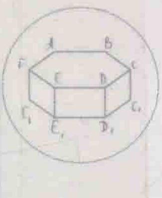
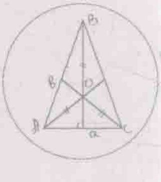
Linear Algebra and Its Applications



线性代数及其应用



宋金国 秦君琴 宋佳乾◎编著

清華大学出版社

线性代数及其应用

宋金国　秦君琴　宋佳乾　编著

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

线性代数以线性函数为主要研究对象，具有概念抽象、理论严谨、逻辑推理严谨等特点。它在工程数学、线性规划、经济分析、数学建模、计算技术方面的应用十分广泛，也是从事理工科专业工作人员的必备知识。因此，学好这门课程对于后续相关课程的学习有着十分重要的意义。

全书共分 5 章，对重要的概念、公式、结论进行系统的整理，注意对基本概念的准确理解，对基本定理、常见解题方法的表述与应用，内容的安排由浅入深，循序渐进，注重培养读者分析问题和解决问题的能力。书中还给出了利用 MATLAB 语言程序解决线性代数中相关问题的计算程序。

本书适用于不同程度的学习对象学习，可作为在校本科生学习线性代数的教材，也可作为该课程的教学参考用书，对于从事教学工作的教师和参加理工科硕士研究生入学考试的读者也有一定的参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数及其应用/宋金国，秦君琴，宋佳乾编著. —北京：清华大学出版社，2017
ISBN 978-7-302-48200-0

Ⅰ. ①线…　Ⅱ. ①宋…　②秦…　③宋…　Ⅲ. ①线性代数　Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 207809 号

责任编辑：曾　珊
封面设计：李召霞
责任校对：焦丽丽
责任印制：宋　林

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
课件下载：http://www.tup.com.cn，010-62795954
印 装 者：三河市少明印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：145mm×210mm　　**印　　张**：6.25　　**字　　数**：155 千字
版　　次：2017 年 10 月第 1 版　　**印　　次**：2017 年 10 月第 1 次印刷
印　　数：1～2000
定　　价：25.00 元

产品编号：076739-01

前　言

“线性代数”是高等学校中大多数理工科专业以及经济贸易专业必修的一门重要的数学基础课程之一，在工程数学、线性规划、经济分析、数学建模、计算技术中应用十分广泛，从而也是从事理工科专业工作人员的必备知识。

这门课程以线性函数为研究的主要对象，概念抽象、理论严谨、逻辑推理严谨，然而应用却十分广泛，经常应用在大多数理工科专业以及经济贸易专业后续专业课程的理论研究和实际问题当中，因此学好这门课程对于后续相关课程的学习有着十分重要的意义。该门课程中抽象概念较多，一些运算规则与初等数学中运算规则很不相同，往往使初学者不易理解与接受，尤其是该课程一般在大学一年级开设，面向刚进入到大学里学习的学生，他们习惯于直观式教学，欠缺抽象思维能力，很容易将该课程的一些运算规则和中学里的一些运算规则相混淆，从而对课程的内容感到难以理解，尤其是对于课程中涉及的问题感到束手无策，不易找到如何用所学知识具体应用到解决具体专业问题的基本思路和方法。

为了帮助学习者获得必要的基本知识和基本技能，本书从掌握课程的基本内容、解决问题的基本方法入手，根据课程教学大纲的要求，参考了当前的线性代数教材，以通俗易懂的语言向读者介绍线性代数课程中的基础知识与解决问题的基本方法。

全书共分 5 章，包括了高等学校中大多数理工科专业以及经济贸易专业教学大纲要求的全部内容，力求做到科学性与通俗性相结合，对重要的概念、公式、结论进行系统的整理，注意对基本概念的准确理解，对基本定理和常见解题方法的表述与应用，内容的安排由浅入深，循序渐进，注重培养读者分析问题和解决问题的能力。书中还给出了利用 MATLAB 语言程序解决线性代数中相关问题的计算程序。因此，本书适用于不同程度的学习对象学习，可作为在校本科生的教材，也可作为该课程的教学参考用书，对于从事教学工作的教师和参加理工科硕士研究生入学考试的读者也有一定的参考价值。

本教材由长期从事课程教学的宋金国教师担任主编，宋佳乾、秦君琴教师参编。宋金国编写了第 1、3 章，并审阅了全书，秦君琴编写了第 5 章、模拟自测试题，宋佳乾编写了第 2、4 章以及习题解答。

本书是宁夏回族自治区“十三五”电气信息类重点专业群建设的研究成果之一，并得到了该项目的资助。

书中难免有疏漏和不妥之处，敬请同仁不吝赐教，也诚请广大读者批评指正。

编　者

2017 年 5 月

学习建议

一、课程的性质、目的与任务

1. 课程的性质

“线性代数”是物理学、计算机、电子信息、自动化、通信工程等理工科类以及经济类专业的必修基础课程。该课程不仅有自身的理论体系，而且还是一门应用性很强的课程，它广泛应用在理工科类以及经济类各专业的实际问题中。

2. 课程的目的与任务

通过本课程的学习，使学生掌握各专业课程中所必需的有关矩阵运算、线性方程组理论、线性空间理论的基本知识和基本方法，具有比较熟练的计算能力，分析能力，从而能够正确地运用所学知识解决实际问题，为深入学习后续课程打下牢固的基础。

本课程重点在于培养学生正确理解基本概念，熟练应用基本方法。在开拓抽象思维和逻辑推理能力方面，要求学生在学习中结合所学其他专业课程做一定数量的练习题和应用题，加强对学生基本方法、基本技能的训练，着重理论联系实际，提高学生分析问题、解决问题的能力。

3. 与其他课程的联系

本课程的先修课程是“高中数学”，可为后续的理工科各专

业课程的学习打下必要的基础。

二、课程的学时、开设时间

本课程总学时数为 32～51 学时,建议每周 2～3 学时,可以在第一学期或第二学期开设。

三、学习内容和学习要求

第 1 章　行列式(6～9 学时)

1.1　n 阶行列式的定义

1.2　n 阶行列式的性质

1.3　行列式的计算

1.4　应用举例

1.5　应用 MATLAB 程序计算行列式

学习要求:理解 n 阶行列式的概念;掌握行列式的性质;熟练进行行列式的计算。了解 1.4、1.5 节的内容。

重点:行列式的性质与计算。

难点:理解行列式定义、行列式展开。

第 2 章　矩阵(7～11 学时)

2.1　矩阵的概念

2.2　矩阵的运算

2.3　常见几类 n 阶矩阵的性质

2.4　矩阵的初等变换

2.5　矩阵的秩

2.6　应用举例

2.7　应用 MATLAB 程序求矩阵的相关问题

学习要求:理解矩阵的相关概念;熟练掌握矩阵的运算、矩阵的初等变换、逆矩阵的求解方法、常见重要方阵的性质、求矩阵秩的方法。了解应用 MATLAB 程序求矩阵的相关问题。

重点:矩阵的运算与初等变换、求逆矩阵的方法、几类重要

方阵的性质。

难点：求矩阵的逆矩阵。

第3章　向量组与线性方程组(7～11学时)

3.1　向量组的线性相关性

3.2　向量组的秩

3.3　线性方程组

3.4　矩阵方程

3.5　应用举例

3.6　应用MATLAB程序求解线性方程组

学习要求：理解向量组的线性相关性的概念，熟练掌握判断向量组线性相关性的常见方法；求解线性方程组的方法。了解3.5、3.6节的内容。

重点：向量组的线性相关性的概念，判断向量组的线性相关性的常见方法；求解线性方程组的方法。

难点：判断向量组的线性相关性；含参量线性方程组的求解方法。

第4章　向量空间与矩阵的特征向量(7～11学时)

4.1　线性空间的概念与性质

4.2　正交向量组

4.3　向量空间中的线性变换

4.4　矩阵的特征值与特征向量

4.5　矩阵的对角化

4.6　应用举例

4.7　应用MATLAB程序求矩阵的特征值

学习要求：理解线性空间、正交向量组、向量空间中的线性变换的概念，掌握线性空间、向量空间中的线性变换的性质，将向量组化为正交向量组的方法，会求矩阵的特征值与特征向量，会判断矩阵能否对角化以及对角化的方法。

重点：正交向量组，矩阵的特征值与特征向量、矩阵的对

角化。

难点：将向量组正交化，将矩阵对角化。

第5章　n元二次型(5～8学时)

5.1　二次型与合同矩阵

5.2　化二次型为标准型、规范型

5.3　正定二次型与正定矩阵

5.4　应用举例

学习要求：能够将n元实二次型化为标准型、规范型，能够准确判断二次型的正定与负定，会用正交变换化二次型为标准型。

重点：化二次型为标准型、规范型，用正交变换化二次型为标准型。

难点：用正交变换化二次型为标准型。

目录

第1章 行 列 式

行列式是研究线性代数的一个重要工具，同时在其他学科领域中也有着十分广泛的应用。本章主要介绍n阶行列式定义、性质、计算方法及其应用。

1.1 n阶行列式的定义

1.1.1 全排列及其反序数

定义 1-1 把n个不同的元素排成一列，称为这n个元素的全排列(简称排列)。

例如：(1) 631254；(2) $n(n-1)\cdots 321$；(3) $1234\cdots n$

n个不同元素所有排列的种数共有$n!$种。例如，用1、2、3进行排列有6个，分别是：123,231,312,132,213,321。

定义 1-2 称规定了各元素之间次序的排列为标准排列。

例如：排列$1234\cdots n$就可视为标准排列。

定义 1-3 在n个不同元素的排列中当某两个元素的先后次序与标准排列中次序不同时就称该排列有一个反序，一个排列中所有反序的总和叫做这个排列的反序数(也叫做逆序数)。

定义 1-4 反序数为奇数的排列称为奇排列，反序数为偶数的排列称为偶排列。

由定义 1-2～定义 1-4 可以证得下列结论：

定理 1-1 交换一个排列中任意两个元的位置，则改变这个排列的奇偶性。

定理 1-2 由 n 个元组成的所有排列中，奇、偶排列各占一半。

定理 1-3 n 个不同自然数的任意排列必可以经过若干次互换变成标准排列，并且互换次数的奇偶性与该排列的奇偶性相同。

1.1.2 排列反序数的计算

不失一般性，设 n 个不同的元素的标准排列是 $1234\cdots n$，而 $a_1a_2a_3\cdots a_n$ 是这 n 个自然数的任意排列，考虑元素 $a_i(i=1,2,3,\cdots,n)$，如果比 a_i 大，且排在 a_i 前面的元素有 t_i 个，则这个排列反序数就是 $t=t_1+t_2+\cdots+t_n$，也可以记作 $\tau(a_1a_2a_3\cdots a_n)$。

【例 1-1】 计算下列各排列的反序数，并判断它们是奇排列还是偶排列。

(1) 631254 (2) $n(n-1)\cdots 321$

解

(1) 6 前面的反序数是 0，3 前面的反序数是 1；

1 前面的反序数是 2，2 前面的反序数是 2；

5 前面的反序数是 1，4 前面的反序数是 2。

所以

$$\tau(631254)=0+1+2+2+1+2=8$$

故 631254 是偶排列。

(2) 同(1)得

$$\tau(n(n-1)\cdots 321)=0+1+2+\cdots+(n-1)$$
$$=\frac{n(n-1)}{2}$$

当 $n=4k,4k+1$ 时为偶排列；当 $n=4k+2,4k+3$ 时为奇排列。

1.1.3　n 阶行列式定义

定义 1-5　将 n^2 个元素(数或代数式)排成 n 行 n 列的表，用两竖夹住的形式，它表示一个数值(或代数式)，这个数值(或代数式)等于表中位于不同行不同列的 n 个元的乘积，并冠以符号 $(-1)^{\tau}$，即

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

的代数和 $\sum (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 称为 n 阶行列式。记作

$$D = \det(a_{ij}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

例如

(1) $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} r\cos\theta & -\sin\theta \\ r\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$；　(4) $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix}$

其中，(1)、(2)是二阶行列式，(3)是三阶行列式，(4)是四阶行列式。

1.2　n 阶行列式的性质

定义 1-6　将 n 阶行列式 $D=\det(a_{ij})$ 的各行元素换为各列元素得到的新行列式称为行列式 D 的转置行列式，记作 D^{T}。