“十三五”国家重点出版物出版规划项目

经济科学译丛

线性与非线性规划

（第四版）

戴维·G. 卢恩伯格（David G. Luenberger）
叶荫宇（Yinyu Ye）
著

Linear and Nonlinear Programming

(Fourth Edition)

中国人民大学出版社

"十三五"国家重点出版物出版规划项目

经济科学译丛

线性与非线性规划

（第四版）

戴维·G.卢恩伯格（David G. Luenberger）
叶荫宇（Yinyu Ye）
著

韩 松 魏二玲 张春华 等 译

Linear and Nonlinear Programming

(Fourth Edition)

中国人民大学出版社

·北京·

图书在版编目（CIP）数据

线性与非线性规划/（　）戴维·G. 卢恩伯格，（　）叶荫宇著；韩松等译. —4版. —北京：中国人民大学出版社，2018.4
（经济科学译丛）
ISBN 978-7-300-25391-6

Ⅰ.①线… Ⅱ.①戴…②叶…③韩… Ⅲ.①线性规划②非线性规划 Ⅳ.①O221

中国版本图书馆CIP数据核字（2018）第008503号

“十三五”国家重点出版物出版规划项目
经济科学译丛
线性与非线性规划（第四版）
戴维·G. 卢恩伯格
叶荫宇 著
韩　松　魏二玲　张春华　等译
Xianxing yu Feixianxing Guihua

出版发行	中国人民大学出版社		
社　址	北京中关村大街31号	邮政编码	100080
电　话	010－62511242（总编室）		010－62511770（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com（人大教研网）		
经　销	新华书店		
印　刷	北京昌联印刷有限公司		
规　格	185mm×260mm 16开本	版　次	2018年4月第1版
印　张	27.75 插页2	印　次	2018年4月第1次印刷
字　数	634 000	定　价	79.80元

《经济科学译丛》

《经济科学译丛》总序

中国是一个文明古国，有着几千年的辉煌历史。近百年来，中国由盛而衰，一度成为世界上最贫穷、落后的国家之一。1949 年中国共产党领导的革命，把中国从饥饿、贫困、被欺侮、被奴役的境地中解放出来。1978 年以来的改革开放，使中国真正走上了通向繁荣富强的道路。

中国改革开放的目标是建立一个有效的社会主义市场经济体制，加速发展经济，提高人民生活水平。但是，要完成这一历史使命绝非易事，我们不仅需要从自己的实践中总结教训，也要从别人的实践中获取经验，还要用理论来指导我们的改革。市场经济虽然对我们这个共和国来说是全新的，但市场经济的运行在发达国家已有几百年的历史，市场经济的理论亦在不断发展完善，并形成了一个现代经济学理论体系。虽然许多经济学名著出自西方学者之手，研究的是西方国家的经济问题，但他们归纳出来的许多经济学理论反映的是人类社会的普遍行为，这些理论是全人类的共同财富。要想迅速稳定地改革和发展我国的经济，我们必须学习和借鉴世界各国包括西方国家在内的先进经济学的理论与知识。

本着这一目的，我们组织翻译了这套经济学教科书系列。这套译丛的特点是：第一，全面系统。除了经济学、宏观经济学、微观经济学等基本原理之外，这套译丛还包括了产业组织理论、国际经济学、发展经济学、货币金融学、公共财政学、劳动经济学、计量经济学等重要领域。第二，简明通俗。与经济学的经典名著不同，这套丛书都是国外大学通用的经济学教科书，大部分都已发行了几版或十几版。作者尽可能地用简明通俗的语言来阐述深奥的经济学原理，并附有案例与习题，对于初学者来说，更容易理解与掌握。

经济学是一门社会科学，许多基本原理的应用受各种不同的社会、政治或经济体制的影响，许多经济学理论是建立在一定的假设条件上的，假设条件不同，结论也就不一定成立。因此，正确理解与掌握经济分析的方法而不是生搬硬套某些不同条件下产生的结论，才是我们学习当代经济学的正确方法。

本套译丛于 1995 年春由中国人民大学出版社发起筹备并成立了由许多经济学专家学者组织的编辑委员会。中国留美经济学会的许多学者参与了原著的推荐工作。中国人民大学出版社向所有原著的出版社购买了翻译版权。北京大学、中国人民大学、复旦大学以及中国社会科学院的许多专家教授参与了翻译工作。前任策划编辑梁晶女士为本套译丛的出版做出了重要贡献，在此表示衷心的感谢。在中国经济体制转轨的历史时期，我们把这套译丛献给读者，希望为中国经济的深入改革与发展做出贡献。

《经济科学译丛》编辑委员会

中文版序

卢恩伯格教授的《线性与非线性规划》自 1973 年第一版出版以来，广受好评，几十年来一直是北美多个高校的教学用书和很多科研人员的参考用书。及至 2008 年的第三版（及 2016 年的第四版），我应卢恩伯格教授的邀请参与更新此书，在书中加入了新的优化理论前沿知识，例如在第三版的多个章节里加入了内点算法的介绍和理论分析，在第四版里引入了一些较新的优化算法和模型以及应用案例等。

近年来中国运筹学的发展一直很快，国内也有很多优秀的教材出版。但总体来看，覆盖领域和时间范围广泛、知识层次由浅入深且能即时反映研究前沿成果的中文教材不是太多。此次为了增加此领域中文资料的丰富性，韩松教授率领团队历时数年，经过了大量的辛苦工作，将我们的书籍翻译为中文版，而我因为工作忙碌，一直未能跟进交流。今蒙韩松教授相告，方知已经事毕全功，深感欣慰，同时也对韩松教授团队的坚持与努力深表钦佩与感谢。

该中文版本的面世正逢一个言必称优化的时代。在过去的十年间，我们目睹了数据科学与人工智能的兴起带动社会经历着一个深刻的变革。而我个人认为，这一切的助推引擎该归功于硬件、算法和数据。正是因为计算机硬件与算法有了突飞猛进的发展，人们才可以对快速积累的海量数据做出处理和分析，指导人类的预测与决策能力，并且使之大幅提高。而主动力的来源之一就是运筹学界长期以来对于优化建模和算法的孜孜不倦的研究。

过去几年，中国对于运筹学的重视达到了一个前所未有的高度。很多关乎国计民生的实业也开始大规模引入运筹学的理论来指导生产与管理，优化的人才也受到了高度重视。总体而言，我们要走的路还很长，无论是理论还是实践，都还有很多基础性缺失需要补足和提高。希望此书的出版可以为国内优化学界的学生与教师提供一些参考与借鉴，为中国运筹学的发展尽到绵薄之力。

叶荫宇

2018 年 4 月 7 日于斯坦福大学

前　言

本书是涵盖最优化技术的主要概念的教科书，可用于具有工程、数学和科学背景的本科生或研究生的课堂教学或工作人员自学。正如包含很多古典问题的最优化领域本身一样，本书对于系统分析员、运筹学者、数字分析师、管理科学家和许多其他行业需要实施最优化应用的专家来说，将非常有用。使用本书时需要的数学基础相对较少，只需要基本的线性代数知识。某些章节和专题确实需要更多的线性代数知识，例如特征向量分析或实数集合的知识，但是本书的主体结构确实不依赖于这些高深的数学知识。

虽然本书包含的主要内容是一些经典内容，但我们也力图反映现代理论的核心。所以本书的结构不是简单地罗列技术和方法，而是给出学习现有知识和发展新结果的方法。这种结构的一个主要特点是，将最优化问题的纯理论分析性质（如必要条件）和用于求解问题的实际算法相结合。这包含了本书第一版的主要内容，第四版进一步推广并加深了这种关系。

与早期的版本一致，第四版也分为三部分。第 1 部分是相对独立的线性规划介绍，这是优化理论的关键内容之一。这部分内容是相对常规的介绍，包括线性规划的主要理论、一些有效的数值算法和大量的重要应用。第 2 部分与第 1 部分是独立的，是无约束最优化问题的基础理论，包括最优化条件的推导和基本算法介绍。本书的这一部分探索一般的代数性质并定义各种收敛性。第 3 部分将第 2 部分的概念推广到约束最优化问题。除了几个独立的小节外，这部分也与第 1 部分独立。所以可以越过第 1 部分，直接进入第 2 部分和第 3 部分。事实上，很多大学就是这样做的。本书的每个部分都有足够的内容讲授四分之一学期。无论是课堂教学还是自学，都不要错过了章后习题。每一个章后习题都包含三种类型：检验是否掌握某一算法的计算习题，检验是否理解了理论发展的理论性习题，以及包括新应用和新发展的推广习题。学习者每章至少应该做四五道习题。在使用本书的过程中，不必每一部分都学习。一般地，读者都希望略过一些不重要的章节。所以我们将一些特别的或者关联不大的章节加了星号（*）。

这一版新加入的内容是第 6 章——锥线性规划，这是线性规划理论的一个重要扩展。一般线性规划的约束集由定义在有限维向量空间的有限个线性不等式决定，而锥线性规划的约束集可以拓展，例如，可以由给定维数的对称半正定矩阵的线性组合决定。必须承认，锥线性规划是一个前沿问题，需要进行特殊的研究。

本书另一个重要的问题是加速最速下降法，它具有超级收敛性质，因此，使用越来越广泛。经典最速下降法和加速最速下降法的收敛性质的证明都在第 8 章中给出。

随着最优化领域的发展，它强调更多的复杂性，处理更多变量的问题（例如大数据环境下），涵盖各种应用。为回应这些挑战，它发展新算法，编制有效的软件，扩展全面的理论。一个非常有价值的新发展是关于大数据问题的工作。令人惊奇的是，坐标下降法（就是在每一步都随机选择坐标）是非常有效的，这在第 8 章介绍。另外一个例子是，一些问题可以被模型化从而使得未知变量分为两组，线性约束和目标函数关于两组变量是可分的。广义拉格朗日方法可以用于计算，当然还有一些其他方法。在第 14 章，我们将讨论带有乘子的交替方向法作为对偶方法。有意思的是，这个方法只对于分为两组的情况是收敛的，而对于其他分组并不收敛。

我们感谢这么多年来使用本书的学生和研究人员，他们给出了许多好的建议，也感谢那些鼓励我们出版新版的人。

戴维 · G. 卢恩伯格
叶荫宇
于斯坦福
2015 年 1 月

目　录

第 1 章 引 言

1.1 最优化问题

最优化目前成为分析许多复杂决策问题和配置问题的基础工具。它在很大程度上给出了难以解决问题的完美解释，并且给出了必要的简化。应用最优化技术，我们可以解决复杂的决策问题，比如，大量无关变量值的选取可以通过将大量行为决策设计为单一目标来实现。在决策变量值的选择的约束条件下，最大化（或最小化，依赖于不同问题）这一单一目标。如果问题的某一特性可以由一个目标来表示，如商业利润或损失、物理问题的速度或距离、风险投资的预期收益或者政府计划的社会福利，最优化将为分析提供一个可行的方法。

当然，在很少情况下，模型可以代表所有变量的复杂关系、约束条件以及复杂决策问题的目标。因此，和所有分析的量化方法一样，一个具体的最优化模型只能被看作现实问题的近似。在建立模型时，我们需要抓住问题的本质，良好地评判结果才能得到有意义的结论。所以，最优化应该被看作总结和分析的工具，而不是被看作得到真正正确的结论的原理。

我们可以通过具体的实践操作以及对相关理论知识体系的深刻理解来加强关于问题表述的建模能力和结果阐释的解读能力。当我们建模时，需要权衡利弊，决定模型的复杂程度。既要保证模型的复杂度可以使模型足够精确地描述了问题，又要保证模型的具体计算不让人望而生畏。优秀的建模者可以灵活地处理这个问题。如果我们希望成为这种高人，就必须通过大量具体例子的实践来训练识别和捕捉问题主要方面的技能。我们还需要学习相关的理论和处理技巧，进而学会怎样从现有理论方法推广出适用于不同问

题的新框架，这样我们才能准确区分可求解的模型和不可求解的模型。

本书集中讨论两类特殊的最优化分析框架——线性规划和非线性规划。可以用这两种分析框架表述的问题在书中大量出现，这些例子可以帮助读者感受、理解、掌握如何将实际问题有效地纳入数学分析的框架。本书主要讨论解决不同种类最优化问题时，使用的算法工具的发展、具体操作方法以及不同工具的比较。这么安排不仅可以帮助大家掌握算法工具、掌握求解问题的具体方法，而且可以帮助大家发现不同问题下最有效的解决问题的方式，提升我们的建模技巧。

1.2 问题的分类

本书内容可分为三部分：线性规划、无约束问题、有约束问题。后两部分共同构成了非线性规划的内容。

□ 线性规划

线性规划无疑是一种表述大量规划问题最自然、最简便的方法。正如“线性规划”四字所揭示的，目标函数关于各个自变量是线性的，同时约束条件是关于自变量的线性等式或不等式。熟悉线性代数的人可能会认为线性规划之所以广受欢迎是因为它的数学基础更简洁、相关理论更丰富、具体操作更简单。然而，事实上，这些都不是主要原因。从数学工具储备和可操作性的角度看，许多最优化问题同样拥有简洁的数学表述和大量的求解工具。事实上，线性规划受欢迎更多的是由于表述问题的自然需要，而非基于可求解性方面的考虑。首先，大量实际问题转化为数学语言后确实表现为线性规划形式。例如，我们要描述如下问题：一个拥有一定量货币的个体需要对将钱花在两种商品上作决策，则约束条件可被表示为 $x_1+x_2\leqslant B$，其中 x_i （$i=1$，2）分别是对两种商品投入的货币数量，B 是总预算。如果此人的目标是最大化两种商品的总重量，则目标函数可被表示为 $\omega_1x_1+\omega_2x_2$，其中 ω_i （$i=1$，2）分别是商品 i 的单位重量。于是整个问题可以被写为

$$
\begin{aligned}
&\max\ \omega_1x_1+\omega_2x_2\\
&\text{s. t. } x_1+x_2\leqslant B\\
&\qquad\quad x_1\geqslant 0, x_2\geqslant 0
\end{aligned}
$$

这就是最基础的线性规划问题。约束条件是线性的这一条件在本例中是自然抽象出来的，它并不是某个更复杂的函数形式的线性近似。

线性形式的目标和约束条件在数学建模时受到青睐的另一个原因是它的定义最简单。即使由于内在的定义，函数不是纯粹线性的，我们也很难定义其他更复杂的函数形式并让他人相信更复杂的形式要优于线性形式。因此，由于其简洁性，线性规划被当作捷径，同时，一般来说，它也是在一大类相似问题中可以同等适用（或同等不适用）的一种函数形式。

当然，理论方面和计算方面在线性规划问题中确实占有一定的特殊地位——最重要

的就是单纯形法。这一算法工具我们在第 2 章和第 3 章介绍。更近代的内点理论本质上是非线性的，我们在第 5 章介绍。

□ 无约束问题

无约束的最优化问题不存在对自变量之间关系的约束的描述，这看似在有实际背景的问题中不能广泛适用。然而实际情况正相反。这主要是因为两点：第一，所有有约束问题在更一般的框架下讨论时都能变成无约束问题，换言之，约束代表了探讨问题框架的人为限制，如果去掉这些限制，我们可以回到无约束问题。因此，例如，预算约束不是有实际意义的最优化问题的特征；以一定利率获得资金支持总是可能的，所以每当出现预算约束时，我们可以通过在目标函数中添加财务成本这一自变量的方法消去这个约束。同样地，其他资源约束条件也可以通过纳入相应成本自变量（无论多大）的方法消去。

第二，许多有约束问题可以被转化为一个对应的无约束问题。例如在等式约束下，等式约束的唯一作用是通过等式将一个自变量表示为其他自变量的函数来限制自由度。这种关系有时可以显式地表达出来，将其代入目标函数，就能得到新的无约束问题，新问题的变量数等于实际自由度。举一个简单的例子：形如 $x_1+x_2=B$ 的约束可以在目标函数中通过替换 $x_2=B-x_1$ 而消去。

无约束问题除了代表很重要的一类最优化问题外，也为我们研究更复杂、更一般的有约束问题奠定了基础。在学习有约束问题之前，许多理论上、算法上的结果首先是通过无约束问题引出并确定的。

□ 有约束问题

尽管如此，有许多实际问题确实是以有约束问题的形式出现的。这是因为许多复杂问题，例如一个大公司具体的生产计划、庞大政府机构的政策甚至复杂器械的设计，无法直接考虑所有备选方案以整体求解，它们需要被分解成独立的子问题，而为了将子问题从更大的问题背景中分离出来，就不得不引入约束。因此，我们经常会遇到一般非线性约束数学规划问题。

一般数学规划问题可以表示为

$$
\begin{aligned}
&\min f(\boldsymbol{x})\\
&\text{s. t. } h_i(\boldsymbol{x})=0, i=1,2,\cdots,m\\
&\qquad g_j(\boldsymbol{x})\leqslant 0, j=1,2,\cdots,p\\
&\qquad \boldsymbol{x}\in S
\end{aligned}
$$

其中，$\boldsymbol{x}$ 是 n 维未知自变量向量，$\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，而 f，h_i（$i=1, 2, \cdots, m$），g_j（$j=1, 2, \cdots, p$）是关于自变量的实值函数。集合 S 是 n 维空间的一个子集。f 是目标函数，其他等式、不等式是约束条件。

本书还额外引入一定的光滑性假设。例如，问题中的函数往往要求是连续的或者有连续导数。这种假设可以保证 $\boldsymbol{x}$ 的微小变动只导致问题涉及其他值的微小变动。同时集合 S 也不是任意的，我们要求 S 具有连通性。连通性保证任意点 $\boldsymbol{x}^0$ 处的微小变动是可