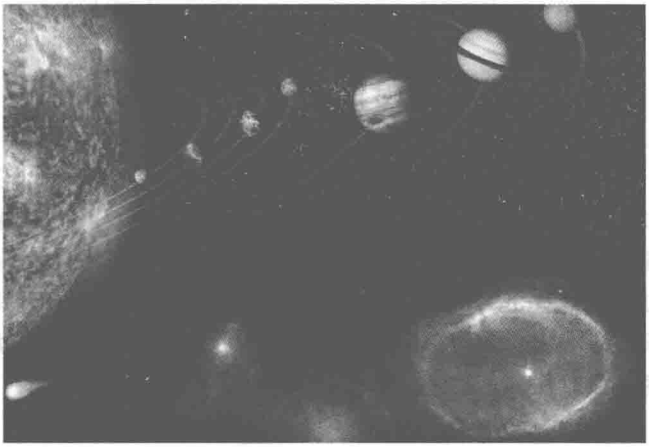


第1章 质点运动学

唯物论、辩证法、认识论告诉我们，世界是物质的，物质是运动的，运动是有规律的，规律是可以被认知的。我们生活在一个永恒运动着的物质世界中，正如亚里士多德所言，“不了解运动，就不了解自然。”机械运动是物质世界中最简单、最基本的运动形式，运动学研究的正是低速宏观运动物体所作的机械运动的规律，即研究物体的空间位置随时间的变化规律，本章不涉及引起物体运动状态改变的原因。

1.1 质点运动的描述

1.1.1 运动的绝对性和运动描述的相对性

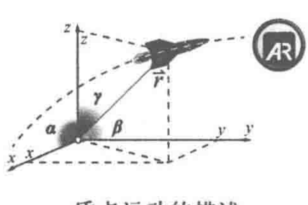
自然界中的一切物体都处于运动之中。小到原子、分子,大到星系,无一不在运动着,绝对静止的物体是不存在的,这就是运动的**绝对性**。物体相对于不同标准物所表现出的运动状态是不同的,因此描述物体的运动必须指明其参考的标准物,离开环境谈运动是没有意义的,这就是**运动描述的相对性**。

1.1.2 参考系

由于一切物体都处于永恒的运动之中,物体所处的空间位置会随着时间的推移而发生改变,因此观察者在描述物体空间位置及位置的变化时首先要选定参考的标准物,然后研究物体相对于参考标准物的运动。这个被选定的参考标准物(参考对象)称为**参考系**。

1.1.3 坐标系

要精确地描述物体的运动,需要定量地确定物体在任意时刻相对于参考系的位置,因此,在选定参考系之后,需要在参考系上建立**坐标系**。根据具体运动形式及研究的需要,可以建立直角坐标系、极坐标系、自然坐标系等。



质点运动的描述

1.1.4 质点

物体具有大小和形状,一般情况下,物体在运动时,其内部各点的位置变化是不同的,且其形状及大小也可能发

生改变；另外其形状大小也会对其自身的运动产生影响。但是，在一些问题中，当物体的大小、形状与所研究的问题无关，或者影响不大时，可以忽略物体的形状、大小，将其抽象为只具有质量而不具有大小的点，这种理想化的物理模型就称为质点。

1.1.5 位置矢量

在参考系中，从坐标原点 O 指向质点所在位置 P 的有向线段 $\boldsymbol{r}$，称为位置矢量，简称位矢。如图 1.1 所示。

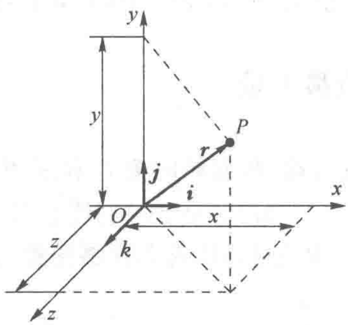


图 1.1　直角坐标系下的位置矢量示意图

在直角坐标系中，位矢 $\boldsymbol{r}$ 可以表示为（矢量关系是）

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

位置矢量 $\boldsymbol{r}$ 的大小为

$$|\boldsymbol{r}|=r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

位矢 $\boldsymbol{r}$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{x}{r},\quad \cos\beta=\frac{y}{r},\quad \cos\gamma=\frac{z}{r}$$

式中 α、β、γ 分别是位矢 $\boldsymbol{r}$ 与 Ox 轴、Oy 轴和 Oz 轴之间的夹角。

1.1.6 运动方程

质点运动时，它的位矢 $\boldsymbol{r}$ 会随时间改变，即位矢 $\boldsymbol{r}$ 是时

间 t 的函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$,这个函数就是质点的**运动方程**。即

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}$$

也可以写作分量表达式

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t)$$

运动学的重要任务之一就是确定质点运动所遵循的运动方程

将运动方程的分量式联立消去参数 t,可以得到质点运动的**轨迹方程**,

$$F(x,y,z)=0$$

对应的曲线即为质点运动的轨迹,也就是质点的位置矢量的矢端所画出的曲线(这里指的曲线包含直线)。

1.1.7 位移矢量

质点沿轨迹运动,从起始时刻 t_1 位于点 A,经过 Δt 时间,即 t_2(或者是 $t_1+\Delta t$)时刻运动到终止点 B,则由始点 A 指向终点 B 的有向线段 AB 称为**位移矢量 $\Delta\boldsymbol{r}$**,简称位移。

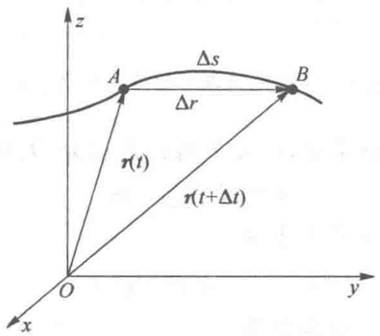


图 1.2 直角坐标系下的位移矢量与路程示意图

显然,位移矢量就是位置矢量的增量

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1$$

其中

$$\boldsymbol{r}_1=x_1\boldsymbol{i}+y_1\boldsymbol{j}+z_1\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{r}_2=x_2\boldsymbol{i}+y_2\boldsymbol{j}+z_2\boldsymbol{k}$$

位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 也可以写成

$$\Delta \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=(x_2-x_1)\boldsymbol{i}+(y_2-y_1)\boldsymbol{j}+(z_2-z_1)\boldsymbol{k}$$
$$=\Delta x\boldsymbol{i}+\Delta y\boldsymbol{j}+\Delta z\boldsymbol{k}$$

位移的大小为

$$|\Delta \boldsymbol{r}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

(1) 位移反映物体空间位置的变化，与路径无关，只与质点的始末位置有关。

(2) 位矢依赖于坐标系原点的选取，而位移与坐标系原点的选取无关。

质点在其实际运动轨迹中经过的路径长度称为**路程**，即曲线$\overset{\frown}{AB}$的长度，通常记为 Δs。

需要注意的是：

(1) 位移是矢量，路程是标量。

(2) A、B 两点间的路程可以是不唯一的，而位移必定是唯一的。

(3) 位移的大小一般并不等于路程。仅在时间间隔很短的情况下，两者才相等，即当 $\Delta t\to 0$ 时，

$$|\Delta \boldsymbol{r}|=\Delta s$$

位移和路程的单位均是长度的单位，其单位在国际单位制(SI 制)中为 m(米)。

1.1.8 速度

质点通过 Δt 时间产生了 $\Delta \boldsymbol{r}$ 的位移，用质点位移 $\Delta \boldsymbol{r}$ 与相应时间 Δt 的比值来表示在这段时间内质点位置变化的快慢程度，这个比值叫作质点在该时间段内的**平均速度**，用 $\overline{\boldsymbol{v}}$ 来表示，即

$$\overline{\boldsymbol{v}}=\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$$

式中位移是矢量，时间是标量，因此平均速度是矢量，其方向与位移方向一致。

此外，可以用质点实际运动的路程 Δs 与所用时间 Δt 的比值来描述质点沿轨迹运动的平均快慢程度，该比值被称为**平均速率**，用 $\overline{v}$ 来表示，即

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

$$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

平均速率是标量,它的大小等于质点在单位时间内所经过的路程。

一般情况下,位移的大小与路程不相等,因此,平均速度的大小与平均速率一般也不相等。只有在特定情况下,如单方向直线运动,平均速度的大小才等于平均速率。

为精确地描述质点在任意时刻或轨迹上任意位置的运动情况,需要将平均速度中的时间间隔 Δt 的值取得尽量小,即 $\Delta t \to 0$,此时得到的是平均速度的极限值,其表达式为

$$\boldsymbol{v}=\lim\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

式中的 $\boldsymbol{v}$ 称为质点在 t 时刻的**瞬时速度**(简称**速度**)。从上式中可以看出瞬时速度等于位置矢量对时间的一阶导数。瞬时速度是矢量,它的方向就是当时间间隔 Δt 趋近于零时,平均速度$\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}$的极限方向。

在直角坐标系中,瞬时速度(速度)可表示成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}&=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}\\&=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}=\boldsymbol{v}_x+\boldsymbol{v}_y+\boldsymbol{v}_z\end{aligned}$$

可见,速度在 x,y,z 轴的分量分别为

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\quad v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\quad v_z=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

则速度的大小可以表示为

$$v=|\boldsymbol{v}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}$$

可以通过对平均速度取在 $\Delta t\to 0$ 的情况下的极限值得到**瞬时速率**。

在时间间隔很短的情况下,即 $\Delta t\to 0$ 的极限条件下,曲线$\overset{\frown}{AB}$的长度 Δs 与直线 AB 的长度 $|\Delta \boldsymbol{r}|$ 相等,即在 $\Delta t\to 0$ 时,$\mathrm{d}s=|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|$,所以瞬时速率

$$v=\lim\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{|\mathrm{d}\boldsymbol{r}|}{\mathrm{d}t}=|\boldsymbol{v}|$$

可见,瞬时速率等于瞬时速度的大小。

速度和速率都是长度与时间的比值,它们的单位在国

际单位制中为 $\mathrm{m\cdot s^{-1}}$(米每秒)。

1.1.9 加速度

加速度是描述速度随时间的变化率的物理量。

质点沿轨迹运动,从起始时刻 t_1 位于点 A,速度为 $\boldsymbol{v}_1$,经过 Δt 时间,即 t_2(或者是 $t_1+\Delta t$)时刻运动到终止点 B,速度为 $\boldsymbol{v}_2$,则在 Δt 时间间隔里,速度的变化量为

$$\Delta \boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{v}_1$$

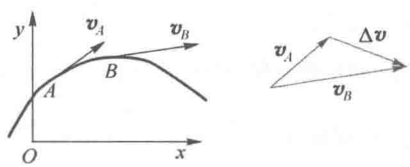


图 1.3 直角坐标系下的速度变化量的示意图

从图 1.3 中可以看出,在 Δt 内速度的大小和方向都发生了变化。则在该时间间隔内的平均加速度为

$$\overline{\boldsymbol{a}}=\frac{\boldsymbol{v}_B-\boldsymbol{v}_A}{\Delta t}=\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}$$

为精确地描述质点在任意时刻或轨迹上任意位置的加速度,需要将平均加速度中的时间间隔 Δt 的值取得尽量小,即 $\Delta t\to 0$,此时得到的是平均加速度的极限值,即**瞬时加速度**,其数学表达式为

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

从上式中可以看出瞬时加速度(简称加速度)是速度对时间的一阶导数,也是位置矢量对时间的二阶导数。

在直角坐标系中,加速度的表达式为

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$$

可见,加速度在 x,y,z 轴上的分量式分别为

$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},\quad a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2},\quad a_z=\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}$$

则加速度的大小可以表示为

$$a=|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

加速度的方向是当 $\Delta t\to 0$ 时，速度增量的极限方向。

在国际单位制中，平均加速度和瞬时加速度的单位为 $\mathrm{m\cdot s^{-2}}$（米每二次方秒）。

例 1-1 已知某物体的运动满足方程

$$\begin{cases} x=3\sin\dfrac{\pi}{6}t \\ y=3\cos\dfrac{\pi}{6}t \end{cases}$$

求：(1) 轨迹方程；(2) 从 $t=0$ s 时刻到 $t=3$ s 时刻，物体的路程和位移；(3) 从 $t=0$ s 时刻到 $t=3$ s 时刻，物体的平均速度；(4) $t=3$ s 时的瞬时速度。

解 (1) 将方程中两式联立，消掉时间参数 t，得到轨迹方程为

$$x^2+y^2=9$$

(2)

$$t=0,\quad x=0,\quad y=3,\quad \boldsymbol{r}_A=3\boldsymbol{j}，\text{位于 } A \text{ 点}$$
$$t=3,\quad x=3,\quad y=0,\quad \boldsymbol{r}_B=3\boldsymbol{i}，\text{位于 } B \text{ 点}$$

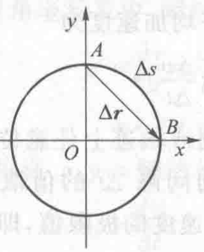


图 1.4

如图 1.4 所示，路程为 $\overset{\frown}{AB}$，即为四分之一圆周长，即 1.5π。

位移为：

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_B-\boldsymbol{r}_A=3\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}\ \mathrm{m}$$
$$|\Delta\boldsymbol{r}|=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}=3\sqrt{2}\ \mathrm{m}$$
$$\alpha=\arctan\frac{\Delta y}{\Delta x}=\arctan(-1)=315^\circ=-45^\circ$$

(3) 平均速度 $$\bar{v}=\frac{\Delta\boldsymbol{r}}{\Delta t}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

(4) 瞬时速度 $$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}$$
$$=\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}\boldsymbol{i}-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}\boldsymbol{j}=-\frac{2}{\pi}\boldsymbol{j}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

例 1－2　已知一质点的运动方程为 $\boldsymbol{r}=3t\boldsymbol{i}-4t^2\boldsymbol{j}$，式中 r 以 m 计，t 以 s 计，求质点运动的轨迹方程、速度和加速度。

解　将运动方程写成分量式

$$x=3t,\quad y=-4t^2$$

消去参数 t 得轨迹方程

$$4x^2+9y=0$$

由速度定义得

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=3\boldsymbol{i}-8t\boldsymbol{j}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

其大小为 $v=\sqrt{9+64t^2}$，与 x 轴的夹角 $\theta=\arctan\left(-\frac{8t}{3}\right)$。

由加速度的定义得

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-8\boldsymbol{j}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

即加速度的方向沿 y 轴负方向，大小为 $8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$。

例 1－3　一质点沿 x 轴运动，其加速度 $a=-kv^2$，式中 k 为正常数。设 $t=0$ 时，$x=0$，$v=v_0$，

(1) 分别求 v 和 x 关于 t 的函数表达式；

(2) 求 v 关于 x 的函数表达式。

解　(1)因为 $\mathrm{d}v=a\mathrm{d}t=-kv^2\mathrm{d}t$，分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}v}{v^2}=-k\mathrm{d}t$$

积分得

$$\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v^2}=-k\int_0^t\mathrm{d}t$$

即

$$\frac{1}{v}-\frac{1}{v_0}=kt$$

得

$$v=\frac{v_0}{1+v_0kt}$$

再由 $\mathrm{d}x=v\mathrm{d}t$，将 v 的表达式代入，积分得

$$\int_0^x\mathrm{d}x=\int_0^t\frac{v_0\,\mathrm{d}t}{1+v_0kt}$$

于是

$$x=\frac{1}{k}\ln(1+kv_0t)$$

(2) 因为

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

所以有
$$\frac{v\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=-kv^2$$

分离变量,并积分有

$$-\int_0^x k\mathrm{d}x=\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v}$$

整理得
$$v=v_0\mathrm{e}^{-kx}$$

1.2 切向加速度 法向加速度

大多数质点的运动轨迹是曲线,有时可以采用自然坐标系来描述质点的运动。

沿质点运动轨迹建立一个弯曲的坐标轴,选择轨迹上任意点为坐标原点,从坐标原点至质点位置的轨迹长度用 s 表示,称为质点的自然坐标。在该坐标轴上沿着运动轨迹的切线并指向质点前进方向为该坐标轴的切向,其单位向量为 $\boldsymbol{e}_\tau$;沿着该坐标轴的法线方向并指向曲线凹侧的为该坐标轴的法向,其单位向量为 $\boldsymbol{e}_\mathrm{n}$。这种坐标系就称为自然坐标系。如图 1.5 所示。可以利用自然坐标系来分析质点的运动。

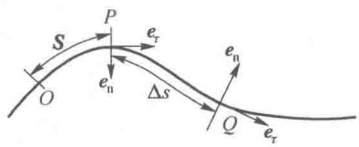


图 1.5 自然坐标系示意图

瞬时速度是矢量,它的方向即质点沿着运动轨迹在 t 时刻所处位置的切线方向,并指向质点前进的一侧。即

$$\boldsymbol{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\tau$$

质点在 t 时刻位于运动轨迹的 P 点,速度为 $\boldsymbol{v}_1$;$t+\Delta t$

时刻，质点运动到 Q 点，速度为 $\boldsymbol{v}_2$，在 Δt 时间内，速度增量为 $\Delta\boldsymbol{v}$。$\boldsymbol{v}_1$，$\boldsymbol{v}_2$，$\Delta\boldsymbol{v}$ 三者之间的关系如图 1.6 所示。

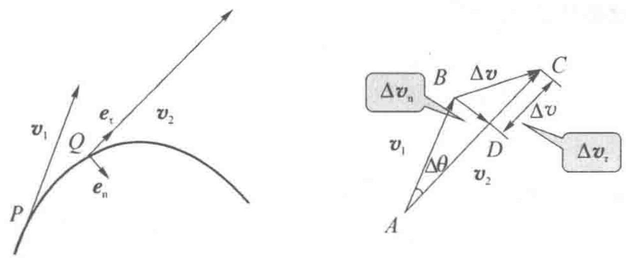


图 1.6　速度变化量在自然坐标系中的分解示意图

在 $\overrightarrow{AC}$ 上截取 $|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{AB}|=|\boldsymbol{v}_1|$，连接 $\overrightarrow{BD}$，当 $\Delta t\to 0$ 时，Q 点无限接近 P 点，$\overrightarrow{BD}$ 方向无限接近该点的切线方向，$\overrightarrow{AC}$ 为该点的法线方向，可以看出 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}$，即

$$\Delta\boldsymbol{v}=\Delta\boldsymbol{v}_\tau+\Delta\boldsymbol{v}_n$$

加速度也可以按照切线方向和法线方向进行分解，这样得到的加速度分量分别叫作**切向加速度和法向加速度**，相应的符号为 $\boldsymbol{a}_\tau$ 和 $\boldsymbol{a}_n$。则

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_\tau+\boldsymbol{a}_n$$

$$\boldsymbol{a}=\lim\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\lim\frac{\Delta\boldsymbol{v}_\tau}{\Delta t}+\lim\frac{\Delta\boldsymbol{v}_n}{\Delta t}$$

由于 $|\overrightarrow{DC}|=|\overrightarrow{AC}|-|\overrightarrow{AB}|=|\boldsymbol{v}_2|-|\boldsymbol{v}_1|=\Delta v$，则 $\boldsymbol{a}_\tau=a_\tau\boldsymbol{e}_\tau=\lim\frac{\Delta v_\tau}{\Delta t}\boldsymbol{e}_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_\tau$，所以切向加速度反映了速度大小随时间的变化率。

由于 $|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{AB}|$，所以法向加速度仅表征速度方向的变化，$\Delta\theta\to 0$ 时，$|\Delta\boldsymbol{v}_n|=v\Delta\theta$，则 $\boldsymbol{a}_n=a_n\boldsymbol{e}_n=\lim\frac{\Delta v_n}{\Delta t}\boldsymbol{e}_n=v\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_n=v\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\boldsymbol{e}_n=v^2\frac{1}{\rho}\boldsymbol{e}_n=\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{e}_n$。（式中 $\rho=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}$ 为质点运动轨迹上的 P 处曲率圆的曲率半径。）

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

例 1-4 一质点沿半径为 1 m 的圆周运动,它通过的弧长 s 按 $s=t+2t^2$ 的规律变化。则它在 2 s 时刻的速率、切向加速度和法向加速度各是多少?

解 由速率定义,有

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=1+4t$$

将 $t=2$ s 代入,得 2 s 时刻的速率为

$$v=1+4\times 2\ (\mathrm{m\cdot s^{-1}})=9\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

其法向加速度为

$$a_{\mathrm{n}}=\frac{v^2}{R}=81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

由切向加速度的定义,得 $a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=4\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$,为一常数,即 2 s 末的切向加速度为 $4\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$。

例 1-5 一质点在 Oxy 平面内运动,其运动方程为 $\boldsymbol{r}=2t\boldsymbol{i}+(19-2t^2)\boldsymbol{j}$。求:(1)$t=1$ s 时的速度及加速度;(2)$t=1$ s 时的切向和法向加速度;(3)$t=1$ s 时质点所在处轨道的曲率半径。

解 (1) 瞬时速度

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}=2\boldsymbol{i}-4t\boldsymbol{j}$$

瞬时加速度

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-4\boldsymbol{j}$$

将 $t=1$ 代入,得到

$$\boldsymbol{v}_1=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}(\mathrm{m\cdot s^{-1}}),\quad \boldsymbol{a}_1=-4\boldsymbol{j}(\mathrm{m\cdot s^{-2}})$$

(2) 瞬时速率为

$$v=\sqrt{4+16t^2}$$

切向加速度为

$$a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{8t}{\sqrt{1+4t^2}}$$

法向加速度为

$$a_{\mathrm{n}}=\sqrt{a^2-a_\tau^2}=\frac{4}{\sqrt{1+4t^2}}$$

将 $t=1$ 代入,得到

$$a_{\tau 1}=3.58\ \mathrm{m/s^2},\quad a_{n1}=1.79\ \mathrm{m/s^2}$$

(3) 由法向加速度的公式可以得到曲率半径为

$$\rho=\frac{v_1^2}{a_{n1}}=\frac{20}{1.79}=11.17\ \mathrm{m}$$

1.3 相对运动

在研究质点运动时,选择不同的参考系,描述的结果会不同。比如,在公路上匀速直线运动的车厢里进行的小球上抛实验,车厢里的观察者看到的小球的运动状态为上抛运动,而公路旁的观察者看到的小球为斜抛运动。由于速度是运动学方程对时间的导数,因此要研究在不同参考系里对同一个质点运动描述之间的关系,需要先明确不同参考系之间的时空关系。

如图1.7所示,有两个惯性参考系 $S(Oxyz)$ 和 $S'(O'x'y'z')$,其对应坐标轴相互平行,x 与 x' 轴重合,且 S' 系相对 S 系以速度 $\boldsymbol{u}$ 沿 Ox 轴的正方向作匀速直线运动。开始时(即 $t=t'=0$),两惯性参考系重合。由经典力学可知,在 t 时刻点 P 在这两个惯性系中的位置坐标有如下关系:

$$\begin{cases} x=x'+ut \\ y=y' \\ z=z' \\ t=t' \end{cases}$$

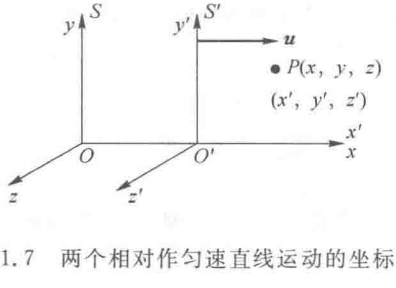


图1.7　两个相对作匀速直线运动的坐标系

这就是两个相对作低速匀速直线运动参考系的时空变换关系,称为**伽利略坐标变换式**。

根据伽利略坐标变换式,在 S 系中的两个事件分别发生在 t_1 时刻和 t_2 时刻,在 S'系中观察其分别发生在 t_1'时刻和 t_2'时刻,则两个事件发生的时间间隔 $\Delta t' = t_2' - t_1' = t_2 - t_1 = \Delta t$,即两个事件在两惯性系中的时间间隔都相同。即**在经典时空观中时间间隔的测量是绝对的,与观察者所处的参考系无关。**

同理可见,两个物理事件位置间隔测量在 S 参考系和 S'参考系中的测量也是相同的,**即在经典时空观中空间间隔的测量是绝对的,与观察者所处的参考系无关。**

将上式中的空间分量对时间求导,可以得到:

$$\begin{cases} v_x = v_x' + u \\ v_y = v_y' \\ v_z = v_z' \end{cases}$$

其中 v_x, v_y, v_z 是点 P 对于 S'系的速度分量;v_x', v_y', v_z'是点 P 对 S 系的速度分量,这就是**伽利略速度变换公式**。

如果选取 S 为基本参考系,则 S'就是相对其运动的相对参考系。“基本参考系”和“运动参考系”的称谓都是相对的。一般情况下,在研究地面上物体的运动时,把地面定义为静止参考系比较方便,而把相对于地面运动的车船等视为运动参考系;当研究宇宙飞船发射时,则需把太阳作为静止参考系而把地球作为运动参考系。质点相对于基本参考系的速度 $\boldsymbol{v}$ 称为**绝对速度**,质点相对于运动参考系的速度 $\boldsymbol{v}'$称为**相对速度**。运动参考系相对于静止参考系的速度 $\boldsymbol{u}$ 称为**牵连速度**。则

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{u}$$

将伽利略速度变换式对时间再求一次导数,得到 S 和 S'系加速度变换关系为

$$\begin{cases} a_x = a_x' \\ a_y' = a_y \Rightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' \\ a_z = a_z' \end{cases}$$

该式说明在任一时刻,质点在所有惯性参考系中加速度是相同的。

例 1-6 无风的下雨天，一火车以 20 m/s 的速度前进，车内旅客看见玻璃窗上的雨滴和铅垂线成 75°角下降，求雨滴下落的速度(设下降的雨滴作匀速运动)。

解 以地面为参照系，火车相对地面运动的速度为 $\boldsymbol{u}$，雨滴相对于地面的运动速度为 $\boldsymbol{v}$，旅客看到雨滴下落的速度为雨滴相对于火车的运动速度 $\boldsymbol{v}'$，如图 1.8 所示，则

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{u}$$

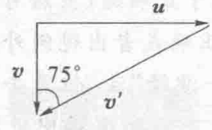


图 1.8

$$\tan 75^\circ=\frac{u}{v}$$

$$v=\frac{u}{\tan 75^\circ}=\frac{20}{\tan 75^\circ}=5.36\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

阅读材料一

伽利略与牛顿的科学方法

真正代表近代科学方法论精神的既不是培根也不是笛卡儿，而是伽利略和牛顿。伽利略最先倡导并实践实验加数学的方法，但是他所谓的实验并不是培根意义上的观察实验，而是理想化的实验。地球上的任何力学实验都不能避免摩擦力的影响，但要认识基本的力学规律，首先要从观念上排除这种摩擦力。这就需要全新的概念体系来支撑将做的实验，包括设计、实施和解释实验结果。只有这种理想化的实验才可能与数学处理相配套。

伽利略的研究程序可以分为三个阶段：直观分解、数学演绎、实验证明。面对着无比复杂的自然界，我们首先要通过直观隔离出一些标准样本，将这些样本完全翻译成数学上容易处理的量，然后由这些量通过数学演绎推出其他一些现象，再用实验来验证这些现象是否确实如此。在伽利略的科学方法论中，第一步即直观分解相当重要。它意味着将一个无比丰富复杂的感性自然界通过直观翻译成简单明了的数学世界，而这就是将自然数学化。全部近代物理科学都是建立在自然的数学化基础上的。正是在这一点上，伽利略当之无愧地成为近代物理学之父。

牛顿的方法论集中载于《自然哲学的数学原理》一书的第三篇的开头，名为“哲学中的推理法则”，共有四条：

法则 1　除那些真实而已足够说明其现象者外,不必去寻求自然界事物的其他原因。

法则 2　对于自然界中同一类结果,必须尽可能归之于同一种原因。

法则 3　物体的属性,凡既不能增强也不能减弱,又为我们实验所能及的范围内的一切物体所具有者,就应视为所有物体的普遍属性。

法则 4　在实验哲学中,我们必须把那些从各种现象中运用一般归纳而导出的命题看作是完全正确的,或者是非常接近于正确的;虽然可能想象出任何与之相反的假说,但是没有出现其他现象足以使之更为正确或者出现例外之前,仍然应当给予如此的对待。

牛顿的方法可以称之为"归纳—演绎"法,但是牛顿完全不同意笛卡儿的"先天—演绎法"。他认为,"虽然用归纳法来从实验和观察中进行论证不能算是普遍的结论,但它是事物的本性所许可的最好的论证方法,并且随着归纳的愈为普遍,这种论证看来也愈为有力。"因此他十分重视归纳,但这不意味着他忽视数学演绎,相反,他的公理法是构成牛顿力学体系的根本方法。与从前的演绎法不同的是,牛顿认为演绎的结果必须重新诉诸实验确证。可以看出,在伽利略和牛顿这样的近代科学大师那里,实验观察与数学演绎是十分紧密地结合在一起的。

节选自吴国盛《科学的历程》,北京大学出版社,2002 年 10 月第一版 238 页。

本章提要

掌握位置矢量、位移、速度、加速度等描述质点运动及运动变化的物理量。理解这些物理量的矢量性、瞬时性和相对性。掌握运用运动方程确定质点的位置、位移、速度和加速度的方法,以及已知质点运动的加速度和初始条件求速度、运动方程的方法。理解质点在平面内作曲线运动时的切向加速度和法向加速度的概念。理解运动描述的相对性和伽利略速度变换式,能计算简单的质点相对运动问题。

位矢

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

位移

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1=\Delta x\boldsymbol{i}+\Delta y\boldsymbol{j}+\Delta z\boldsymbol{k}$$

速度

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$$

加速度

$$\boldsymbol{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

切向加速度

$$\boldsymbol{a}_{\tau}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_{\tau}$$

法向加速度

$$\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}=\frac{v^2}{\rho}\boldsymbol{e}_{\mathrm{n}}$$

质点运动相对于不同参考系的速度关系

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{u}$$

习题 1

1.1 一质点在 Oxy 平面上运动，运动方程为 $x=3t+5$，$y=\frac{1}{2}t^2+3t-4$。式中 t 以 s 计，x，y 以 m 计。

(1) 以时间 t 为变量，写出质点位置矢量的表达式；

(2) 求出 $t=0$ s 时刻和 $t=4$ s 时刻的位置矢量，计算这 4 s 内质点的位移；

(3) 计算 $t=0$ s 时刻到 $t=4$ s 时刻内的平均速度；

(4) 求出质点速度矢量表达式，计算 $t=4$ s 时质点的速度；

(5) 计算 $t=0$ s 到 $t=4$ s 内质点的平均加速度；

(6) 求出质点加速度矢量的表达式。

1.2 一质点沿直线运动，运动方程为 $x(t) = 6t^2 - 2t^3$。试求：

(1) 第 2 s 内的位移和路程；

(2) 1 s 末及 2 s 末的瞬时速度，第 2 s 内的平均速度；

(3) 1 s 末的瞬时加速度和第 2 s 内的平均加速度。

1.3 某人散步，先向东走，用了 25 s 走了 30 m，然后向南走，用了 10 s 走了 10 m，然后向正西北走，用了 15 s 走了 18 m，现以其出发点为坐标原点，以其出发时刻为零时刻，求其在 50 s 内：

(1) 总的位移和平均速度的大小及方向；

(2) 总的路程和平均速率的大小及方向。

1.4 已知一质点的运动方程为 $\boldsymbol{r}=2t\boldsymbol{i}+(2-t^2)\boldsymbol{j}$，方程中 $\boldsymbol{r}$ 的单位为 m，t 的单位为 s。求：

(1) 该质点的轨迹方程；

(2) $t=0$ s 及 $t=2$ s 时刻质点的位矢；

(3) 从 $t=0$ s 到 $t=2$ s 时间段内质点的位移 $\Delta\boldsymbol{r}$ 和径向增量 Δr（位置矢量大小的变化量）；

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com