HIT

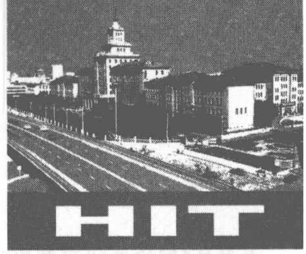
数学·统计学系列

The Collection of Exercise of Conic Section (Book 3, Vol.2)

圆锥曲线习题集（下册·第2卷）

陈传麟 著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



数学·统计学系列

圆锥曲线习题集

The Collection of Exercise of Conic Section (Book 3,Vol.2)

（下册 第2卷）

陈传麟 著

HITP
哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书是《圆锥曲线习题集》的下册第 2 卷，内收有关椭圆的命题 600 道，抛物线的命题 100 道，双曲线的命题 200 道，综合命题 100 道，合计 1 000 道(另有关于圆和直线的命题 300 道)，绝大部分是首次发表.

1 300 道命题都是证明题，全部附图. 全书分成 5 章 53 节，有些命题可供专题研究.

本书可作为大专院校师生和中学数学教师的参考用书，也可作为数学爱好者的补充读物.

图书在版编目(CIP)数据

圆锥曲线习题集. 下册. 第 2 卷/陈传麟著. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2018. 1

ISBN 978 - 7 - 5603 - 6668 - 5

Ⅰ. ①圆…　Ⅱ. ①陈…　Ⅲ. ①圆锥曲线—高等学校—习题集　Ⅳ. ①O123. 3 - 44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 121221 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　王勇钢
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451 - 86414749
网　　址　http://hitpress. hit. edu. cn
印　　刷　哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 44. 25　字数 794 千字
版　　次　2018 年 1 月第 1 版　2018 年 1 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978 - 7 - 5603 - 6668 - 5
定　　价　98. 00 元

作 者 简 介

陈传麟,1940 年生于上海.

1963 年安徽大学数学系本科毕业.

1965 年试建立欧几里得几何的对偶原理,并于当年获得成功.

2011 年发表专著《欧氏几何对偶原理研究》(上海交通大学出版社).

2013 年起发表专集《圆锥曲线习题集》(共四册,哈尔滨工业大学出版社).

Logic will get you from A to B,

Imagination will take you everywhere.

—Albert Einstein

逻辑能引导你从A走到B,而想象能带领你去任何地方.

——爱因斯坦

◎ 序

本书是《圆锥曲线习题集》的第四分册，内收椭圆的命题600道，抛物线的命题100道，双曲线的命题200道，综合命题100道，另有关于圆和直线的命题300道，合计1 300道，全部都是证明题，书中九成以上的命题是首次发表. 其中值得我们重视的都在题前加上了“*”或“**”.

本书已出版四册：上册、中册、下册（第1卷）和下册（第2卷），四册共含椭圆题2 100道，抛物线题800道，双曲线题1 000道，综合题400道，合计4 300道，已超出了陈先生原来打算编撰“圆锥曲线三千题”的设想（全书另含圆和直线的命题1 000道，所以，到目前，全书四册总计含题5 300道）.

下面通过几个例子体验一下怎样应用欧氏几何对偶原理证题.

考查下面两道命题：

命题1　设四边形 $ABCD$ 外切于圆锥曲线 α，AC 交 α 于 Z，如图1所示，求证：BD 不可能过 Z.

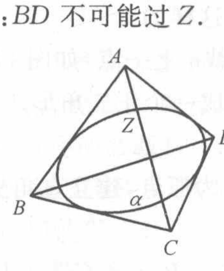


图1

命题 2　设四边形 $ABCD$ 内接于圆锥曲线 α，AB 交 CD 于 P，AD 交 BC 于 Q，过 P 且与 α 相切的直线记为 z，如图 2 所示，求证：点 Q 不会在 z 上.

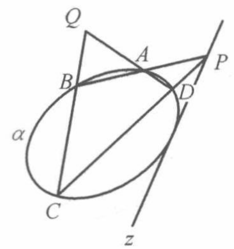


图 2

命题 1 和命题 2 虽然都摆明成立，但是，真要说清理由，还不知道从哪里说起.

其实它们是下面的命题 3 分别在黄几何和蓝几何中的对偶表现. 因而，这三道命题在对偶意义上是等价的，即它们三者同真同假，证明其中任何一个，就等于证明了其余两个.

命题 3　设四边形 $ABCD$ 内接于抛物线 α，如图 3 所示，求证：$ABCD$ 不可能是平行四边形.

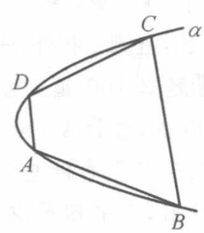


图 3

命题 3 容易说清，用命题 3 的证明替代前两命题的证明，当然是明智的选择.

抛物线有一条性质是这样的：

命题 4　设 A 是抛物线 α 上一点，如图 4 所示，求证：α 上一定存在另外两点 B，C，使得 A，B，C 三点构成一个正三角形.

这个命题的证明如下.

证明：在图 4 中，以 A 为原点，建立直角坐标系，那么，抛物线 α 的直角坐标方程为

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey=0 \tag{1}$$

设 $AC=AB=r$，AC，AB 的倾斜角分别为 θ 和 φ，那么，本题的任务就是要

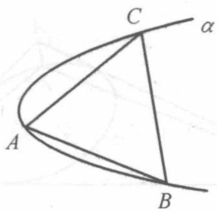


图 4

求出合适的 θ. 易见

$$(\varphi-\theta)+\frac{\pi}{3}=\pi$$

即

$$\varphi=\frac{2\pi}{3}+\theta$$

所以，C，B 两点的坐标分别为

$$C(r\cos\theta, r\sin\theta), B\left(r\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right), r\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)\right)$$

将这两点坐标先后代入方程(1)，得

$$(A\cos^2\theta+B\sin\theta\cos\theta+C\sin^2\theta)r=-(D\cos\theta+E\sin\theta) \tag{2}$$

及

$$\left[A\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)+B\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)+C\sin^2\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)\right]r$$
$$=-\left[D\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)+E\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\theta\right)\right] \tag{3}$$

式(2) + (3) 得

$$-(D'\cos\theta+E'\sin\theta)=(A'\cos^2\theta+B'\sin\theta\cos\theta+C'\sin^2\theta)r \tag{4}$$

其中，A'，B'，C'，D'，E' 均为常数.

式(2) × (4) 并整理，得

$$\tan^3\theta+a\cdot\tan^2\theta+b\cdot\tan\theta+c=0 \tag{5}$$

其中，a，b，c 均为常数.

因为式(5) 是关于 $\tan\theta$ 的一元三次实系数方程，所以，至少存在一个实数 θ_0 满足方程(5)，这就说明命题 4 所说的 B，C 两点是存在的.

把这个命题 4 对偶到黄几何，所得的命题是：

命题 5　设 Z 是椭圆 α 上一点，如图 5 所示，求证：一定存在 $\triangle ABC$，它外切于 α，且以 Z 为该三角形的费马点(即使得 $\angle BZC=\angle CZA=\angle AZB=120°$).

如果把命题 4 对偶到蓝几何，所得的命题是：

命题 6　设直线 z 是椭圆 α 的切线，O 是一定点，A，B，C 是 α 上三点，BC，

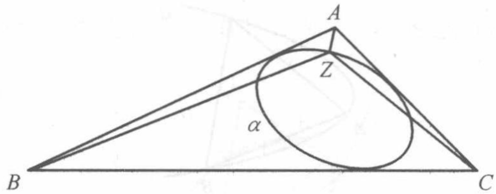


图 5

CA,AB 分别交 z 于 P,Q,R,如图 6 所示,求证:在 α 上一定存在这样三点 A,B,C,使得 $\angle POQ = \angle QOR = 60°$.

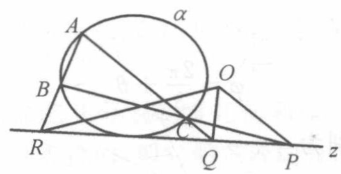


图 6

命题 4,5,6 彼此对偶,同真同假,显然,命题 4 易证.

现在,考查下面的命题 7:

命题 7 设两定点 M,N 都不在圆锥曲线 α 上,P 是一动点,PM,PN 分别交 α 于 A,B 和 C,D,如图 7 所示,求证:$\dfrac{PA \cdot PB}{PC \cdot PD} \cdot \dfrac{NC \cdot ND}{MA \cdot MB}$ 是定值,与 P 点的位置无关.

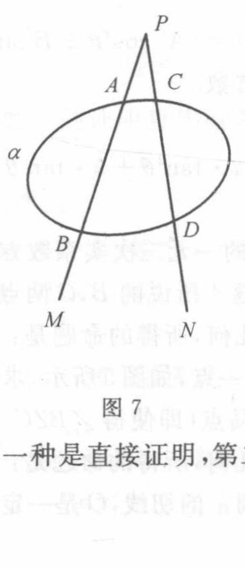


图 7

这道命题有两种证法,第一种是直接证明,第二种是用对偶法证明.

证法一(直接证明):

设 α 的方程为

$$f(x,y)=Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0 \tag{1}$$

设点 M,N,P 的坐标分别为 (x_M,y_M),(x_N,y_N),(x_P,y_P),直线 PM,PN 的倾斜角分别为 θ,φ,那么,直线 PM,PN 的参数方程分别为

$$\begin{cases}x=x_P+t\cos\theta\\ y=y_P+t\sin\theta\end{cases} \tag{2}$$

和

$$\begin{cases}x=x_P+t\cos\varphi\\ y=y_P+t\sin\varphi\end{cases} \tag{3}$$

将(2)代入(1),得

$(A\cos^2\theta+B\sin\theta\cos\theta+C\sin^2\theta)t^2+$

$[(2Ax_P+By_P+D)\cos\theta+(Bx_P+2Cy_P+E)\sin\theta]t+f(x_P,y_P)=0$

设其两根为 t_1,t_2,则 $t_1=PA,t_2=PB$.

因为 $A\cos^2\theta+B\sin\theta\cos\theta+C\sin^2\theta\neq 0$,所以,由韦达定理

$$PA\cdot PB=\frac{f(x_P,y_P)}{A\cos^2\theta+B\sin\theta\cos\theta+C\sin^2\theta}$$

同理

$$PC\cdot PD=\frac{f(x_P,y_P)}{A\cos^2\varphi+B\sin\varphi\cos\varphi+C\sin^2\varphi}$$

所以

$$\frac{PA\cdot PB}{PC\cdot PD}=\frac{A\cos^2\varphi+B\sin\varphi\cos\varphi+C\sin^2\varphi}{A\cos^2\theta+B\sin\theta\cos\theta+C\sin^2\theta}$$

另一方面,直线 PM,PN 的参数方程也可以分别表示为

$$\begin{cases}x=x_M+t\cos\theta\\ y=y_M+t\sin\theta\end{cases} \tag{4}$$

和

$$\begin{cases}x=x_N+t\cos\theta\\ y=y_N+t\sin\theta\end{cases} \tag{5}$$

将式(4)代入(1),得

$(A\cos^2\theta+B\sin\theta\cos\theta+C\sin^2\theta)t^2+$

$[(2Ax_M+By_M+D)\cos\theta+(Bx_M+2Cy_M+E)\sin\theta]t+f(x_M,y_M)=0$

设其两根为 t_3,t_4,则 $t_3=MA,t_4=MB$,由韦达定理

$$MA\cdot MB=\frac{f(x_M,y_M)}{A\cos^2\theta+B\sin\theta\cos\theta+C\sin^2\theta}$$

同理

$$NC \cdot ND = \frac{f(x_N, y_N)}{A\cos^2\varphi + B\sin\varphi\cos\varphi + C\sin^2\varphi}$$

所以

$$\frac{NC \cdot ND}{MA \cdot MB} = \frac{A\cos^2\theta + B\sin\theta\cos\theta + C\sin^2\theta}{A\cos^2\varphi + B\sin\varphi\cos\varphi + C\sin^2\varphi} \cdot \frac{f(x_N, y_N)}{f(x_M, y_M)}$$

故

$$\frac{PA \cdot PB}{PC \cdot PD} \cdot \frac{NC \cdot ND}{MA \cdot MB} = \frac{f(x_N, y_N)}{f(x_M, y_M)}$$

可见，$\frac{PA \cdot PB}{PC \cdot PD} \cdot \frac{NC \cdot ND}{MA \cdot MB}$ 是定值，与 P 点的位置无关.（证毕）

证法二（用对偶法）：

若把过 M, N 的直线视为“蓝假线”，那么，命题 7 就成了下面的命题 8：

命题 8　设动点 P 不在圆锥曲线 α 上，过 P 作两直线 l_1, l_2，它们分别交 α 于 A, B 和 C, D，如图 8 所示，若 l_1, l_2 的方向都是一定的，求证：$\frac{PA \cdot PB}{PC \cdot PD}$ 是定值，且与 P 点的位置无关.

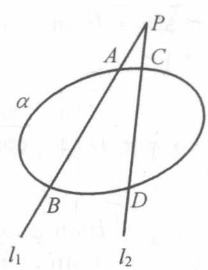


图 8

命题 8 人称“牛顿（I. Newton，1642—1727）定理”，当然是真命题，而命题 7 是“牛顿定理”在“蓝几何”中的复述，自然也是成立的. 这就是“对偶法”的证明.

命题 7 比牛顿定理更广泛，可视为牛顿定理的推广（当 M, N 都是无穷远点时，命题 7 就成了命题 8）.

命题 9　设完全四边形 $ABCD-EF$ 外切于圆 O，线段 AC, BD, EF 的中点分别为 M, N, S，如图 9 所示，求证：M, N, S, O 四点共线.

图 9 的直线 MN 也以牛顿命名，称为“牛顿线”.

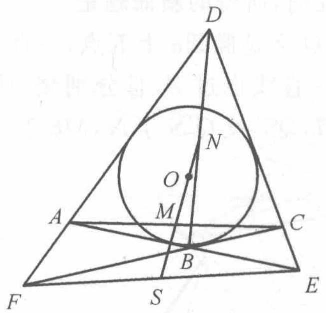


图 9

把这个命题推广到圆锥曲线就是下面的命题 10：

命题 10　设椭圆 α 的中心为 O，完全四边形 $ABCD-EF$ 外切于 α，线段 AC，BD，EF 的中点分别为 M，N，S，如图 10 所示，求证：M，N，S，O 四点共线.

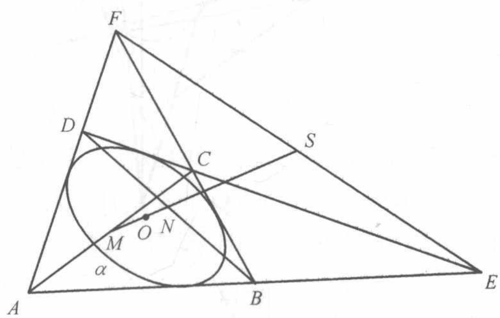


图 10

如果把上面命题 10 的椭圆换成抛物线，那么，该命题应该叙述成这样：

命题 11　设抛物线 α 的对称轴为 m，完全四边形 $ABCD-EF$ 的四边 AB，BC，CD，DA 外切于 α，线段 AC，BD，EF 的中点分别为 M，N，S，如图 11 所示，求证：M，N，S 三点共线，且此线与 m 平行.

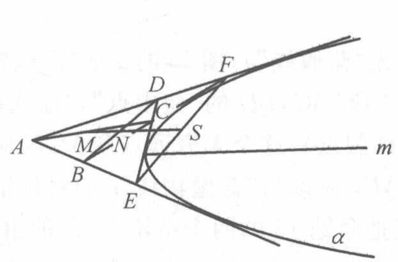


图 11

把命题 11 对偶到黄几何，所得的新命题是：

命题 12　设 A,B,C,D,Z 是椭圆 α 上五点，一直线过 Z，且分别交 AB,BC，CD,DA 于 P,Q,R,S；另一直线也过 Z，且分别交 AB,BC,CD,DA 于 P',Q'，R',S'；设 $P'R$ 交 PR' 于 M，QS' 交 $Q'S$ 于 N，ME 交 NF 于 T，如图 12 所示，求证：直线 ZT 与 α 相切.

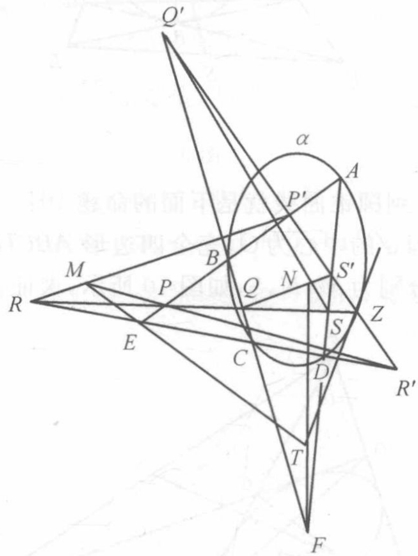


图 12

如果把命题 11 对偶到蓝几何，所得的新命题是：

命题 13　设完全四边形 $ABCD-EF$ 外切于椭圆 α，直线 z 过线段 EF 的中点 G，且与 α 相切，切点为 R，P,Q 是 z 上两点，设 PA 交 QC 于 H，PC 交 QA 于 I，HI 交 AC 于 M，设 PB 交 QD 于 J，PD 交 QB 于 K，JK 交 BD 于 N，如图 13 所示，求证：

①M,N,R 三点共线；

② $MN \parallel EF$.

在蓝观点下(以 z 为“蓝假线”)，图 13 的 α 是“蓝抛物线”，$ABCD-EF$ 外切于 α，M,N 分别是“蓝线段”AC,BD 的“蓝中点”，“蓝线段”EF 的“蓝中点”是直线 EF 上的无穷远点(红假点)，这个无穷远点和 M,N 应该共线(见命题 11)，所以 $MN \parallel EF$. 又因为 MN 应该与“蓝抛物线”α 的对称轴平行(见命题 11)，所以 MN 一定经过 R，这就是命题 13 的两个结论 ①② 的由来.

很明显，直接证明命题 12、命题 13 是困难的.

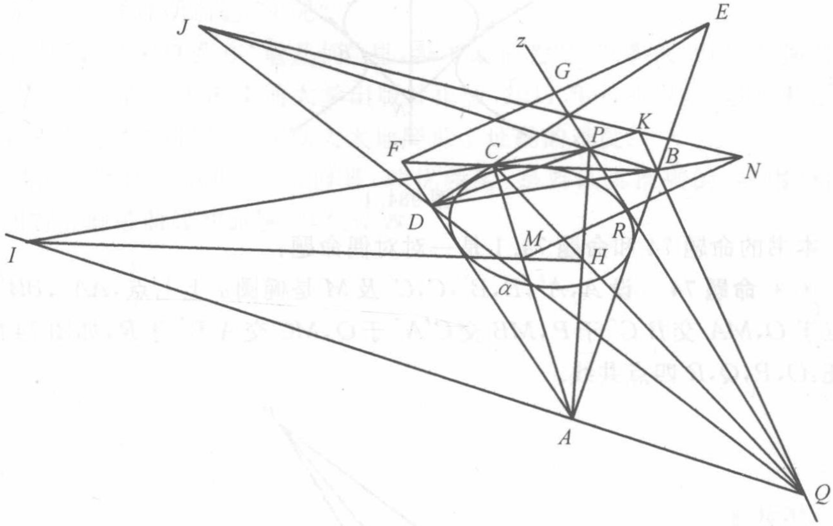


图 13

再看本书的命题 984：

命题 984 设抛物线 α 的对称轴为 m，椭圆 β 与 α 相切于 A，B 两点，AB 交 m 于 P，过 P 作 m 的垂线，且交 α 于 Q，过 Q 作 α 的切线，且交 m 于 M，过 M 作 m 的垂线，此垂线记为 n，过 A，B 分别作 β 的切线，这两切线相交于 N，如图 984 所示，求证：点 N 在 n 上.

注：在"蓝观点"下(以 PQ 为"蓝假线")，本图的 α 是"蓝双曲线"，M 是其"蓝中心"，因此，本命题的对偶命题是下面的命题 984.1，由此可见，本命题是明显成立的.

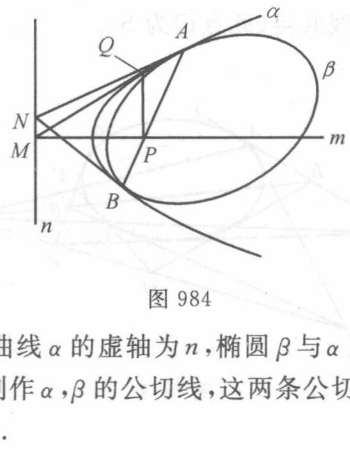


图 984

命题 984.1 设双曲线 α 的虚轴为 n，椭圆 β 与 α 外切于 A，B 两点，且 n 是 β 的对称轴，过 A，B 分别作 α，β 的公切线，这两条公切线相交于 N，如图 984.1 所示，求证：点 N 在 n 上.

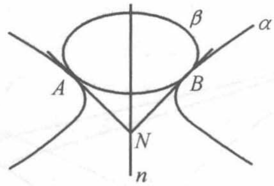


图 984.1

本书的命题 74 和命题 74.1 是一对对偶命题：

＊＊ **命题 74** 设 A,A',B,B',C,C' 及 M 是椭圆 α 上七点，AA',BB',CC' 共点于 O，MA 交 $B'C'$ 于 P，MB 交 $C'A'$ 于 Q，MC 交 $A'B'$ 于 R，如图 74 所示，求证：O,P,Q,R 四点共线.

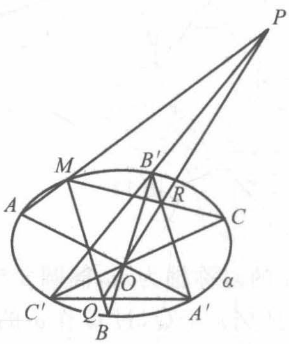


图 74

＊＊ **命题 74.1** 设直线 z 与椭圆 α 不相交，直线 l 与 α 相切，P,Q,R 是 z 上三点，过这三点各作 α 的一条切线，这些切线依次交 l 于 A,B,C. 现在，过 P，Q,R 再分别作 α 的一条切线，这次三条切线构成 $\triangle A'B'C'$，如图 74.1 所示，求证：

①AA',BB',CC' 三线共点(此点记为 S).

② 点 S 在 z 上.

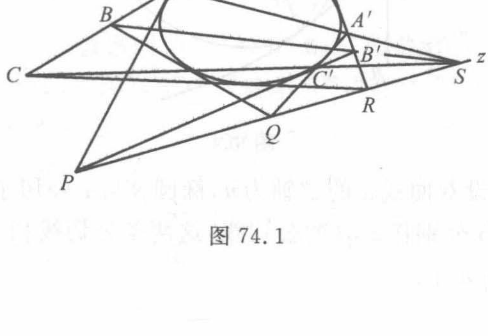


图 74.1

陈先生把前一命题称为“椭圆的七点定理”，把后一命题称为“椭圆的七线定理”，那么，怎样证明命题 74 呢？

我们知道，任何椭圆在“蓝几何”里，都可以视为“圆”（参阅《欧氏几何对偶原理研究》的附录 3，上海交通大学出版社出版，2011 年），所以，读者只要证明命题 74 对圆成立就可以了，这就大大地降低了证题的难度.

解题的道路往往不止一条，但是，孰优孰劣，是要认真推敲的，应用“对偶法”证明有关圆锥曲线的命题，常见奇效.

朱传刚

2017 年

于上海·紫竹园

◎目录