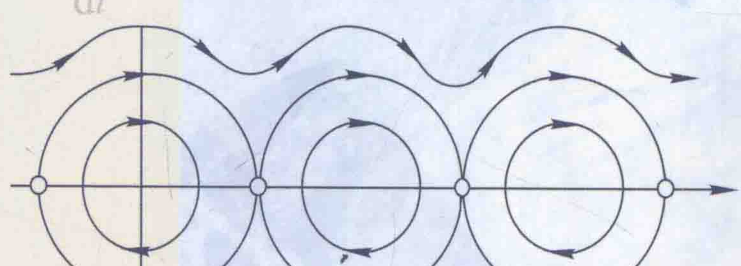
Ordinary
Differential
Equation

常微分方程

浙江大学
方道元
薛儒英 编著

$$ml\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+mg\sin\theta=0$$



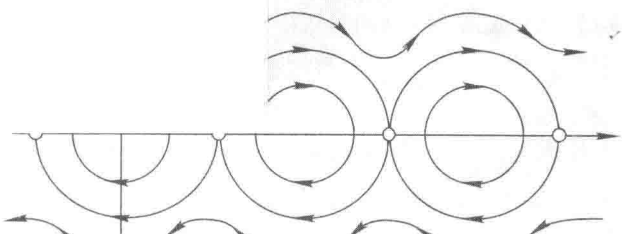
高等教育出版社

Ordinary
Differential
Equation

常微分方程

浙江大学
方 道 元
薛 儒 英
编著

$mg\sin\theta = 0$



高等教育出版社·北京

内容提要

本书在介绍了高等学校数学与应用数学以及计算数学专业常微分方程所需的基本内容外，还涵盖了一些拓展内容（用＊号标出），以满足想进一步学习和思考的读者选用。书中系统地介绍了微分方程的求解方法；线性方程组或高阶方程的解的结构和求解方法；一般方程的局部和整体解的各种存在、唯一性定理以及各种解的连续依赖性，解的延拓以及解的存在区间估计等的理论和技巧；稳定性理论和定性理论；混沌知识初步；一阶线性和非线性偏微分方程等。在各章的后面都以巩固和提高的形式配备了一定数量的习题，供不同要求的读者练习。针对课程特点，我们在叙述的过程中比较注重抽象的数学形式的处理和对概念的直觉理解之间的联系，使得读者更容易理解内容本质。

本书可作为高等学校数学类专业常微分方程课程的教材，也可供其他希望了解常微分方程理论的读者参考。

图书在版编目（CIP）数据

常微分方程 / 方道元，薛儒英编著. -- 北京：高等教育出版社，2017.7

ISBN 978-7-04-047425-1

Ⅰ. ①常… Ⅱ. ①方… ②薛… Ⅲ. ①常微分方程－高等学校－教材 Ⅳ. ①O175.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 024758 号

策划编辑 胡 颖　　责任编辑 胡 颖　　封面设计 赵 阳　　版式设计 马敬茹
插图绘制 杜晓丹　　责任校对 胡美萍　　责任印制 田 甜

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印　　刷 三河市吉祥印务有限公司
开　　本 787mm×960mm 1/16
印　　张 25.5
字　　数 460 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
　　　　 http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.hepmall.com.cn
　　　　 http://www.hepmall.com
　　　　 http://www.hepmall.cn
版　　次 2017 年 7 月第 1 版
印　　次 2017 年 7 月第 1 次印刷
定　　价 47.20 元

物 料 号 47425-00

前　言

我们知道科学研究的终极目标是为了认识世界和改造世界, 而在这个过程中的数学处理方法则是解决问题的关键。简单的空间形式和数量关系可以用基于平均平台的数学知识来描述, 但人们若要更细致、更精确地认识自然界或物质运动的规律就必须进入瞬时平台, 即必须用微分的观点来刻画物质运动的瞬时关系。而这样的关系往往就是微分方程。正是出于这样的原因, 三四百年来微分方程一直处于数学中位于首要分支的分析学科的心脏地位, 也是高等分析中大部分思想和内容的源泉。凡是要用无穷小分析方法研究的对象, 大多数都离不开微分方程。微分方程的发展也离不开如分析、代数、拓扑、几何等分支的支持, 同时微分方程的发展又推动了其他分支的发展。因此, 微分方程无疑是一门重要的基础课程。

针对这样一门重要课程, 如何在仅有数学分析 (微积分) 和高等代数 (线性代数) 基础的读者面前处理好所涉内容本身就是一门学问。我们知道作为分析是严格的, 所有的理论都要求有高标准的严格证明。但对这样一门紧密联系应用的初等分析课程来说, 如果一味追求这一点就会导致只剩下理论的空壳。所以我们将本书定位于帮助读者掌握微分方程的思想实质, 内容表述具有一定严密性的同时尽可能使人易懂。这样可以使得课程在具有思想性的同时在所涉内容上具有丰富性和易拓展性。

本书结合作者十多年来为浙江大学数学理科人才培养基地和竺可桢学院理科班本科生的授课经验, 以出版于 2008 年的《常微分方程》教材为基础, 参考国内外一些同类教材, 经过反复讨论、多次修改编写而成。书中有些章节除了提供必须掌握的主要内容外, 还给出一些进一步学习和思考的材料, 如分支现象以及混沌现象等, 我们都以 * 号标出。本书可以作为综合性大学或师范类院校数学类专业本科生常微分方程课程的教材或教学参考书。

在本书的第一章, 我们结合一些来自于人口学和物理学中简单的微分方程建模的例子, 介绍有关常微分方程的基本概念, 让读者通过这些例子了解用数学理论解决实际问题的全过程, 即建模、求解、检验、评价、修正、再检验、再评价等。

我们在第二章着重介绍一些重要的一阶微分方程求解方法的同时, 更注重

方程的性质归纳和描述以及对非线性现象的认识, 为初学者在概念的理解和一般理论的学习中提供具体的模型。在介绍求解方法的过程中我们从微积分基本定理出发, 将各种求解方法统一在全微分式的框架下。

第三章介绍的是微分方程的一般理论, 是微分方程的核心内容。本书中我们在理论上有所加强, 介绍了微分方程理论研究的基本思想和方法, 以期让有志于从事理论研究的读者不论在内容还是在方法上都能有比较扎实的基础。在这一章中我们重点介绍一阶微分方程初值问题解的局部与整体存在性和唯一性, 解的延拓, 解的存在区间的估计以及解对初值和参数的连续性和可微性等问题。在基本定理的证明中, 以初值问题的几何性质为基础, 利用迭代逼近法和 Gronwall 不等式, 希望读者不仅能充分理解定理的内容, 了解证明的思想方法, 同时还能熟练掌握一些在现代微分方程理论研究中仍充满活力的重要方法。

线性微分方程组和高阶线性微分方程有类似的基本理论, 线性微分方程(组)初值问题与边值问题的研究都是以解的结构定理为共同基础, 把它们合在一起统一处理显得更合理和更简洁, 有利于读者从整体上把握线性微分方程理论。Laplace 变换法的理论基础属于复变函数学科, 但用它求解微分方程初值问题能有更宽的适用面, 而且在揭示解的结构方面有着独特启示, 所以我们有意介绍这一方法。但是常微分方程课程一般比复变函数先开, 为解决这一矛盾, 我们在介绍 Laplace 变换时, 并不强调它的严格数学理论, 而是侧重于介绍它的简单性质以及如何用这些性质来求解一些在应用上很重要的微分方程模型。

与线性微分方程有本质的不同, 非线性微分方程绝大多数是不可解的, 这就提出如何仅从微分方程本身的结构来判断方程解的性态问题, 即微分方程的稳定性和定性理论。这是常微分方程理论中仍在不断发展的研究领域, 也是目前非常活跃的非线性科学最主要的研究分支之一。鉴于它在理论上和应用上的重要价值, 我们除在第五、六章介绍非线性微分方程稳定性和定性的基本理论及其应用外, 还在第七章简单介绍了一些典型的非线性现象, 如分支、混沌等。由于本书是一本常微分方程的入门教材, 我们尽量用图形、例子来说明分支、混沌等相关概念, 而不涉及复杂的理论推导和证明, 其主要目的是让读者对当今常微分方程学科的发展有一个概略的印象。

一阶偏微分方程不仅在数学理论上而且在实际应用中都是非常重要的。为跟常微分方程的理论分析过程相适应, 也更符合思维特征, 我们从一阶偏微分方程的几何特性出发首先研究 Cauchy 问题。这种处理方式不仅有很强的几何直观, 有利于读者更好地理解推导过程和证明思路, 同时还能把一阶偏微分方程 (拟线性或非线性) 理论研究统一起来, 这样的研究观点更自然也更符合现代偏微分方程理论的发展方向。

本书的编写得到了许多教师及作者的一些研究生的大力支持, 提过不少有价值的建议。特别是张挺教授和王成波教授对本书的修改和完善提出过许多细致的建议和见解。在此我们表示衷心的感谢。

由于学科水平和教学经验的限制, 书中一定存在不少缺点, 恳切希望读者提出批评。

编　者

2017 年 3 月于求是园

目　录

第一章 绪 论

§1.1 微分方程与模型

我们知道, 自然界中一切物质的运动和演变都有其自身的规律, 不同物质的运动规律有它们共性的一面, 但也有着各自自身的特点. 为了能够定性和定量地研究一些特定的运动和演变过程, 必须根据与此运动有关的各种因素, 把这些由内在运动规律决定的运动和演变过程数学化, 即依据运动规律找出不同变量之间相互影响或制约的关系式. 寻找以及揭示运动内在联系与性质是数学研究的根本任务, 是数学研究思想和研究方法产生的源泉, 也是数学学科经久不衰不断发展的动力. 研究表明, 物质运动内在的制约关系在数学上可以用各种方程来描述, 如代数方程可以用来描述静止物体之间的制约关系. 但是如果我们要精确刻画所考察物体在运动过程中的各种相互制约关系, 就必定要涉及与其相关的各种物理量的变化率, 这在数学上往往表现为变量之间的相应导数或微分关系式, 所以我们得到的往往是一个具体的含有未知函数及其导数在内的关系式, 即微分方程. **微分方程**就是联系着自变量、未知函数以及它的导数的关系式. 微分方程描述的是物体运动的瞬时规律, 通过求解这样的微分方程就可以了解物体运动的全过程. 不仅在自然科学和工程技术研究中会遇到大量的微分方程问题, 而且在社会学、经济学等人文领域也存在着大量的微分方程模型. 为了对微分方程有一个感性的认识, 我们首先讨论几个简单的微分方程模型.

例 1.1 (自由落体运动模型) 一个质量为 m 的物体, 在离地面不太高的空中因引力作用自由下落, 试探讨该物体下落过程中的运动规律.

以物体静止时的位置作为坐标原点, 向下方向为坐标的正向建立坐标系, 用 $y=y(t)$ 表示在 t 时刻物体下落的距离, 用 g 表示地球表面的重力加速度, 物体下落的速度与加速度分别为

$$v(t)=\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t},\quad a(t)=\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}.$$

当不考虑空气阻力时, 根据 Newton (牛顿) 运动定律得到物体下落的距离 $y(t)$ 在 t 时刻所满足的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=g. \tag{1.1}$$

对于上述微分方程, 通过积分立即得到物体在 t 时刻的下落速度 $v(t) = gt + C_1$ 和下落的距离

$$y(t) = \frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2,$$

其中 C_1, C_2 是任意常数. 注意到物体下落的距离 $y = y(t)$ 含有两个任意常数, 它反映的是自由落体运动过程的一般规律. 为了能够精确确定出我们所讨论的这个特定自由落体运动过程, 还需要用到这个特定自由落体运动所满足的一些其他信息, 如物体在初始时刻的位置和初始时刻的速度等. 从数学上来看, 物体在初始时刻的位置和速度分别可表示为当 $t = 0$ 时 $y(t)$ 以及 $y'(t)$ 满足条件

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = v(0) = 0 \tag{1.2}$$

(我们称这些为初始条件). 不难看出满足方程 (1.1) 和条件 (1.2) 的函数 $y(t)$ 为

$$y(t) = \frac{1}{2}gt^2,$$

这就是我们在中学里所学的自由落体运动公式.

如果考虑空气对物体运动的阻力因素, 根据物理实验知阻力与运动速度的大小成正比、方向相反 (设比例系数为 k), 则物体受到的阻力为 $-k\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, 描述受阻力影响的自由落体运动的微分方程为

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = mg - k\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

如果物体离地面很远, 物体自由落体运动的重力加速度是变化的, 这时我们需用 Newton 引力定律来刻画物体的自由落体运动. 对于这种情况, 为了能够简化微分方程模型, 我们重新建立坐标系: 以地球中心为坐标原点, 垂直于地面向上为坐标轴的正向. 记地球的质量为 M, 在 t 时刻地球中心与物体之间的距离为 $y(t)$, 则物体所受到的引力为 $F = -\gamma\frac{Mm}{y^2}$, 其中 γ 为引力常数, 负号表示力的方向与 y 的方向相反. 由 Newton 运动定律得

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = -\gamma\frac{Mm}{y^2},$$

即 $y(t)$ 满足方程:

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = -\gamma\frac{M}{y^2}.$$

假设在初始时刻物体离地球中心的距离为 R, 初始速度为零, 那么 $y(t)$ 还必须满足初始条件

$$y(0) = R, \quad y'(0) = 0.$$

例 1.2 (人口问题的常微分方程模型) 这里所说的人口并不一定限于人, 可以是任何一个生物群体, 只要满足类似的性质即可. 由于人口的总数很大, 可以认为人口是连续变化的, 我们用一个连续人口模型来描述. 设在 t 时刻人口总数为 $p(t)$, 它是 t 的一个连续可微函数, 了解了函数 $p(t)$, 也就掌握了人口的发展动态和发展规律.

为了刻画人口发展的瞬时规律, 我们用 "微元法" 来导出人口总数 $p(t)$ 应满足的微分方程. 设人口的出生率为常数 b, 死亡率为常数 d. 任取时段 $[t, t+\mathrm{d}t]$, 在此时段中的出生人数为 $bp(t)\mathrm{d}t$, 死亡人数为 $dp(t)\mathrm{d}t$. 在时段 $[t, t+\mathrm{d}t]$ 中, 人口增加量为 $p(t+\mathrm{d}t)-p(t) \approx \mathrm{d}p(t)$, 它应等于此时段中的出生人数与死亡人数之差, 即

$$\mathrm{d}p(t) = bp(t)\mathrm{d}t - dp(t)\mathrm{d}t = ap(t)\mathrm{d}t,$$

其中 $a = b - d$ 称为人口的净增长率. 于是人口总数 $p(t)$ 满足微分方程

$$\frac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t} = ap(t).$$

若已知初始时刻 $t = t_0$ 时的人口总数为 p_0, 那么 $p(t)$ 还满足初始条件

$$t = t_0 \text{ 时}, \quad p(t) = p_0.$$

注意到 $(\mathrm{e}^{at})' = a\mathrm{e}^{at}$, 我们可求得微分方程满足初始条件的解为

$$p(t) = p_0 \mathrm{e}^{a(t-t_0)}, \tag{1.3}$$

即人口总数按指数增长, 这就是著名的 **Malthus (马尔萨斯) 人口模型**.

现在我们来讨论一下这个模型本身的正确性. 在表达式 (1.3) 中, p_0 及 a 比较容易根据人口的统计数据来确定: p_0 就是某一年度统计的人口总数, $a = b - d$ 就是每年人口的净增长率. 例如根据统计数据知, 在 1961 年全世界人口为 30.6 亿, 从 1951 年到 1961 年每年人口净增长率约为 0.02. 取 $t_0 = 1961, p_0 = 3.06 \times 10^9$ 和 $a = 0.02$, 就有

$$p(t) = 3.06 \times 10^9 \times \mathrm{e}^{0.02(t-1961)}.$$

用这个公式计算全世界从 1700 年到 1961 年的人口总数, 并把计算结果与实际统计数据作比较, 可以发现它们是基本符合的. 例如根据统计数据, 从 1700 年到 1961 年地球上人口总数大约每 35 年增加一倍, 而由上述方程易知人口总数每 34.6 年增加一倍. 事实上, 假设人口总数每 T 年增加一倍, 由公式得 $\mathrm{e}^{0.02T} = 2$, $T = 50 \ln 2 = 34.6$, 因此, Malthus 人口模型在一个不太长的时间中使用还是相当精确的, 但如果对 Malthus 人口模型不加限制地使用, 就会出现很不合理的情况: 到 2510 年地球上人口将达到 2×10^{14}, 即使把地球上的全部海洋变成陆地, 每人

也只能分到 0.87 m^2 的土地; 而到 2670 年地球上人口将达到 4×10^{15} 个, 那样只好一个人站在另一人的肩上叠成两层了. 因此, Malthus 的这个人口模型是不完善的, 必须加以修改.

分析 Malthus 人口模型的推导过程发现, 我们假设了人口增长率 a 为常数, 这个假设实际上只是在群体总数不太大且食物丰富时才合理. 当群体总数增大时, 生物群体各成员之间由于有限的生存空间、有限的自然资源及食物等原因, 就会进行生存竞争. 因此总数大了以后, 不仅有一个自然增长项 $ap(t)$, 还必须有一个竞争项来部分地抵消这个增长项, 使人口增长的指数规律不再成立. 根据实际经验, 此竞争项可取为 $-\bar{a}p^2(t)$ (其中 $\bar{a}$ 为常数, 远比 a 小), 相当于还存在一个与 $p(t)$ 成正比的竞争死亡率 $\bar{a}p(t)$. 这样人口总数 $p(t)$ 满足的微分方程及初始条件就成为

$$\frac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t} = ap - \bar{a}p^2, \quad p(t_0) = p_0, \tag{1.4}$$

这个人口模型称为 **Verhulst (威尔霍斯特) 模型**, 也可称为 **logistic (逻辑斯谛) 模型**.

当人口总数 $p(t)$ 不是很大时, 我们可以略去 (1.4) 中的竞争项回到 Malthus 模型, 即人口总数服从指数增长规律. 当 $p(t)$ 增大时, 竞争项的影响就不能忽略, 即人口总数不再按指数增长. 关于这个模型的求解以及合理性讨论将在以后章节中进行.

注 1.1　上面建立的模型中未知函数都是一元函数, 它们称为常微分方程模型. 常微分方程人口模型的不足之处在于将群体中的每一个个体都以同等地位来对待, 在原则上只能适用于较低等的动物, 而对人类等高等动物来说必须考虑不同个体之间的差别, 特别是年龄因素的影响. 人口的数量不仅与时间 t 有关, 还应与年龄有关 (作人口统计时, 也是统计不同年龄的人数), 同时出生率、死亡率等都明显地与年龄有关. 不考虑年龄因素, 就不能正确地把握人口的发展动态. 为了考虑年龄因素对人口总数的影响, 可以将人口按年龄分成若干组, 对每一组中的个体一视同仁来对待, 这就可以得到一个用常微分方程组描述的人口模型. 但一个更适当更合理的方法是考虑年龄的连续变化, 这就需要建立一个用偏微分方程来描述的人口模型, 有关这方面的内容在此我们不准备作进一步的介绍, 有兴趣的读者可以查阅相关教材.

注 1.2　在上例中我们给出了用数学知识来解决实际问题的全过程, 即建模、求解、检验、评价、修正、再检验、再评价等过程. 这是用数学理论解决实际问题的标准过程, 也是我们应具备的能力, 在这当中最基本的是建模能力和模型的求解、评判和分析能力.

例 1.3 (一阶反应与考古研究模型) 如果一个大分子自动分解为较小分子的速率不受是否有其他物质存在的影响, 那么单位时间内将要分解的这类大分子数目正比于当时存在的大分子总数, 我们把这类化学反应叫作一阶反应.

假设在初始时刻 t_0 有 y_0 克放射性物质按一阶化学反应分解, 在 t 时刻还剩余这类物质 $y(t)$ 克, 则根据上述原理可以给出剩余放射性物质的质量 $y(t)$ 所满足的微分方程和初始条件:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -ky, \quad y(t_0) = y_0,$$

其中负号表示剩余物质随时间减少, k 是反应率常数, 它是表示反应快慢的一种度量. 利用微积分知识可得 $y(t)$ 的表达式:

$$y(t) = y_0 \mathrm{e}^{-k(t-t_0)}. \tag{1.5}$$

在应用上, 常常需要检测一些放射性元素的半衰期, 即放射性元素衰变一半所需的时间. 在公式 (1.5) 中取 $y(T) = y_0/2$, 便得计算半衰期 T 的公式:

$$T = t - t_0 = \frac{\ln 2}{k}.$$

如果通过试验或观察获得半衰期 T (或反应率常数 k), 就可以用这公式求出反应率常数 k (或半衰期 T). 许多物质的半衰期已经测定, 如碳 14 的半衰期 $T = 5730$ 年, 铀 238 的半衰期 $T = 45$ 亿年, 镭 226 的半衰期 $T = 1600$ 年等.

由 (1.5) 我们能够解出

$$t - t_0 = \frac{1}{k} \ln \frac{y_0}{y}.$$

若 t_0 是放射性物质最初形成或制造时间, 则放射性物质存在的年龄是 $\dfrac{1}{k} \ln \dfrac{y_0}{y}$. 在大多数情况下, 反应率常数 k 是已知的或能够算出的, 而 y 的值易通过实验测出, 因此只要知道 y_0, 便可确定放射性物质存在的年龄, 根据这种思想即形成了考古学中常用的放射性测定年龄法.

Willard Libby 等人在 20 世纪 40 年代发现了放射性碳的半衰期, 由此产生了利用放射性碳来测定年龄的方法. 这种方法所依据的事实和原理是: 由于宇宙线里的中子对氮气作用, 在高层大气中产生放射性碳, 这种放射性碳经氧化后成为放射性二氧化碳, 它与大气层中原有的无放射性二氧化碳混在一起, 放射性碳处在不断形成和不断重新衰变成氮的过程中, 故它在大气中与无放射性碳之间的比例早已达到一种平衡状态, 所有能进行光合作用的植物都把这一定比例的放射性碳吸入组织内, 而吃这些植物的动物体内也一样. 当植物与动物还活着时, 这个比例保持不变, 但当它死亡时, 它就不再吸入新的放射性碳, 而体内原有

的放射性碳则继续进行衰变. 因此, 当一块木头的放射性碳的含量只有活树的一半时, 就可以确定它大约是 5730 年前从活树上砍下来的. 这一原理提供了一种相当准确的测定有机性古物 (如木头、木炭、植物纤维、肉、皮、骨、角) 年龄的方法, 这种方法的理论依据就是公式 (1.5).

例 1.4 (机械振动模型) 一个质量为 m 的物体, 连接在长度为 l 的弹簧上, 弹簧悬挂在刚性水平架上 (如图 1.1) (弹簧具有这样的性质: 如果把弹簧拉伸或者压缩距离 Δl, 而 Δl 同弹簧的自然长度 l 相比为小量, 那么弹簧就会产生大小为 $k\Delta l$ 的恢复力, 常数 k 称为弹性常数, 它是衡量弹簧刚性的一个尺度). 此外也可以把物体和弹簧浸在液体介质 (例如油) 中, 介质阻碍物体在其中运动, 工程人员通常把这种系统称为弹簧 – 质量 – 阻尼系统, 也可以把它称为地震仪, 因为这种系统在原理上与用来探测地球表面振动的地震仪是一样的. 弹簧 – 质量 – 阻尼系统具有各种各样的应用, 如汽车上的减震器、重炮的炮床等.

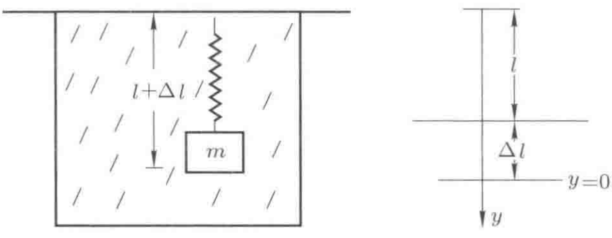


图 1.1 机械振动模型

物体的平衡位置是物体除重力外不受其他外力作用而静止悬挂时所处的位置, 以物体的平衡位置为坐标原点, 向下的方向取为坐标轴的正方向建立坐标系. 当平衡时物体所受的重力 mg 正好与弹簧的恢复力相平衡, 即在物体的平衡位置, 弹簧被拉伸距离 Δl 满足 $k\Delta l = mg$. 设 $y(t)$ 表示物体在 t 时刻离开平衡位置的位移, 下面我们来推导 $y(t)$ 所满足的微分方程.

为了求 $y(t)$ 所满足的常微分方程, 我们必须计算作用在物体上的总力, 这个总力是重力 W、恢复力 R、阻力 D 与外力 F 之和.

(1) $W = mg$ 是物体所受的重力, 方向向下.

(2) R 是弹簧的恢复力, 它与弹簧的拉伸或压缩量 $\Delta l+y$ 成正比, 力 R 的作用是使弹簧恢复到它的自然长度. 如果 $\Delta l+y > 0$, 则 R 是负的, 即 $R = -k(\Delta l+y)$; 如果 $\Delta l + y < 0$, 则 R 是正的, 即 $R = -k(\Delta l + y)$. 这样在任何情况下都有 $R = -k(\Delta l + y)$, 其中 k 是弹性系数.

(3) D 是介质作用在物体上的阻尼或阻力 (多数介质, 例如油或空气, 都倾向于阻碍物体在其中运动), 这个力作用的方向总是与运动的方向相反, 并且通

常与速度 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$ 的大小成正比. 如果速度是正的, 即物体向下运动, 则 $D=-c\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$; 而如果速度是负的, 即物体向上运动, 则 $D=-c\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$. 这样在任何情况下都有 $D=-c\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, 其中 c 是阻尼系数.

(4) F 是作用在物体上的外力. 这个力的方向向下或向上, 取决于 F 是正的还是负的. 一般情况下, 这个外力还将明显地依赖于时间.

利用 Newton 第二运动定律并注意到 $mg=k\Delta l$, 有

$$\begin{aligned}m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}&=W+R+D+F=mg-k(\Delta l+y)-c\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+F(t)\\&=-ky-c\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+F(t).\end{aligned}$$

这样物体离开平衡位置的位移 $y(t)$ 满足微分方程

$$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+c\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+ky=F(t),$$

其中 m,c 和 k 都是非负常数. 这是一个二阶线性常微分方程, 它的求解留待以后讨论.

前面我们得到的几个微分方程模型虽然都是纯量形式常微分方程, 初看起来似乎与现实相差很远, 但由于作用力的特殊性以至于有它的合理性. 如果自由落体运动的重力向量可近似地表示成 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})=mg(0,0,1)^{\mathrm{T}}$, 其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$, x_3 垂直于地球表面, 方向指向地心. 自由落体运动可由下述方程组描述:

$$m\ddot{x}_1=0,\quad m\ddot{x}_2=0,\quad m\ddot{x}_3=mg.$$

直接积分可得

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{v}(0)t+\frac{g}{2}(0,0,t^2)^{\mathrm{T}}.$$

运动被初始位置 $\boldsymbol{x}(0)$ 和初始速度 $\boldsymbol{v}(0)$ 唯一确定. 所以在物理过程或工程问题的研究中常常出现的应该是微分方程组的问题. 作为一个简单的例子, 我们考察质量为 m 的质点在三维空间 $\mathbb{R}^3$ 中的运动. 质点的空间位置可用 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$ 来表示, 质点所受到的外力为 $\boldsymbol{F}=(f_1,f_2,f_3)^{\mathrm{T}}$, 一般情况下这样的外力 $\boldsymbol{F}$ 与时刻 t 时质点的空间位置 $\boldsymbol{X}$ 和速度 $\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t}\right)^{\mathrm{T}}$ 都有关. 根据 Newton 第二定律,

$$m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t^2}=\boldsymbol{F}\left(t,\boldsymbol{X},\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t}\right),$$

或写成

$$m\frac{\mathrm{d}^2x_i}{\mathrm{d}t^2}=f_i\left(t,x_1,x_2,x_3,\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t}\right),\quad i=1,2,3.$$

这是一个联系着未知函数 $x_1(t),x_2(t),x_3(t)$ 以及它们的一阶和二阶导数的常微分方程组.

§1.2 微分方程的基本概念

一、常微分方程的阶

在前一节我们已经将微分方程作了一个描述性的定义, 即把联系着自变量、未知函数以及未知函数的导数的关系式称为**微分方程**. 进一步, 如果在微分方程中的未知函数含有两个或两个以上的独立自变量, 那么称它为**偏微分方程**, 如果在微分方程中的未知函数是一元函数, 那么称它为**常微分方程**. 在本书中除了介绍一阶偏微分方程外, 主要限于讨论常微分方程, 后面我们把常微分方程简称为"微分方程", 有时更简称为"方程". 为了便于定量或定性地分析这样的方程, 我们记自变量为 x, 因变量为 y, 而联系它们的关系式通常可由定义在某区域 G (连通的开集) 的确定函数 F 来给出, 这样这个以 x 为自变量的未知函数 $y=y(x)$, 及其直到 n 阶导数在内的函数所满足的方程

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0 \tag{2.1}$$

就是我们所说的**常微分方程**, 其中未知函数 $y=y(x)$ 实际出现的最高阶导数的阶数 n 称为常微分方程 (2.1) 的**阶**.

例如, 下面的方程都是常微分方程:

$$y''+xy^2=x^3,$$

$$y'''+2yy''=\sin y,$$

$$xy''+(y')^3+x^2=1,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+4\theta=0.$$

前面三个方程中 x 是自变量、y 是未知函数, 第四个方程中 t 是自变量、θ 是未知函数. 第二个常微分方程是三阶的, 其余的三个方程都是二阶的.

二、线性与非线性微分方程

如果微分方程 (2.1) 的左端为关于未知函数 y 及其直到 n 阶导数 $y',\cdots,y^{(n)}$ 的一次有理整式, 则这样的微分方程称为 n **阶线性微分方程**, 否则称为 n **阶非**