g(x,t)|\leqslant c(1+|x|).$$

则随机微分方程 (1.2.1) 存在唯一连续的全局解 $x(t)(t\in[t_0,T])$. 且对每个 $p>0$, 有

$$E\left[\sup_{t_0\leqslant s\leqslant T}|x(s;x_0)|^p\right]<\infty.$$

定理 1.2.3 (Itô 公式) 设 $x(t)$ $(t\geqslant t_0=0)$ 是方程 (1.2.1) 的解, $V\in C^{2,1}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+;\mathbb{R})$, 则 $V(x(t),t)$ 仍是 Itô 过程, 且其具有随机微分:

$$\begin{aligned}dV(x(t),t)=&[V_t(x(t),t)+V_x(x(t),t)f(t)+\frac{1}{2}\mathrm{trace}(g^{\mathrm{T}}(t)V_{xx}(x(t),t)g(t))]dt\\&+V_x(x(t),t)g(t)dB(t)\ \text{a.s.},\end{aligned}$$

此式称为 Itô 公式.

设一维非齐次线性随机微分方程

$$dy(t)=(a(t)y(t)+\bar{a}(t))dt+\sum_{k=1}^{m}(b_k(t)y(t)+\bar{b}_k(t))dB_k(t),\quad t\in[t_0,T]. \tag{1.2.3}$$

其相应的一维齐次线性随机微分方程

$$dy(t)=a(t)y(t)dt+\sum_{k=1}^{m}b_k(t)y(t)dB_k(t),\quad t\in[t_0,T]. \tag{1.2.4}$$

定理 1.2.4 设 $a(\cdot),b_k(\cdot)$ 是定义在 $[t_0,T]$ 上的实值 Borel 可测有界函数, $y_0\in L^2(\Omega;\mathbb{R})$ 是 $\mathcal{F}_{t_0}$ 可测. 则

$$\Phi(t)=\exp\left[\int_{t_0}^{t}\left(a(s)-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}b_k^2(s)\right)ds+\sum_{k=1}^{m}\int_{t_0}^{t}b_k(s)dB_k(s)\right] \tag{1.2.5}$$

是一维线性随机微分方程 (1.2.4) 的基本解, $y(t)=y_0\Phi(t)$ 是一维线性随机微分方程 (1.2.4) 初值为 $y(t_0)=y_0$ 的解.

定理 1.2.5　设 $a(\cdot), \bar{a}(\cdot), b_k(\cdot), \bar{b}_k(\cdot)$ 是定义在 $[t_0, T]$ 上的实值 Borel 可测有界函数, $y_0 \in L^2(\Omega; \mathbb{R})$ 是 $\mathcal{F}_{t_0}$ 可测的. 则

$$
\begin{aligned}
y(t) =& \Phi(t) \left[y_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s) \left(\bar{a}(s) - \sum_{k=1}^{m} b_k(s)\bar{b}_k(s) \right) ds \right. \\
& \left. + \sum_{k=1}^{m} \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\bar{b}_k(s) dB_k(s) \right]
\end{aligned}
$$

是一维线性随机微分方程 (1.2.3) 初值为 $y(t_0) = y_0$ 的解, 其中 $\Phi(t)$ 如 (1.2.5) 所定义.

定义 1.2.2　方程 (1.2.1) 中, 若对所有 $t \geqslant t_0$, $f(0,t) = 0$ 和 $g(0,t) = 0$. 则 $x(t) \equiv 0$ 是方程 (1.2.1) 的解, 称为方程 (1.2.1) 的平凡解 (或平衡点).

定义 1.2.3　(i) 称方程 (1.2.1) 的平凡解是随机稳定 (或依概率稳定) 的. 若 $\forall\ \epsilon \in (0,1)$ 和 $r > 0$, 存在 $\delta = \delta(\epsilon, r, t_0) > 0$ 使得当 $|x_0| < \delta$ 时有

$$
P\left\{ |x(t; t_0, x_0)| < r, \text{对所有的 } t \geqslant t_0 \right\} \geqslant 1 - \epsilon.
$$

否则称平凡解是不稳定的.

(ii) 称方程 (1.2.1) 的平凡解是随机渐近稳定的. 若它是随机稳定的, 且 $\forall\ \epsilon \in (0,1)$, 存在 $\delta_0 = \delta_0(\epsilon, t_0) > 0$ 使得当 $|x_0| < \delta_0$ 时,

$$
P\left\{ \lim_{t \to \infty} x(t; t_0, x_0) = 0 \right\} \geqslant 1 - \epsilon.
$$

(iii) 称方程 (1.2.1) 的平凡解是大范围随机渐近稳定的. 若它是随机稳定的, 且对所有的 $x_0 \in \mathbb{R}^d$ 有

$$
P\left\{ \lim_{t \to \infty} x(t; t_0, x_0) \right\} = 1.
$$

下面给出利用 Lyapunov 泛函方法给出方程 (1.2.1) 的平凡解的稳定性判据.

定理 1.2.6　若存在正定函数 $V(x,t) \in C^{2,1}(\mathbb{S}_h \times [t_0, \infty); \mathbb{R}_+)$, 使得对所有的 $(x,t) \in \mathbb{S}_h \times [t_0, \infty)$ 有

$$
LV(x,t) \leqslant 0,
$$

则称方程 (1.2.1) 的平凡解是随机稳定的.

定理 1.2.7　若存在正定、递减函数 $V(x,t) \in C^{2,1}(\mathbb{S}_h \times [t_0, \infty); \mathbb{R}_+)$, 使得 $LV(x,t)$ 是负定的, 则称方程 (1.2.1) 的平凡解是随机渐近稳定的.

定理 1.2.8　若存在正定的, 递减的, 径向无界的函数 $V(x,t) \in C^{2,1}(\mathbb{R}^d \times [t_0, \infty); \bar{\mathbb{R}}_+)$, 使得 $LV(x,t)$ 是负定的, 则方程 (1.2.1) 的平凡解是大范围随机渐近稳定的.

定义 1.2.4 称方程 (1.2.1) 的平凡解是几乎必然指数稳定的. 如果对所有的 $x_0 \in \mathbb{R}^d$, 下式成立,

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log |x(t;t_0,x_0)| < 0 \quad \text{a.s.} \tag{1.2.6}$$

定理 1.2.9 (随机比较定理) 设 $x_i(t)$ $(i=1,2)$ 分别是随机微分方程

$$dx_i(t) = f_i(x_i(t),t)dt + g(x_i(t),t)dB(t)$$

的解, 其中 $f(x,t) \in C([0,\infty)\times\mathbb{R}), g(x,t) \in C([0,\infty)\times\mathbb{R})$. 若还满足:

(1) 存在定义在 $[0,\infty)$ 上的满足 $\rho(0)=0$ 以及 $\displaystyle\int_{0^+}^{+\infty} \rho(s)ds = \infty$ 的函数 $\rho(s)$, 使得

$$|g(x,t)-g(y,t)| \leqslant \rho(|x-y|), \quad x,y\in\mathbb{R},\ t\geqslant 0;$$

(2) $f_1(x,t) \leqslant f_2(x,t), x\in\mathbb{R}, t\geqslant 0$;

(3) $x_1(0) \leqslant x_2(0)$,

则

$$x_1(t) \leqslant x_2(t), \quad t \geqslant 0 \ \text{ a.s.}$$

1.3 自治扩散过程

设自治扩散过程

$$dX(t) = \mu(X(t))dt + \sigma(X(t))dB(t). \tag{1.3.1}$$

设 L 为自治扩散过程的生成元, 则

$$Lf(x) = \frac{1}{2}\sigma^2(x)f''(x) + \mu(x)f'(x),$$

其中 $f(x)$ 是二阶连续可微函数. 若 $X(t)$ 是 (1.3.1) 的解, 则

$$df(X(t)) = Lf(X(t))dt + f'(X(t))\sigma(X(t))dB(t).$$

给定区间 (a,b). 定义 τ 为扩散过程首次溢出区间 (a,b) 的时刻, 即

$$\tau = \inf\{t>0 : X(t) \notin (a,b)\}.$$

设 T_a 和 T_b 分别为首次到达 a 和 b 的时刻, 即 $T_a = \inf\{t>0 : X(t)=a\}$ (约定 $\inf\varnothing = \infty$). 显然, $\tau = T_a \wedge T_b$.

定理 1.3.1 设 $\sigma(x) > 0$ 为定义在区间 (a,b) 上的连续函数, $X(t)$ 为扩散过程, 且 $X(0) = x, a < x < b$. 则对任意定义在 $\mathbb{R}$ 上的连续可微函数 $f(x)$,

$$f(X(t \wedge \tau)) - \int_0^{t \wedge \tau} Lf(X(s))ds$$

是一个鞅. 于是有

$$E_x\left(f(X(t \wedge \tau)) - \int_0^{t \wedge \tau} Lf(X(s))ds\right) = f(x).$$

扩散过程 $X(t)$ 在到达 a 之前先到达 b 的概率, 即 $P_x(T_b < T_a)$. 此概率的计算可以借助于尺度函数 $S(x)$, 其为如下方程的解

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)S''(x) + \mu(x)S'(x) = 0, \text{ 或者 } LS = 0. \tag{1.3.2}$$

显然, 方程 (1.3.2) 的解为

$$S(x) = \int^x \exp\left(-\int^u \frac{2\mu(y)}{\sigma^2(y)}dy\right)du, \tag{1.3.3}$$

其中有两个未定常数.

引理 1.3.1 设 $X(t)$ 是具有生成元 L 的扩散过程, 且 $\sigma(x) > 0$ 是定义在 $[a,\ b]$ 上的连续函数. 设 $X(0) = x, a < x < b$. 则

$$P_x(T_b < T_a) = \frac{S(x) - S(a)}{S(b) - S(a)}, \tag{1.3.4}$$

其中 $S(x)$ 如 (1.3.3) 所定义.

引理 1.3.2 设 $X(t)$ 是扩散过程 (1.3.1) 的解, 具有非随机初值 $X_0 = x \in \mathbb{R}$. 尺度函数 $S(x)$ 如 (1.3.3) 所定义. 有下列情形:

(a) 若 $S(-\infty) = -\infty, S(+\infty) = +\infty$, 则

$$P\left[\sup_{0 \leqslant t < +\infty} X(t) = +\infty\right] = P\left[\inf_{0 \leqslant t < +\infty} X(t) = -\infty\right] = 1.$$

特别地, 扩散过程 X 是常返的, 即对每个 $y \in \mathbb{R}$ 有

$$P[X(t) = y; 0 \leqslant t < \infty] = 1.$$

(b) 若 $S(-\infty) > -\infty, S(+\infty) = +\infty$, 则

$$P\left[\lim_{t \to +\infty} X(t) = -\infty\right] = P\left[\sup_{0 \leqslant t < +\infty} X(t) < +\infty\right] = 1.$$

(c) 若 $S(-\infty)=-\infty, S(+\infty)<+\infty$, 则

$$P\left[\lim_{t\to+\infty}X(t)=+\infty\right]=P\left[\inf_{0\leqslant t<+\infty}X(t)>-\infty\right]=1.$$

(d) 若 $S(-\infty)>-\infty, S(+\infty)<+\infty$, 则

$$P\left[\lim_{t\to+\infty}X(t)=-\infty\right]=1-P\left[\lim_{t\to+\infty}X(t)=r\right]=\frac{S(r-)-S(x)}{S(r-)-S(-\infty)}.$$

特别地, 若 $\sigma(x)=1$, 即为如下的扩散过程

$$\begin{cases} dX(t)=b(X(t))dt+dB(t), \\ X(0)=x. \end{cases} \tag{1.3.5}$$

假设方程 (1.3.5) 在概率意义下存在唯一解, 且不爆破, 则如下结论成立.

引理 1.3.3 假设 $X(t)$ 是方程 (1.3.5) 的解. 令

$$\gamma(x)=\int_0^x e^{2\int_0^u b(v)dv}du, \quad \lambda(x)=\int_0^x e^{-2\int_0^u b(v)dv}du.$$

若

$$\gamma(-\infty)=-\infty, \quad \gamma(+\infty)<+\infty \quad \text{且} \quad \lambda(-\infty)=-\infty, \quad \lambda(+\infty)=+\infty,$$

则对任意的 $z\in\mathbb{R}$, 有 $\lim\limits_{t\to+\infty}P^x(X_t<z)=1$. 这表明 X_t 依分布趋于 $-\infty$.

1.4 平稳分布

(1) 考虑自治扩散过程 (1.3.1) 的平稳分布.

设扩散过程 (1.3.1) 的初值为 $X(0)$ 具有分布 $\nu(x)=P(X(0)\leqslant x)$. 称分布 $\nu(x)$ 是扩散过程 $X(t)$ 的平稳分布 (或不变分布), 若对任意的 t, $X(t)$ 的分布和 $\nu(x)$ 相同. 若用 $P(t,x,y)$ 表示过程 $X(t)$ 的转移概率函数, 即 $P(t,x,y)=P(X(t)\leqslant y|X(0)=x)$, 则平稳分布 $\nu(x)$ 满足

$$\nu(y)=\int P(t,x,y)d\nu(x).$$

若平稳分布存在密度, 设为 $\pi(x)=d\nu(x)/dx$, 则称 $\pi(x)$ 为平稳 (或不变) 密度. 若 $p(t,x,y)=\partial P(t,x,y)/\partial y$ 表示 $P(t,x,y)$ 的密度, 则平稳分布 π 满足

$$\pi(y)=\int p(t,x,y)\pi(x)dx.$$

定理 1.4.1 若扩散过程 (1.3.1) 的系数 μ 和 σ 是二阶连续可微的, 且其二阶偏导满足 Hölder 条件, 则 (1.3.1) 存在平稳分布当且仅当下面两个条件成立:

1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{x_0} \exp\left(-\int_{x_0}^{x} \frac{2\mu(s)}{\sigma^2(s)}ds\right)dx = \int_{x_0}^{\infty} \exp\left(-\int_{x_0}^{x} \frac{2\mu(s)}{\sigma^2(s)}ds\right)dx = \infty$

2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma^2(x)} \exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{2\mu(s)}{\sigma^2(s)}ds\right)dx < \infty.$

进一步地, 若平稳密度是二阶连续可微的, 则其满足如下的常微分方程:

$$L^*\pi = 0, \quad 即 \quad \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma^2(y)\pi) - \frac{\partial}{\partial y}(\mu(y)\pi) = 0.$$

该方程的解为

$$\pi(x) = \frac{C}{\sigma^2(x)} \exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{2\mu(y)}{\sigma^2(y)}dy\right),$$

其中常数 C 满足 $\displaystyle\int \pi(x)dx = 1$.

(2) 考虑 $X(t)$ 是 E_l (l 维欧几里得空间) 中的一自治 Markov 过程, 其可表示为如下随机微分方程的解:

$$dX(t) = b(X)dt + \sum_{r=1}^{k} g_r(X)dB_r(t). \tag{1.4.1}$$

该方程的扩散阵为

$$\Lambda(x) = (\lambda_{ij}(x)), \quad \lambda_{ij}(x) = \sum_{r=1}^{k} g_r^i(x)g_r^j(x).$$

假设 B: 存在具有正则边界 Γ 的有界区域 $U \subset E_l$ 具有如下性质:

(B.1) 在 U 和它的一些邻域, 扩散阵 $A(x)$ 的最小特征值是非零的.

(B.2) 当 $x \in E_l \setminus U$ 时, 从 x 出发的轨道到达集合 U 的平均时间 τ 是有限的, 且对每个紧子集 $K \subset E_l$ 有 $\sup\limits_{x\in K} E_x\tau < \infty$.

定理 1.4.2 若假设 (B) 成立, 则 Markov 过程 $X(t)$ 存在平稳分布 $\mu(\cdot)$. 令 $f(\cdot)$ 为关于测度 μ 可积的函数. 则对所有的 $x \in E_l$ 成立

$$P_x\left\{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(X(t))dt = \int_{E_l} f(x)\mu(dx)\right\} = 1.$$

注记 1.4.1 定理的证明见文献 [81]. 具体地, 平稳分布的存在性见定理 4.1, P.119 和引理 9.4, P.138. 弱收敛性和遍历性见定理 5.1, P.121 和定理 7.1, P.130.

验证 (B.1) 成立, 只需证明 F 在 U 中是一致椭圆的, 其中 $Fu = b(x) \cdot u_x +$