

“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材配套用书

微积分中的 典型问题分析 与 习题解答

田立平 尚书霞 杨芝燕 编著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS



“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材配套用书

微积分中的典型问题分析与习题解答

田立平 尚书霞 杨芝燕 编著



机械工业出版社

本书是与田立平、谢斌编著的“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材《微积分》(第2版)(ISBN: 9787111381532, 机械工业出版社出版)(以下简称教材)配套的教学用书。本书按教材的章节顺序编排内容,与教学同步。每章包括基本要求、知识要点、典型例题、习题、同步习题解答和单元测试题,书末附有习题参考答案。本书的例题与习题都是微积分中的典型问题,可供使用教材的学生使用,也可供讲授微积分的教师在备课和批改作业时使用,也适用于考研的学生以及想提高教学水平的人员。

图书在版编目(CIP)数据

微积分中的典型问题分析与习题解答 / 田立平, 尚书霞, 杨芝燕编著. — 北京: 机械工业出版社, 2017. 9
ISBN 978-7-111-57754-6

I. ①微… II. ①田… ②尚… ③杨… III. ①微积分—高等学校—教学参考资料 IV. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 199017 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

策划编辑: 张俊红 责任编辑: 阎洪庆

责任校对: 肖琳 封面设计: 路恩中

责任印制: 孙炜

保定市中国画美凯印刷有限公司印刷

2017 年 9 月第 1 版第 1 次印刷

184mm × 260mm · 15.5 印张 · 427 千字

标准书号: ISBN 978-7-111-57754-6

定价: 49.00 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换

电话服务

网络服务

服务咨询热线:010-88361066 机工官网:www.cmpbook.com

读者购书热线:010-68326294 机工官博:weibo.com/cmp1952

010-88379203 金书网:www.golden-book.com

封面防伪标均为盗版

教育服务网:www.cmpedu.com

前言



微积分是数学的一门基础学科,它对学生的分析问题、解决问题能力的培养,以及对后续课程的学习起着非常重要的作用。但是,学生在学习这门课程时普遍感到吃力,抓不住概念的实质,解题更感到困难,总结不出一般的思考方法。为了帮助学生进一步加深对微积分课程基本概念的理解,灵活地运用所学知识分析问题和解决问题,提高解题技能与技巧,我们编写了本书,希望对广大读者学好微积分能有所帮助。

本书是与机械工业出版社出版的《微积分第2版》(“十二五”普通高等教育本科国家级规划教材)配套使用的教学参考书。根据教材的章节编写为八章,每章均与教材中各章的内容相对应,并每章设计了六个板块。

一、基本要求。列出了每章的教学基本要求,强调了各知识点不同的要求级别。

二、知识要点。对每章的内容进行了简明扼要的叙述、归纳和总结,列出了基本概念、重要定理和公式,以加深读者对基本概念、公式、定理等重点内容的理解和正确应用。

三、典型例题。从北京物资学院历年的本科生期末试题中精选例题,还选编了部分方法灵活、综合性较强的例题,并进行了分析和解答。

四、习题。这一部分是为读者检查学习效果和应试能力而设计的。通过加强习题练习,读者可以进一步加深对所学内容的理解,提高解题能力。在本书的最后给出了习题的答案。

五、同步习题解答。对机械工业出版社出版的《微积分》(第2版)课后习题全部做了详细解答,在解答中力求推理严谨、表达流畅、通俗易懂。

六、单元测试题。精选了部分北京物资学院历年来的月考试题和具有一定技巧与难度的考研真题,力求做到每章单元测试题题目在结构、题型、难易程度及题量上与月考试题基本相符。

本书旨在指导课程教学,帮助读者学好微积分课程,提高解题能力以及适应各类考试。在例题的选编上力争突出重点。

本书共分为八章,由田立平、尚书霞和杨芝燕编写。在编写过程中得到了北京物

资学院各级各部门的领导和同仁们的大力支持,特别是得到了数学教研室所有同仁的帮助,是他们给了我们很多有价值的建议,在此表示衷心的感谢!同时也感谢机械工业出版社的大力协助。本书由田立平教授的北京市高层次创新创业人才支持计划教学名师项目支持。

由于作者水平有限,加之时间比较仓促,本书难免会有欠妥和错误之处,我们衷心恳求读者批评指正,以便能使本书在教学实践中不断改进和完善。

编 者

目 录

前 言

第一章 函数与极限	1
第一节 基本要求	1
第二节 知识要点	1
第三节 典型例题	3
第四节 习 题	6
第五节 同步习题解答	9
第六节 单元测试题	31
单元测试题答案	32
第二章 导数与微分	33
第一节 基本要求	33
第二节 知识要点	33
第三节 典型例题	35
第四节 习 题	38
第五节 同步习题解答	40
第六节 单元测试题	51
单元测试题答案	52
第三章 中值定理与导数的应用	53
第一节 基本要求	53
第二节 知识要点	53
第三节 典型例题	55
第四节 习 题	59
第五节 同步习题解答	61
第六节 单元测试题	79
单元测试题答案	81
第四章 不定积分	82
第一节 基本要求	82
第二节 知识要点	82
第三节 典型例题	84
第四节 习 题	93

第五节 同步习题解答	94
第六节 单元测试题	107
单元测试题答案	108
第五章 微分方程与差分方程初步	109
第一节 基本要求	109
第二节 知识要点	109
第三节 典型例题	111
第四节 习 题	114
第五节 同步习题解答	116
第六节 单元测试题	142
单元测试题答案	143
第六章 定 积 分	144
第一节 基本要求	144
第二节 知识要点	144
第三节 典型例题	148
第四节 习 题	153
第五节 同步习题解答	156
第六节 单元测试题	171
单元测试题答案	173
第七章 多元函数的微积分	174
第一节 基本要求	174
第二节 知识要点	174
第三节 典型例题	177
第四节 习 题	185
第五节 同步习题解答	188
第六节 单元测试题	204
单元测试题答案	206
第八章 无穷级数	207
第一节 基本要求	207
第二节 知识要点	207
第三节 典型例题	210
第四节 习 题	216
第五节 同步习题解答	218
第六节 单元测试题	232
单元测试题答案	233
习题答案	235
参考文献	242

第一章

函数与极限

第一节 基本要求

- 1) 理解集合和函数的概念, 掌握函数的表示方法, 掌握函数的特性 (有界性、单调性、周期性、奇偶性)。
- 2) 了解初等函数的概念。
- 3) 理解数列极限和函数极限的概念, 理解极限的性质 (唯一性、有界性、保号性)。
- 4) 掌握极限的四则运算法则, 会用变量代换求某些简单复合函数的极限。
- 5) 了解极限存在的两个准则, 会应用两个重要极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 与 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 求极限, 掌握求极限的基本方法。
- 6) 理解无穷小的概念和基本性质; 掌握无穷小比较的方法, 会用等价无穷小代换求极限。
- 7) 理解函数连续性的概念; 掌握连续与极限的关系; 会求函数间断点, 且判别间断点的类型。
- 8) 了解闭区间上连续函数的性质。

第二节 知识要点

1. 函数

设 D 是非空数集, 若对 D 中任意数 x , 按照某一确定的对应法则 f , 总有唯一确定的数 $y \in \mathbf{R}$ 与之对应, 则称 f 是定义在 D 上的函数, 记作 $y = f(x)$ 。

2. 数列的极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N, \text{ 当 } n > N \text{ 时, 有 } |x_n - a| < \varepsilon.$$

数列极限的性质: 唯一性、有界性、保号性。

若数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则它只有一个极限。

若数列 $\{x_n\}$ 收敛, 则它一定有界, 即存在 $M > 0$, 对任意的 n 都有 $|x_n| \leq M$ 。

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a > 0$ ($a < 0$), 则存在 N , 当 $n > N$ 时, 有 $x_n > 0$ ($x_n < 0$)。

3. 函数的极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ 当 } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ 时, 有 } |f(x) - A| < \varepsilon.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists X > 0, \text{ 当 } |x| > X \text{ 时, 有 } |f(x) - A| < \varepsilon.$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A.$$

函数极限的性质: 唯一性、局部有界性、局部保号性。

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则此极限是唯一的.

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 则 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内有界.

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A > 0$ (或 $A < 0$), 则存在 $\delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $f(x) > 0$ (或 $f(x) < 0$).

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ 且 $f(x) \geq 0$ (或 $f(x) \leq 0$), 则 $A \geq 0$ (或 $A \leq 0$).

4. 极限运算法则

极限的四则运算法则: 在某一变化过程中, $\lim f(x)$ 与 $\lim g(x)$ 都存在, 则

$$(1) \lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x);$$

$$(2) \lim [f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x);$$

$$(3) \text{若 } \lim g(x) \neq 0, \text{ 有 } \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}.$$

复合函数的极限运算法则: 设 $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = a, \lim_{u \rightarrow a} f(u) = A$, 且当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, $g(x) \neq a$, 则

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{u \rightarrow a} f(u) = A.$$

5. 两个重要极限

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, 适用类型: “ $\frac{0}{0}$ ”型极限; 含有三角函数的极限.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 或 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$, 适用类型: “ 1^∞ ”型极限; 幂指函数求极限.

夹逼准则: 若在某一变化过程中, 函数 $f(x), g(x), h(x)$ 总有关系 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, 且 $\lim g(x) = \lim h(x) = A$, 则 $\lim f(x) = A$.

单调有界准则: 单调有界数列必有极限, 即若数列 $\{x_n\}$ 是单调有界的, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 一定存在.

6. 无穷小与无穷小

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, 则称 $f(x)$ 是当 $x \rightarrow x_0$ 时的无穷小.

无穷小的性质: 在某一变化过程中, 有限个无穷小的和仍是无穷小; 有限个无穷小的乘积仍是无穷小; 有界变量与无穷小量之积仍是无穷小量.

无穷小与无穷大的关系: 在某一变化过程中

(1) 若 $y = f(x)$ 是无穷大量, 则 $\frac{1}{y}$ 是无穷小量;

(2) 若 $y = f(x) (f(x) \neq 0)$ 是无穷小量, 则 $\frac{1}{y}$ 是无穷大量.

几个重要的等价无穷小: 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x \sim x, \tan x \sim x, \arcsin x \sim x, \arctan x \sim x, \ln(1+x) \sim x, 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, e^x - 1 \sim x, a^x - 1 \sim x \ln a, (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$.

在自变量的某种趋势下, 若 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$, 则 $\lim \frac{\alpha}{\beta} f = \lim \frac{\alpha'}{\beta'} f, \lim \alpha f = \lim \alpha' f$; 当 $\lim \frac{\alpha}{\beta} \neq 1$ 时, $\lim (\alpha - \beta) f = \lim (\alpha' - \beta') f$.

7. 函数的连续性

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续.

利用初等函数的连续性求函数的极限是求极限的最基本的方法, 即若 $f(x)$ 是初等函数, x_0 是其定义区间内的点, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

判断函数间断点的步骤:

- (1) 考察 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 点处是否有定义, 若无定义, 则 $x = x_0$ 是 $f(x)$ 的间断点;
- (2) 若 $f(x_0)$ 存在, 再考察 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 是否存在, 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在, 则 $x = x_0$ 是 $f(x)$ 的间断点;
- (3) 若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在, 再考察 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 是否等于 $f(x_0)$, 若不相等, 则 $x = x_0$ 是 $f(x)$ 的间断点.

若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 则

- (1) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上取到最大值和最小值 (最值定理);
- (2) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有界;
- (3) 若 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 则存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = 0$ (零点定理);
- (4) 当 $f(a) \neq f(b)$ 时, 对介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的任一实数 c , 必存在 $\xi \in [a, b]$, 使得 $f(\xi) = c$ (介值定理).

上述三个定理常可用于: 证明某些等式和不等式; 判定某些方程的根的存在性和根的范围.

8. 求极限的一般方法

- (1) 利用极限的四则运算法则及复合函数的运算法则;
- (2) 利用无穷小的运算法则; 利用无穷小与无穷大的关系;
- (3) 利用两个重要极限;
- (4) 利用夹逼准则, 利用单调有界准则及解方程;
- (5) 利用等价无穷小代换;
- (6) 利用合并或分项、因式分解、约分、变量代换、取对数等技巧;
- (7) 单边极限判别法: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$.

第三节 典型例题

例1 设 $f(x) = \arctan \frac{1}{1-x}$, 由于 (), 所以 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 不存在.

- A. $f(x)$ 在 $x = 1$ 处不存在 B. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ 不存在
C. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ 不存在 D. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ 和 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ 都存在, 但不等

解 函数在一点是否极限存在与函数在一点是否有定义无关, 因此 A 不正确.

当 $x \rightarrow 1^-$ 时, 有 $\frac{1}{1-x} \rightarrow +\infty$, 因此 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{\pi}{2}$, 因此 C 不正确.

当 $x \rightarrow 1^+$ 时, 有 $\frac{1}{1-x} \rightarrow -\infty$, 因此 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\frac{\pi}{2}$, 因此应选择 D.

例2 $x \rightarrow 0$ 时, 与 $\sin^2 x$ 等价的无穷小量是 ().

- A. $\ln(1+x)$ B. $\tan x$ C. $2(1-\cos x)$ D. $e^x - 1$

解 解法一 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2} = \infty$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^2} = \infty,$$

因此 $\ln(1+x)$, $\tan x$, $e^x - 1$ 都是 $\sin^2 x$ 的低阶无穷小, 排除 A, B, D.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos x)}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2}{x^2} = 1, \text{ 因此与 } \sin^2 x \text{ 等价的无穷小量是 } C.$$

解法二 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin^2 x \sim x^2$, 而 $\ln(1+x) \sim x$, $\tan x \sim x$, $e^x - 1 \sim x$, $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$, 故 $2(1 - \cos x) \sim x^2 \sim \sin^2 x$, 因此与 $\sin^2 x$ 等价的无穷小量是 C .

例3 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n} \right)$.

解 设 $s_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \cdots + \frac{n}{2^n}$, 则 $2s_n = 1 + 1 + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^{n-1}}$.

故上两式错位相减, 得

$$s_n = 2s_n - s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{n}{2^n} = 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) - \frac{n}{2^n},$$

由于 $n < \left(\frac{3}{2}\right)^n$ ($n = 1, 2, \cdots$), 故 $0 < \frac{n}{2^n} < \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n}{2^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n$ ($n = 1, 2, \cdots$), 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$,

因此由夹逼准则知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$, 所以原式 $= \lim_{n \rightarrow \infty} 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 2$.

例4 设 $x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$, $x_1 = 10$, 试证数列 $\{x_n\}$ 极限存在, 并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

解 首先证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在. 由于 $x_1 = 10$ 及 $x_2 = \sqrt{6 + x_1} = 4$ 知 $x_1 > x_2$. 设对正整数 k 有 $x_k > x_{k+1}$, 则有 $x_{k+1} = \sqrt{6 + x_k} > \sqrt{6 + x_{k+1}} = x_{k+2}$, 故由数学归纳法知, 对任意自然数 n 都有 $x_n > x_{n+1}$, 即数列 $\{x_n\}$ 为单调递减数列; 又 $x_n > 0$, 即 $\{x_n\}$ 有下界 0 , 根据极限存在准则知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 由于 $x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$, 则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{6 + x_n}$, 从而 $A = \sqrt{6 + A}$, 且 $x_n > 0$, 解得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A = 3$.

例5 设函数 $f(x) = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$), 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \ln[f(1)f(2) \cdots f(n)]$.

解 因 $\ln[f(1)f(2) \cdots f(n)] = \ln(a^1 a^2 \cdots a^n) = \ln a^{1+2+\cdots+n} = \frac{n(n+1)}{2} \ln a$,

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \ln[f(1)f(2) \cdots f(n)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2} \ln a}{n^2} = \frac{1}{2} \ln a.$$

例6 已知极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} - ax - b \right) = 0$, 确定 a 及 b .

解 通分整理得 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-a)x^2 - (a+b)x + 1-b}{x+1} = 0$, 再由于此函数是分式函数, 分子、分母都是多项式, 且分母是一次多项式, 因此分子应为常数, 故有 $1-a=0$ 和 $a+b=0$, 因此 $a=1, b=-1$.

例7 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin^2 x + e^x) - x}{\ln(x^2 + e^{2x}) - 2x}$.

解 当 $x \rightarrow 0$ 时, 有

$$\ln(\sin^2 x + e^x) = \ln\left[e^x \left(\frac{\sin^2 x}{e^x} + 1\right)\right] = x + \ln\left(\frac{\sin^2 x}{e^x} + 1\right),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x^2 + e^{2x}) = \ln \left[e^{2x} \left(\frac{x^2}{e^{2x}} + 1 \right) \right] = 2x + \ln \left(\frac{x^2}{e^{2x}} + 1 \right),$$

从而有

$$\ln(\sin^2 x + e^x) - x = \ln \left(\frac{\sin^2 x}{e^x} + 1 \right) \sim \frac{\sin^2 x}{e^x}, \quad \ln(x^2 + e^{2x}) - 2x = \ln \left(\frac{x^2}{e^{2x}} + 1 \right) \sim \frac{x^2}{e^{2x}},$$

因此

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin^2 x + e^x) - x}{\ln(x^2 + e^{2x}) - 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin^2 x}{e^x}}{\frac{x^2}{e^{2x}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} e^x = 1.$$

例8 求极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+3} \right)^{x^2 \cdot \sin \frac{2}{x}}$.

解 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+3} \right)^{x^2 \cdot \sin \frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln \left(\frac{x-1}{x+3} \right) \cdot x^2 \cdot \sin \frac{2}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot \sin \frac{2}{x} \ln \left(\frac{x-1}{x+3} \right)}$. 由于

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot \sin \frac{2}{x} \ln \left(\frac{x-1}{x+3} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \cdot \frac{2}{x} \cdot \left(\frac{x-1}{x+3} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} 2x \cdot \frac{-4}{x+3} = -8,$$

所以原式 $= e^{-8}$.

例9 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$, $g(x) = \sin x$, 讨论 $f[g(x)]$ 的连续性.

解 当 $2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi$ 时, $\sin x \geq 0$; 当 $(2k+1)\pi < x < (2k+2)\pi$ 时, $\sin x < 0$, 所以

$$f[g(x)] = \begin{cases} 1, & 2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi \\ -1, & (2k+1)\pi < x < (2k+2)\pi \end{cases}, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

显然当 $x \in (k\pi, (k+1)\pi)$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 时, $f[g(x)]$ 连续; 而当 $x=k\pi$ 时, 有

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2k\pi^-} f[g(x)] &= -1 \neq \lim_{x \rightarrow 2k\pi^+} f[g(x)] = 1, \\ \lim_{x \rightarrow (2k+1)\pi^-} f[g(x)] &= 1 \neq \lim_{x \rightarrow (2k+1)\pi^+} f[g(x)] = -1, \end{aligned}$$

所以 $f[g(x)]$ 在 $x = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 处不连续.

例10 讨论函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}} x$ 的连续性. 若有间断点, 判别其类型.

解 当 $|x| > 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} |x^{2n}| = \infty$; 当 $|x| < 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = 0$. 所以有

$$f(x) = \begin{cases} x, & |x| < 1 \\ 0, & |x| = 1 \\ -x, & |x| > 1 \end{cases}$$

显然 $f(x)$ 在 $|x| < 1$ 和 $|x| > 1$ 时都是连续的, 由 $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1$ 知 $x = -1$ 为跳跃间断点; 由 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$, 知 $x = 1$ 为跳跃间断点.

例11 求 $f(x) = \frac{x}{\tan x}$ 的间断点并判断类型.

解 $\tan x$ 的无定义点和零点分别为 $x = k\pi$ 和 $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). 又 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan x} = 1$;

$\lim_{x \rightarrow k\pi} \frac{x}{\tan x} = \infty$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$); $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi} \frac{x}{\tan x} = 0$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). 所以 $x = 0$ 和 $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ($k =$

$0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 是 $f(x)$ 的第一类可去间断点; 而 $x = k\pi$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) 为 $f(x)$ 的第二类间断点.



第四节 习 题

1. 确定下列函数的定义域.

$$(1) y = \frac{\ln(3-x)}{\sqrt{|x|-1}}$$

$$(2) y = \sqrt{\ln \frac{5x-x^2}{4}}$$

$$(3) y = \frac{\arccos \frac{2x-1}{7}}{\sqrt{x^2-x-6}}$$

$$(4) y = \ln\left(\frac{1}{2} - \sin x\right)$$

2. 下列函数可以看成由哪些简单函数复合而成?

$$(1) y = (1 + \ln x)^5$$

$$(2) y = \sqrt{\ln \sqrt{x}}$$

$$(3) y = e^{e^{-x^2}}$$

$$(4) y = \ln^2 \arccos x^2$$

3. 填空题

$$(1) \text{ 设 } \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{a}{x^2-4} \right) = b, \text{ 则 } ab = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(2) \text{ 已知 } f(x) = \begin{cases} \cos \frac{\pi}{2}x, & |x| \leq 1 \\ |x-1|, & |x| > 1 \end{cases}, \text{ 则 } x = \underline{\hspace{2cm}} \text{ 为 } f(x) \text{ 的第 } \underline{\hspace{2cm}} \text{ 类间断点.}$$

$$(3) \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{x}, & x > 0 \\ A, & x \leq 0 \end{cases} \text{ 在 } x=0 \text{ 处连续, 则 } A = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(4) \text{ 已知 } \frac{1}{n} \sin^2 \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n^P} (n \rightarrow \infty), \text{ 则常数 } P = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(5) \text{ 设函数 } f(x) = \begin{cases} 1+x, & x < 2 \\ 0, & x = 2 \\ x^2-1, & x > 2 \end{cases}, \text{ 则 } \lim_{x \rightarrow 1} f(f(x)) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(6) \text{ 设 } f(x) = \sin x \cdot \sin \frac{1}{x}, \text{ 则 } x=0 \text{ 是 } f(x) \text{ 的第 } \underline{\hspace{2cm}} \text{ 类 } \underline{\hspace{2cm}} \text{ 间断点.}$$

$$(7) \text{ 若 } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin ax}{\sqrt{1-\cos x}}, & x < 0 \\ \frac{1}{x} [\ln x - \ln(x^2+x)], & x > 0 \end{cases}, \text{ 若极限 } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ 存在, 则 } a = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(8) \text{ 设 } f(x) = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}, \text{ 则 } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(9) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-3x+a}{2-x} = b, \text{ 则 } a = \underline{\hspace{2cm}}, b = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(10) 设 $f(x) = \ln(1+kx)^{\frac{m}{x}}$; 补充定义 $f(0) = \underline{\hspace{2cm}}$ 可使其在 $x=0$ 处连续.

4. 选择题

(1) 下列函数中, () 不为初等函数.

A. $y = \frac{|x|}{x}$

B. $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

C. $y = \left[\frac{\sin(e^x - 1)}{\ln(1 + x^2)} \right]^{\frac{1}{2}}$

D. $y = |x|$

(2) 下列函数中, () 为奇函数.

A. $y = \frac{|x|}{x}$

B. $y = \frac{\sin x}{x}$

C. $y = x^2 + \cos x$

D. $y = f(x^2)$

(3) 函数 $y = |\sin x|$ 的周期为 () .

A. 4π

B. π

C. 2π

D. $\frac{\pi}{2}$

(4) “ $f(x)$ 在 $x=a$ 处连续” 是 “ $|f(x)|$ 在 $x=a$ 处连续” 的 () 条件.

A. 必要非充分

B. 充分非必要

C. 充要

D. 既非充分又非必要

(5) 设 $f(x) = \frac{x^2 - x}{|x|(x^2 - 1)}$, 则下列结论错误的是 () .

A. $x=1, x=0, x=-1$ 为间断点

B. $x=0$ 为可去间断点

C. $x=-1$ 为无穷间断点

D. $x=0$ 为跳跃间断点

(6) 函数 $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x-1}}, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处 () .

A. 右连续

B. 左右皆不连续

C. 左连续

D. 连续

(7) 下列函数在定义域内不连续的是 () .

A. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0 \\ 2x - 1, & x < 0 \end{cases}$

B. $f(x) = \frac{|x|}{\sin x}$

C. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0 \\ 2x - 1, & x \leq 0 \end{cases}$

D. $f(x) = 1 + \sin x + \sin^2 x + \cdots, |x| < \frac{\pi}{2}$

(8) 若数列 $\{y_n\}$ 满足 $|y_n - a| < \frac{1}{n}, n = 1, 2, 3, \cdots$, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, 必有 () .

A. y_n 是无穷小量

B. y_n 是无界变量

C. $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$

D. y_n 是无穷大量

(9) 下列函数中, () 在点 $x=0$ 补充定义可成为连续函数.

A. $f(x) = \frac{2}{x} \sin \frac{x}{2}$

B. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

C. $f(x) = \sin \frac{1}{x}$

D. $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1+x}{x^2}$

(10) $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1}{ax+1} - \frac{3}{x^3+1} \right) = -1$, 则 $a = ()$.

A. 1

B. -1

C. 0

D. 以上都不对

(11) 若 $x \rightarrow 0, 2\sin x - \sin 2x \sim x^k$, 则 $k = ()$.

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

(12) 设 $f(x) = \frac{\cot x}{\frac{\pi}{2} - x}$, 要使 $f(x)$ 在 $x = \frac{\pi}{2}$ 处连续, 则应取 $f(\frac{\pi}{2}) = (\quad)$.

A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

(13) 已知 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $(\quad)$ 一定存在.

A. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ B. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ C. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ D. $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x)$

5. 求极限

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 1}{3x - 1} \sin \frac{1}{x}$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{\ln(1+x)}{x}}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x} \sin x - \sqrt{\cos x}}$

(4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x + 2x \arctan x}{2^x - \pi x}$

(5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - 1}{3x^2}$

(6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+c}{x-c} \right)^{\frac{x}{2}} = 3$, 求 c

(7) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)^n$

(8) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x}{2} \right)^{\frac{2}{x-2}}$

6. 设 $0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_k$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a_1^n} + \frac{1}{a_2^n} + \cdots + \frac{1}{a_k^n} \right)^{\frac{1}{n}}$.

7. 设函数 $f(x) = \begin{cases} (1+2x)^{\frac{1}{x}}, & x < 0 \\ b, & x = 0 \\ e^{\frac{a \sin 2x}{x}}, & x > 0 \end{cases}$, 求 a, b 使 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续.

8. 讨论函数 $y = (1+x) \arctan \frac{1}{1-x^2}$ 的连续性, 并判断间断点的类型.

9. 证明: 奇次方程 $a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$ 一定有实根, 其中 $a_{2n+1} \neq 0$.

10. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln \cos(x-1)}{1 - \cos^2(x-1)}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$, 问函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处是否连续? 若不连续, 修改函数在 $x = 1$ 处的定义, 使之连续.

续, 修改函数在 $x = 1$ 处的定义, 使之连续.

11. 某人借债 a 万元, 若按连续复利计算, 至少经过多少年债务额要翻一番? (借债年利率为 5%)

12. 讨论函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}, & -\frac{1}{2} < x < 0 \\ 3 - e^{\sin x}, & x \geq 0 \end{cases}$ 的连续性.

13. 设 $f(x) = e^x - 2$, 求证: 在区间 $(0, 2)$ 内至少存在一点 x_0 , 使 $f(x_0) = x_0$.

14. 已知 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - ax - b \right) = 0$, 求 a, b .

15. 已知 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \frac{f(x)}{\sin x}} - 1}{x(e^x - 1)} = A \neq 0$, 求 c 及 k , 使 $f(x) \sim cx^k$.

16. 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $a < x_1 < x_2 < b$, 试证: 一定存在介于 a, b 之间的一点 ξ , 使得 $\alpha f(x_1) + \beta f(x_2) = (\alpha + \beta)f(\xi)$ 成立, 其中 $\alpha > 0, \beta > 0$.

第五节 同步习题解答

习题 1.1

1. 求函数的定义域

$$(1) y = \frac{x}{\ln(x+2)} \quad (2) y = \arcsin \sqrt{x^2 - 9}$$

解 (1) 函数 $y = \frac{x}{\ln(x+2)}$ 的定义域满足 $\ln(x+2) \neq 0$, 即 $x+2 > 0$, 且 $x+2 \neq 1$, 故函数 $y = \frac{x}{\ln(x+2)}$ 的定义域是 $(-2, -1) \cup (-1, +\infty)$.

(2) 函数 $y = \arcsin \sqrt{x^2 - 9}$ 的定义域满足 $0 \leq \sqrt{x^2 - 9} \leq 1$, 即 $9 \leq x^2 \leq 10$, 故函数 $y = \arcsin \sqrt{x^2 - 9}$ 的定义域是 $[3, \sqrt{10}] \cup [-\sqrt{10}, -3]$.

2. 设 $y = f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$, 求复合函数 $f(\sin x)$ 的定义域.

解 因为 $y = f(x)$ 的定义域是 $[0, 1]$, 故复合函数 $f(\sin x)$ 的定义域满足 $\sin x \in [0, 1]$, 故复合函数 $f(\sin x)$ 的定义域为 $[2k\pi, 2k\pi + \pi] (k \in \mathbb{Z})$.

3. 下列几对函数中, 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相同的是哪一对?

$$(1) f(x) = \lg x^2 \text{ 与 } g(x) = 2 \lg x \quad (2) f(x) = x \text{ 与 } g(x) = \sqrt{x^2}$$

$$(3) f(x) = |x| \text{ 与 } g(x) = \sqrt{x^2} \quad (4) f(x) = 1 \text{ 与 } g(x) = \frac{x}{x}$$

解 正确答案是 (3).

分析 (1) 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域不同. $f(x)$ 的定义域是 $\{x | x \neq 0\}$, 而 $g(x)$ 的定义域是 $\{x | x > 0\}$;

(2) 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的对应法则不同. $f(x) = x$, 而 $g(x) = \sqrt{x^2} = |x|$;

(3) 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域都是全体实数, 且对应法则都是 $|x|$, 故函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相同;

(4) 函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域不同. $f(x) = 1$ 的定义域是全体实数, 而 $g(x) = \frac{x}{x}$ 的定义域是 $\{x | x \neq 0\}$.

4. 某地电话局按如下办法收费. 每月通话次数不超过 30 次或不通话, 收费 20 元; 若超过部分每次以 0.18 元计算, 请列出函数的表达式.

解 设函数的表达式为 $f(x)$, 则

$$f(x) = \begin{cases} 20, & 0 \leq x \leq 30 \\ 20 + (x - 30) \times 0.18, & x > 30 \end{cases}$$

5. 设 $y = f(x) = 3x^2 - 2x - 1$, 求 $f(1)$, $f(0)$, $f(a)$, $f(-x)$, $f(x+1)$, $f(f(x))$.

解 $f(1) = 3 - 2 - 1 = 0$, $f(0) = -1$, $f(a) = 3a^2 - 2a - 1$,

$f(-x) = 3(-x)^2 - 2(-x) - 1 = 3x^2 + 2x - 1$,

$f(x+1) = 3(x+1)^2 - 2(x+1) - 1 = 3x^2 + 4x$,

$f(f(x)) = 3(3x^2 - 2x - 1)^2 - 2(3x^2 - 2x - 1) - 1 = 27x^4 - 36x^3 - 12x^2 + 16x + 4$.

6. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & -2 \leq x < 0 \\ 2, & x = 0 \\ 1+x, & 0 < x \leq 3 \end{cases}$, 求函数的定义域, 并求函数值 $f(-1)$, $f(0)$, $f(2)$.

解 函数的定义域为 $[-2, 3]$. $f(-1) = (-1)^2 = 1$, $f(0) = 2$, $f(2) = 1 + 2 = 3$.

7. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1+x, & x > 1 \end{cases}$, 写出 $f(x)$ 的定义域与值域, 并求 $f\left(\frac{1}{2}\right)$ 和 $f\left(\frac{1}{t}\right)$.

解 函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, +\infty)$.

当 $0 \leq x \leq 1$ 时, 有 $0 \leq f(x) = 2\sqrt{x} \leq 2$; 当 $x > 1$ 时, 有 $f(x) = 1+x > 2$, 故 $f(x)$ 的值域为 $[0, +\infty)$.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}.$$

当 $0 < t < 1$ 时, 则 $\frac{1}{t} > 1$, 从而 $f\left(\frac{1}{t}\right) = 1 + \frac{1}{t}$; 当 $t \geq 1$ 时, 则 $0 < \frac{1}{t} \leq 1$, 从而

$$f\left(\frac{1}{t}\right) = 2\sqrt{\frac{1}{t}} = \frac{2}{\sqrt{t}}, \text{ 故 } f\left(\frac{1}{t}\right) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{t}, & 0 < t < 1 \\ \frac{2}{\sqrt{t}}, & t \geq 1 \end{cases}.$$

8. 证明: 函数 $y = -x^2 + 1$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 内单调增加, 在区间 $[0, +\infty)$ 内单调减少.

证 对任意的 $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$ 且 $x_1 < x_2$, 有

$$f(x_1) - f(x_2) = (-x_1^2 + 1) - (-x_2^2 + 1) = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) < 0,$$

所以 $f(x_1) < f(x_2)$, 故函数 $y = -x^2 + 1$ 在区间 $(-\infty, 0]$ 内单调增加.

对任意的 $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ 且 $x_1 < x_2$, 有

$$f(x_1) - f(x_2) = (-x_1^2 + 1) - (-x_2^2 + 1) = x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) > 0,$$

所以 $f(x_1) > f(x_2)$, 故函数 $y = -x^2 + 1$ 在区间 $[0, +\infty)$ 内单调减少.

9. 证明函数 $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ 在它的整个定义域内有界.

证 对任意的 $x \in (-\infty, +\infty)$ 有 $|f(x)| = \left| \frac{x}{x^2 + 1} \right| \leq \left| \frac{x}{2x} \right| = \frac{1}{2}$, 故函数 $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ 在它的整个定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内有界.

10. 判断下列函数的奇偶性

$$(1) f(x) = x \sin x + \cos x \quad (2) f(x) = \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| \quad (3) f(x) = 2x^4 + 3x^3 + 1$$

解 (1) $f(-x) = (-x) \sin(-x) + \cos(-x) = x \sin x + \cos x = f(x)$, 故 $f(x) = x \sin x + \cos x$ 为偶函数.

(2) $f(-x) = \ln \left| \frac{1-(-x)}{1+(-x)} \right| = \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| = \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right|^{-1} = -\ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| = -f(x)$, 故 $f(x) = \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right|$ 为奇函数.

(3) $f(-x) = 2(-x)^4 + 3(-x)^3 + 1 = 2x^4 - 3x^3 + 1$, 有 $f(-x) \neq -f(x)$ 且 $f(-x) \neq f(x)$, 故 $f(x) = 2x^4 + 3x^3 + 1$ 既不是奇函数也不是偶函数.

11. 求函数 $y = \ln(x+2) - 3$ 的反函数.

解 由 $y = \ln(x+2) - 3$ 可知 $\ln(x+2) = y+3$, 因此 $x+2 = e^{y+3}$, 故 $x = e^{y+3} - 2$, 所以