高等师范院校数学教育类教材

初等代数研究

CHUDENG DAISHU YANJIU

赵思林／著

科学出版社

初等代数研究

赵思林 著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书介绍了初等数学研究方法，对初等代数中几个重要专题（三角、初等函数、不等式、数列、排列组合、导数等）作了探讨。

本书可作为高师本科《初等代数研究》、学科教学（数学）硕士研究生的教材，也可作为高中数学教师和数学爱好者的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

初等代数研究/赵思林著. —北京:科学出版社,2017.6
ISBN 978-7-03-053136-0

Ⅰ.①初… Ⅱ.①赵… Ⅲ.①初等代数-研究 Ⅳ.①O122

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 111583 号

责任编辑：冯 铂/ 责任校对：韩雨舟
封面设计：墨创文化 / 责任印制：罗 科

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

成都锦瑞印刷有限责任公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017 年 6 月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2017 年 6 月第一次印刷 印张：15
字数：400 千字

定价：42.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

/ 赵思林简介 /

内江师范学院教授，硕士，硕士生导师，数学教育教研室主任，教学名师。四川省中青年学科带头人后备人选，四川省高中数学新课程改革学科专。中国数学教育研究会常务理事，全国初等数学研究会常务理事，四川省中学数学教育专委会常务理事、学术委员，内江市数学学会理事长。

主持四川省高等教育教学改革项目1项，主持“2011年四川省高等教育‘质量工程’数学与应用数学专业综合改革”项目的子项目1项，主持“教育部‘本科教学工程’四川省地方属高校第一批本科专业综合改革试点项目——内江师范学院数学与应用数学‘专业综合改革试点’项目（ZG0464）”的子项目1项，主持校级重点科研项目1项、校级教改项目2项。

出版学术专著3部，编著教材6部，参编“十一五”国家级规划教材1部。主讲省级精品课程1门，主持校级精品课程1门。在《数学教育学报》、《数学通报》等刊物发表论文150余篇，2篇论文分获内江市人民政府自然科学优秀论文一、二等奖，核心期刊20余篇，人大复印资料全文转载5篇。至2016年12月指导硕士研究生6人。长期担任“国培计划”培训项目、省级中小学数学骨干教师培训等重大项目的学科首席专家。

2012、2013年被评为“国培计划”优秀首席专家。2016年起，担任《数学教育学报》编委。

资助项目(基金)：

教育部“本科教学工程”四川省地方属高校本科专业综合改革试点项目——内江师范学院数学与应用数学“专业综合改革试点”项目(ZG0464)

四川省“西部卓越中学数学教师协同培养计划”项目(ZY16001)

内江师范学院2016年度校级学科建设特设培育项目(T160009，T160010，T160011)

内江师范学院教材出版基金

前　　言

代数是用字母代替数的简称．初等代数一般是指中学阶段的代数．初等代数主要是研究数系、字母运算(含解析式)、三角、初等函数、方程解法、不等式、数列、排列组合与二项式定理等内容的科学．

初等代数起源于公元前 1800 年左右．1768 年，欧拉发表了《对代数的完整的介绍》，系统介绍了方程理论和其他代数学知识，标志着以方程为中心的初等代数基本成熟．1837 年，德国著名数学家狄利克雷用单值对应思想给出了函数定义，标志着以函数为中心的初等代数的形成．

学习方法决定学习的效果．初等代数研究非常适合研究性学习或探究性学习．当然，这并不是说初等代数的所有内容都适合研究性学习或探究性学习．2000 年 1 月，教育部颁布的《全日制普通高级中学课程计划(实验修订稿)》第一次在基础教育课程中增设"综合实践活动"课程，提出了研究性学习．2001 年 4 月 9 日，教育部颁布的《普通高中"研究性学习"实施指南(试行)》明确指出："研究性学习是学生在教师指导下，从自然、社会和生活中选择和确定专题进行研究，并在研究过程中主动地获取知识、应用知识、解决问题的学习活动．"中学数学的研究性学习要"从自然、社会和生活中选择和确定专题进行研究"这是很不现实的，也是难以做到的．因此，这个界定对中学数学的研究性学习并不实用．我们认为，所谓数学研究性学习，是指学生在教师的指导下，从数学学科内部或其他领域(包括非数学的学科、自然、社会和生活)中选择并确定研究性问题，侧重于该问题在数量关系和空间形式方面的探索和研究，并在探索和研究过程中主动地获取数学知识、应用数学知识、解决数学问题的学习活动．2003 年教育部颁布的《高中数学课程标准(实验)》明确提出了"数学探究"，并指出："数学探究即数学探究性课题学习，是指学生围绕某个数学问题，自主探究、学习的过程．这个过程包括：观察分析数学事实，提出有意义的数学问题，猜测、探求适当的数学结论或规律，给出解释或证明．"从此，数学探究就成了高中数学的一种新的、重要的学习方式．研究或探究是初等代数研究这门课程的中心任务和基本特点，这与进入 21 世纪中学数学课程所倡导的研究性学习的精神是相通的．

本书在撰写过程中力求体现如下特点：

(1)专门介绍了初等数学中几种重要研究方法与案例，介绍了文献法、类比法、质疑法、推广法、实验法等．通过这些研究方法与案例的学习，学生可以初步掌握研究初等数学的"渔"．

(2)突出重点内容的研究．对初等代数中的几个重要专题，如三角、初等函数、不等

式、数列、排列组合、导数(注：导数不是传统的初等代数的内容)等内容作了探讨.

(3)重视疑难问题的研究. 对高中函数定义作了较多富有新意的原创性探讨，纠正了当下高中教材中函数定义的逻辑错误，探讨了函数的本质、函数符号的理解、映射与函数的教学顺序、映射案例等问题. 对初等不等式(包括平均值不等式、柯西不等式、伯努利不等式等)作了较系统的研究.

(4)本书关注了当下高考数学涉及初等代数的主要(重要)疑难专题. 精选了近年来一些高考和自主招生考试中的优秀试题作为研究的典型案例.

(5)每节内容具有相对的独立性，很多节的内容保留了论文的规范格式，为学习者撰写初等代数研究方面的论文提供了样式. 不少内容是著者及同行合作者们多年来未公开发表的研究结果.

(6)对于一些技巧性高、难度大的内容在文前标上了“*”号，读者可以选择性阅读.

(7)每章都配备了一定数量的思考与习题. 其中大量题目是近几年的高考试题.

(8)吸收了近年来《数学教育学报》、《高中数学教与学》(人大复印)、《初中数学教与学》(人大复印)、《数学通报》、《教学与管理》、《中国数学教育》、《中学数学教学参考》、《数学通讯》、《中学数学》、《中学数学杂志》、《中学数学研究》(广州)、《数学教学通讯》、《上海中学数学》、《内江师范学院学报》等期刊的一些研究成果.

需要说明的是，导数是微积分的基本内容，不是传统意义上的初等代数的内容，但现行高中所研究的导数主要以“套公式”为主，因此，本书把导数看成(当成)代数内容.

本书主要内容在高师本科的数学教育类必修课程中使用过十余年，效果良好.

本书主要内容多次作为学科教学(数学)硕士研究生的数学教育类选修课程的内容，效果很好. 以 2014 年四川师范大学与内江师范学院联合招收的学科教学(数学)硕士研究生徐小琴、李秀萍为例，通过这门课程的学习，2016 年徐小琴发表文章 9 篇(含录用稿)，李秀萍发表文章 5 篇(含录用稿).

衷心感谢为本书出版提供有力支持和资助的内江师范学院数学与信息科学学院、学校科研处、教育部“本科教学工程”四川省地方属高校本科专业综合改革试点项目——内江师范学院数学与应用数学“专业综合改革试点”项目(ZG0464)、四川省“西部卓越中学数学教师协同培养计划”项目(ZY16001)、内江师范学院 2016 年度校级学科建设特色培育项目(T160009，T160010，T160011)、内江师范学院教材出版基金；为本书出版付出辛勤劳动的科学出版社的编辑们；为本书出版提供热情帮助的潘超、吴立宝、刘成龙、余小芬、郑凤渊、李建军、姚先伟、李世和、黄兴友、唐芬、刘之兵、李正泉、庹勇等老师，六位研究生徐小琴、李秀萍、王佩、李雪梅、崔静静、胡生兵等；对引用研究成果的作者. 同时也深深感谢关心、支持本书出版的所有同行和朋友们.

著　者

2017 年 1 月

目　录

第一章　初等数学研究方法

数学是研究数量关系和空间形式的科学，研究的基本对象是“数”和“形”.

代数是用字母代替数的简称. 初等代数一般是指中学阶段的代数. 初等代数主要是研究数系、字母运算(含解析式)、初等函数、方程解法、不等式、数列、排列组合与二项式定理等内容的科学.

初等代数起源于公元前 1800 年左右. 1768 年，欧拉发表了《对代数的完整的介绍》，系统介绍了方程理论和其他代数学知识，标志着以方程为中心的初等代数基本成熟. 1837 年，德国著名数学家狄利克雷用单值对应思想给出了函数定义，标志着以函数为中心的初等代数的形成.

代数的主要研究内容是计算(运算). 数学运算是指在明晰运算对象的基础上，依据运算法则解决数学问题的过程. 数学运算包括：理解运算对象、掌握运算法则、探究运算思路、选择运算方法、设计运算程序、获得运算结果、检验运算结果等.

数学运算是解决数学问题的基本手段. 数学运算是一种以“算”为中心的演绎推理，是计算机(器)解决数学问题的基础.

“研究”是《初等代数研究》课程的基本要求、根本特征和主要方法. 据《辞海》(1999 年版)的解释，“研究”是指“用科学的方法探求事物的本质和规律。”“研”字是由“石”和“开”构成的，即“研＝石＋开”，“研”的意思是把石头划开，意指将研究对象划分成一个个更小的相对独立的部分或要素(元素). 因此，“研”字含有分类或划分的意思. 研究就是多角度的思考问题，探索并寻找问题解决的方法与途径，并用多种不同方法使问题获得解决. 对中学生而言，研究是指一切独立地探索问题、分析问题和解决问题的活动，包括实验、观察、比较、分析、操作、探索、尝试、假设、估算、猜想、验证等.

数学研究的核心是数学探究.《高中数学课程标准(实验)》对“数学探究”作了明确界定，指出“数学探究即数学探究性课题学习，是指学生围绕某个数学问题，自主探究、学习的过程. 这个过程包括：观察分析数学事实，提出有意义的数学问题，猜测、探求适当的数学结论或规律，给出解释或证明.”据《辞海》(1999 年版)的解释，“探究”是指“深入探讨，反复研究”，从汉字的字义来看，“探”的本义是“试图发现(隐藏的事物或情况)”，“究”的本义是“仔细推究；追查”.

关于数学研究的境界，华罗庚认为有四种境界，也就是四个层次，即照葫芦画瓢地模仿，利用现成方法解决几个新问题，创造方法解决问题，开辟新的方向.

第一节 数学探究

普通高中数学课程标准(征求意见稿)指出：

数学探究活动是围绕某个具体的数学问题，开展自主探究、合作研究并最终解决数学问题的过程．具体表现为：发现和提出有意义的数学问题，猜测合理的数学结论，提出解决问题的思路和方案，通过自主探索、合作研究论证数学结论．数学探究活动是运用数学知识解决数学问题的一类综合实践活动，也是高中阶段数学课程的重要内容．

“数学建模活动”和“数学探究活动”以课题研究的形式开展．在必修课程中，要求学生完成一个课题研究，可以是“数学建模”的课题研究，也可以是“数学探究”的课题研究．课题可由教师给定，也可以由学生与教师协商确定．课题研究的过程需包括选题、开题、做题、结题四个环节．学生需要撰写开题报告，教师要组织开展“开题”交流活动，开题报告应包括选题的意义、文献综述、解决问题思路、研究计划、预期结果等．“做题”就是解决问题的过程，包括描述问题、数学表达、建立模型、求解模型、得到结论、反思完善等过程．“结题”包括撰写研究报告和报告研究结果，由教师组织学生开展结题答辩．根据选题的内容，报告可以采用专题作业、测量报告、算法程序、制作的实物或研究论文等多种形式．对于研究报告的评价，教师可以组织评价小组，可以邀请校外专家、社会人士、家长等进行评价．研究报告及其评价应当作为文件存入学生个人学习档案，为大学招生提供参考和依据．学生可以采取独立的方式或者小组合作的方式，完成课题研究．

在课题研究过程中，逐步提升数学建模、数学抽象、数据分析、数学运算、逻辑推理和直观想象素养．

数学探究是个体以数学问题解决为目标指向的认知活动．

一般认为，对高中学生而言，通常讲的探究是指广义的探究．广义的探究是指一切独立分析和解决数学问题的活动，包括分析数学现象、提出数学问题、猜想数学命题、发现数学规律、顿悟解题思路、探求问题结论、证明数学命题等．

问题探究教学应注意以下几方面[①]：

(1)选好问题．这是因为好问题能够启迪学生思维，激发学生的探究意识，活化学生的思维过程，并产生创造性思维．

(2)问题的难度要适中．若问题过于容易，“不用跳，就摘到”，学生就会感到没劲；若问题太难，“跳一跳，摘不到”，学生就难以感受到成功；若问题难度适中，“跳一跳，摘得到”，学生就会感到有劲并获得成功体验．

(3)选好探究(研究)的视角．以探究(研究)高考数学试题为例，其探究(研究)的视角很多，一般可选择试卷的布局、试题的立意、试题的背景、试题的解法、试题的推广、

① 赵思林．感受的心理过程对数学教学的启示［J］．数学教育学报，2011，20(3)：7－11．该部分被人大复印《高中数学教与学》2011 年 10 期全文转载．

试题的改编和试题的评价等角度，但对学生而言，可以重点研究试题的立意、试题的解法、试题的推广等问题，学生对试卷的布局、试题的背景、试题的改编、试题的评价等问题了解即可，对试题的推广应适可而止.

(4)重视学生的自主探究. 自主探究应包括探求问题的条件或问题的结论，探讨诸条件之间的逻辑关系，探寻问题解决的思路，探索数学现象的内在规律等.

第二节　文献法和类比法

数学研究分为归纳研究和演绎研究. 从个别或某类事例出发，经过探索得到一般结论的探究是归纳研究. 从一般到个别或某类事物的探究就是演绎研究. 研究的内容应该是教师备课时精心准备的典型问题、学生在研究和讨论中有普遍意义的问题，研究的时间应由具体情况确定.

数学研究方法很多，主要有文献法、类比法、质疑法、推广法、实验法、改进法等. 下面重点谈谈文献法、类比法、质疑法、推广法等.

一、文献法

文献法就是利用知网、维普网、期刊、著作、影像、图片、视频等进行研究的方法. 面对研究的数学问题，首先应收集涉及该数学问题的相关文献，然后对相关文献进行分类与整理，接着是认真研读这些文献，并做文献综述，很主要的工作是分析文献中的问题与不足，最后结合面对的数学问题重新确定研究的问题(课题). 如果用自己已掌握的数学知识、数学方法、数学思想不能解决面对的数学问题，这时需要先学习相关数学理论，这也需要去研读相关文献(期刊、书籍). 除一些原创性研究、实验研究和实践性研究外，一般来说，文献法是任何研究的基础. 也就是说，任何研究都基于文献. 文献是知识、方法、思想、经验、资源、成果的主要来源，也是发现并提出研究性问题的重要资源. 利用文献可以避免或减少重复研究.

用文献法研究的某个数学问题(课题)，一般经过下载论文——研读论文——精选论文——精读论文——文献综述——思考质疑——发现并提出新问题——探究问题——解决原(新)问题等步骤，可以在中国知网或维普网或人大复印网下载相关论文 50～200 篇，然后初读一遍，接着精选 10～20 篇文章，精选的文章一般应具有系统性(一般需要 3 个版面及以上)、思想性、启发性、实用性、研究性等特点，再接着是对精选出的文章进行分类(分类实质上是研究)，接下来是学习领会这些文章中的数学知识、方法、思想，在此基础上，通过思考、探究、猜测、质疑等，发现并提出新的数学问题，对新的数学问题开展初步探究，获得研究结果(成果)，这样做研究的效率就比较高. 文献综述是做课题开题报告最核心的工作，一般是先写国外、后写国内，先写古代、后写现代、最后写当代，先介绍伟大人物、再介绍知名人物和一般人物、最后介绍自己的研究情况. 文献综述包括“述”(陈述别人的文献成果)、“评”(评价他人文献的价值和问题)和“说”

(说自己的研究成果或情况).

二、类比法

类比(即类比法)是发现数学真理、解决数学问题的重要思维方法. 类比是根据两个(或两类)对象之间某些方面的相似或相同，从而推断出它们在其他方面的相似或相同的一种逻辑推理方法. 类比法是类比推理的简称. 类比法是从特殊到特殊的一种逻辑推理方法. 如把等差数列的性质(结论)推广到等比数列上去就是类比，把椭圆的性质(结论)推广到双曲线或抛物线上去也是类比，把平面几何的性质(结论)推广到立体几何或射影几何或分形几何上去还是类比.

类比法有很多，如概念类比、性质类比、系统类比、方法类比、迁移类比、结构类比、维数类比等.

第三节 质疑法及案例

质疑批判精神是任何创新人才必备的和重要的基本特征. 没有质疑就难有创新. 质疑是创新的源泉. 质疑是点燃创新的火花. 质疑是对已有结论的怀疑或疑惑. 质疑有助于反思. 质疑有三种作用，一是通过质疑可以找到别人和自己的疏漏或谬误；二是通过质疑可能找到更好的研究思路和发现更好的解决问题的方法；三是通过质疑还可能发现并提出新的问题. 大家知道，提出新的问题，提出新的观点，给出新的解释，尝试新的方法，提供新的方案等，这些都饱含创新因素. 因此，质疑蕴含创新，质疑催化创新. 一般认为，质疑引发思考，思考产生问题，问题推动探究，探究获得成果(结果).

案例分析

质疑法案例 1：对正切半角公式的质疑[①]

一、问题背景

先看：人教社《普通高中课程标准实验教科书(A 版)数学 4》[②] 第 139 页中的

例 1 试以 $\cos\alpha$ 表示 $\sin^2\frac{\alpha}{2}$，$\cos^2\frac{\alpha}{2}$，$\tan^2\frac{\alpha}{2}$.

① 本案例作者：赵思林，黄兴友. 发表在《中学数学》2011 年 6 期上，原题目是“由正切半角公式引发的问题与思考”.

② 刘绍学，章建跃. 普通高中课程标准实验教科书数学 4(A 版)［M］. 第 2 版. 北京：人民教育出版社，2007.

在教材的 139 页右边又写道：

例 1 的结果还可以表示为

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \tag{1}$$

并称之为半角公式(不要求记忆)，符号由$\frac{\alpha}{2}$所在象限决定.

该教材第 142 页的练习第 1 题是：

求证 $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$ (2)

此节内容讲完后，很多老师将(1)、(2)统一起来，很自然地总结出下面的公式：

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} \tag{3}$$

注：我们在听课时，发现有几位老师在黑板上写出了(3)，学生在笔记本上也记下了(3).

自然要思考：(1)、(2)能统一吗？(1)、(3)正确吗？(1)可以改动吗？

二、几点思考

(一)(3)是不正确的

(3)不正确只需由$\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$的不正确来说明. 事实上，

$$\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\Leftrightarrow\pm\sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$\Leftrightarrow\pm\frac{|\sin\alpha|}{1+\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}. \tag{4}$$

显然，(4)的左边一般都取两个值，而其右边只能取一个值. 比如，α 为锐角，(4)变为$\pm\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$，此式显然不成立. 所以(4)是错误的，故(3)是不正确的.

由该教材可知，$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$中的“符号由$\frac{\alpha}{2}$所在象限决定”. “符号由$\frac{\alpha}{2}$所在象限决定”应理解为，符号的取法需要对$\frac{\alpha}{2}$所在象限分类讨论. 事实上，根据$\frac{\alpha}{2}$所在象限的不同情况，公式(1)实质上对应着下列三种情况之一：

$\tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$ (当$\frac{\alpha}{2}$在第一、三象限时)，

$\tan\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$ (当$\frac{\alpha}{2}$在第二、四象限时)，

$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$（当$\frac{\alpha}{2}$在第一、二、三、四象限时）.

因此，如果孤立地看(1)，那么(1)是不正确的.

其实，该教材的本意是，将(1)和“符号由$\frac{\alpha}{2}$所在象限决定”结合起来看，有上面列举的三种情况. 至此推知，(1)、(2)是不能统一的.

造成(3)的错误的原因是，老师和学生漏掉了教材上$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$的“符号由$\frac{\alpha}{2}$所在象限决定”这一极为重要的条件.

（二）建议改写半角公式

从学生学习心理的角度来看，由于记条件需要增加更多的“编码”或“组块”，因而，学生记忆公式一般不爱记条件. 因此，我们建议，今后在修订教材时将半角公式改写为

$$\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},\left|\tan\frac{\alpha}{2}\right|=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}},$$

这三个公式称为半角公式，不要求记忆.

（三）教学建议

在听课时我们发现一些老师对半角公式讲得多(30 分钟左右)，个别老师还要求记住错误公式(3)，而高中课标对半角公式的要求是很低的，从而，一些老师人为地拔高教学目标，增加教学难度，延长教学时间，从而加重了学生学习负担. 可见，认真研读并准确把握《高中课标》是有效实施高中新课改的前提，准确理解教材是保证教学科学性的前提.

质疑法案例 2：从基本不等式的质疑引出的探究[①]

现行高中数学教材中不等式一章将基本不等式$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}\,(a>0,\ b>0)$[②]作为独立的一节，其重要性可见一斑. 该不等式在高考中常常与数列、解几何、函数、导数等主干内容交汇，出现了许多试题，这表明，这个不等式有广泛的应用，是重要的考点，故在教学中应予重视.

一、基本不等式的质疑

现行教材用“基本”来形容该不等式的重要性，在说法上更值得考究. 重要的数学知识是有用的、有意义的. 基本不等式不仅是有用的、有意义的，还是基础性的、本源性的[③]. 不少文章对此不等式冠上“基本”的称谓作了赞赏式的评价. 这个不等式能不能

---

① 本案例作者：赵思林，徐小琴，李秀萍. 刊登在《中学数学杂志》(高中)2017 年第 5 期.
② 刘绍学. 普通高中课程标准实验教科书数学 5(必修)(A 版)［M］. 北京：人民教育出版社，2007.
③ 袁素群，徐章韬. 重要不等式为何要改为基本不等式［J］. 湖南教育 C：下旬，2016(6)：37-39.

冠上“基本”的称谓呢？先看《辞海》对“基本”的解释：“根本；根本的；主要的；大体上.”如果从“主要的”“大体上”这两个词义来看，称为“基本”应该说得过去；如果从“根本”“根本的”这两个词义来看，加之“基本”主要取义是“根本”或“根本的”，从而，对此不等式冠上“基本”的称谓就值得商榷了.

按照文献①的解释，“基本”含有“基础”“本源”的意思，又注意到“根本”和“根本的”都有一个字“根”，“根”显然含有“起始”或“根基”的意思，此不等式是不是不等式的“根(基)”，是不是不等式的“本源”呢？显然不是. 现将理由叙述于下.

不等式“$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}\,(a>0,\ b>0)$”与“$a^2+b^2\geqslant 2ab(a,\ b\in\mathbf{R})$”相比，哪一个更基本呢？当然是后者. 因为前者需要学了二次根式(算术根)后才能理解，即是说到了初二学生才能理解，而后者不学二次根式(算术根)就能理解，即是说初一学生也能理解，所以，后者更基本.

又拿不等式“$a^2+b^2\geqslant 2ab(a,\ b\in\mathbf{R})$”与“$a^2\geqslant 0(a\in\mathbf{R})$”相比，哪一个更基本呢？当然仍是后者. 这是因为后者可以推出前者.

通过上述分析，研究者建议，把不等式“$a^2\geqslant 0(a\in\mathbf{R})$”作为基本不等式.

二、几个不等式之间关系的探究

命题 1 若 $a\in\mathbf{R}$，则 $a^2\geqslant 0$.

证明：由 $a\in\mathbf{R}$，知 a 的取值符号有三种情况，即 $a>0$；$a=0$；$a<0$.

当 $a>0$ 时，$a^2=a\times a>0$(两个正数相乘其乘积为正数)；

当 $a=0$ 时，$a^2=a\times a=0$；

当 $a<0$ 时，$a^2=a\times a>0$(“负负得正”).

综上，总有 $a^2\geqslant 0$.

在这个“证明”过程中，需要用到分类讨论. 如果追问：为什么“两个正数相乘其乘积为正数”？为什么“负负得正”？这两个问题容易回答吗？是不容易回答的. 由此看来，命题 1 的正确性并非是显然的. 从公理化思想方法的角度来看，命题 1 甚至可以作为(看成)不等式的一条公理.

命题 2 若 $a,\ b\in\mathbf{R}$，则 $a^2+b^2\geqslant 2ab$.

命题 3 若 $a>0,\ b>0$，则$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$.

易知，命题 1⇒命题 2. 事实上，由 $a,\ b\in\mathbf{R}$，知 $a-b\in\mathbf{R}$. 由命题 1 知，$(a-b)^2\geqslant 0$，展开并移项，即得命题 2.

易知，命题 1⇒命题 3. 事实上，由 $a>0,\ b>0$，知$\sqrt{a},\ \sqrt{b}\in\mathbf{R}$，从而$\sqrt{a}-\sqrt{b}\in\mathbf{R}$. 由命题 1 知，$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0$，展开并移项，得 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$，两边除以 2 即得命题 3.

易知，命题 2⇒命题 3. 事实上，由 $a>0,\ b>0$，知$\sqrt{a},\ \sqrt{b}\in\mathbf{R}$，

$$\frac{a+b}{2}=\frac{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2}{2}\geqslant\frac{2\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}}{2}=\sqrt{ab}.$$

① 袁素群，徐章韬. 重要不等式为何要改为基本不等式 [J]. 湖南教育 C：下旬，2016(6)：37-39.

综上表明，命题 1 可以推出命题 2，命题 1 和命题 2 均可以推出命题 3. 这从逻辑上再一次说明，命题 1 是最基本的. 因此，把命题 1 叫做基本不等式是合理的.

定义：不等式 $a^2\geqslant 0(a\in\mathbf{R})$叫做基本不等式.

需要说明的是，不等式"$a^2+b^2\geqslant 2ab(a,\ b\in\mathbf{R})$"和"$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}(a>0,\ b>0)$"都是很有用并且是经常用的. 为使用时称呼方便，可以给它们取个名：

不等式"$a^2+b^2\geqslant 2ab(a,\ b\in\mathbf{R})$"叫做重要不等式；

不等式"$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}(a>0,\ b>0)$"叫做(二元)算术－几何平均值不等式，简称平均值不等式或均值不等式.

至此，关于基本不等式的概念已弄清楚了. 但可能还有老师会认为，命题 1 太简单了，没有多少实用价值. 命题 1 看上去的确是很简单，但它有深刻的内涵，并有广泛的应用，如下面将看到运用基本不等式 $a^2\geqslant 0(a\in\mathbf{R})$可以推导或发现算术－几何平均值不等式、伯努利不等式、柯西不等式等. 这说明，基本不等式反映了不等式的本质，是建构不等式理论体系的重要根基. 从最简单的命题出发，演绎推导出许多"新"的命题(结论)，这是演绎推理的巨大魅力所在，也是数学理性文明的体现. 正如姜伯驹院士所说："最简单的东西，往往也是最本质、最基本的东西，通过对简单的把握，建立思维体系，通过推理，得出的结果往往是惊人的. 这就是数学思维，是科学精神."①

三、基本不等式 $a^2\geqslant 0(a\in\mathbf{R})$推导几个著名不等式

(一)推导重要不等式 $a^2+b^2\geqslant 2ab(a,\ b\in\mathbf{R})$

在第二部分已解决.

(二)推导二元算术－几何平均值不等式$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}(a>0,\ b>0)$

在第二部分已解决.

(三) 推导(发现)伯努利不等式 $x^n\geqslant nx-n+1(x>0,\ n\in\mathbf{N}_+,\ n>1)$

设 $x>0$，则$(x-1)^2\geqslant 0$，从而，$x^2-2x+1\geqslant 0$，

所以 $x^2\geqslant 2x-1$. 这是 $n=2$ 时的伯努利不等式.

反复用 $n=2$ 时的伯努利不等式可以推出下列不等式：

设 $x>0$，则有

$x^3=x\cdot x^2\geqslant x\cdot(2x-1)=2x^2-2x\geqslant 2(2x-1)-x=3x-2$；

$x^4=x\cdot x^3\geqslant x\cdot(3x-2)=3x^3-2x\geqslant 3(2x-1)-2x=4x-3$；

$x^5=x\cdot x^4\geqslant x\cdot(4x-3)=4x^2-3x\geqslant 4(2x-1)-3x=5x-4$；

…

由此归纳

猜想：$x^n\geqslant nx-n+1(x>0,\ n\in\mathbf{N}_+,\ n>1)$.

① 杨慧娟. 数学教育价值的重新审视——姜伯驹先生谈数学课程改革［J］. 数学教育学报，2010，19(4)：96-97.