普通高等教育“十三五”规划教材
普通高等院校数学精品教材

概率论与数理统计 第三版

刘次华 主编

华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

普通高等教育“十三五”规划教材
普通高等院校数学精品教材

概率论与数理统计
（第三版）

主　编　刘次华
参　编　万建平　李楚进　刘继成
王湘君　胡吉卉　刘小茂
李　萍　胡晓山　叶　鹰
周晓阳　吴　娟

华中科技大学出版社
中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/刘次华主编. —3 版. —武汉：华中科技大学出版社，2017. 8
普通高等院校数学精品教材
ISBN 978-7-5680-3185-1

Ⅰ. ①概…　Ⅱ. ①刘…　Ⅲ. ①概率论-高等学校-教材　②数理统计-高等学校-教材　Ⅳ. ①O21 ②TP312

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 174236 号

概率论与数理统计(第三版)　　　　刘次华　主编
Gailülun yu Shulitongji

策划编辑：周芬娜
责任编辑：周芬娜
封面设计：潘　群
责任校对：张会军
责任监印：周治超
出版发行：华中科技大学出版社(中国・武汉)　　电话：(027)81321913
　　　　　武汉市东湖新技术开发区华工科技园　　邮编：430223
录　　排：华中科技大学惠友文印中心
印　　刷：武汉科源印刷设计有限公司
开　　本：787mm×1092mm　1/16
印　　张：14. 5
字　　数：379 千字
版　　次：2017 年 8 月第 3 版第 1 次印刷
定　　价：34. 00 元

華中出版

本书若有印装质量问题，请向出版社营销中心调换
全国免费服务热线：400-6679-118　竭诚为您服务

第二版序

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的数学科学，它是工程数学的重要分支，是一门重要的基础理论课。

概率论从数量上研究随机现象的统计规律性，它是本课程的理论基础；数理统计研究处理随机数据，建立有效的统计方法进行统计推断。本书的第一章至第五章是概率论的基本理论，第六章至第九章是数理统计的基本内容，第十章是概率统计实验的入门介绍。

本书将概率统计实验内容写入教材，不仅给学生一个提高和加深对本学科理解的机会，也给教师一种根据需要对讲授内容进行选择的余地，是一种新的教学改革模式。

本书编写中力求突出重点、深入浅出，注重对基本概念、重要公式和定理的实际意义的解释说明；力求在循序渐进的过程中，使读者逐步掌握概率论与数理统计的基本方法。

本书是华中科技大学概率统计系积累几十年教学成果的结晶。本书的作者由经验丰富的主讲教授组成。各章作者依次为万建平、刘继成、王湘君、胡吉卉、刘小茂、王湘君、李萍、胡晓山、叶鹰、周晓阳，最后由刘次华教授定稿。

本书的编写自始至终得到华中科技大学教务处及出版社的大力支持，也得到华中科技大学概率统计系全体教师的协助与鼓励。对此，我们一并表示衷心的感谢。

刘次华

2011 年 7 月于武汉

第三版前言

本书是在 2012 年出版的第二版基础上修订，可作为高等学校理工科学生学习概率论与数理统计课程的教材，也可供工程技术人员参考。

本书自 2010 年第一版出版后，经过多年的教学实践，我们积累了不少经验，在吸取广大读者的意见基础上，对第二版进行修订，修订的主要内容如下。

1. 在选材上，更加注重联系实际与应用。我们对本书的第十章进行全面改动，应用 Excel 软件来描述统计方法和模型，激发学生学习兴趣，培养学生在实际问题中处理大数据的统计分析与计算能力。该章的主要内容包括：数据描述的统计分析、常见概率分布的计算、蒙特卡罗随机模拟、随机抽样、参数估计、假设检验、方差分析、回归分析等，由吴娟副教授编写。

2. 修改了第二版中存在的不当之处，提高了教材质量。

3. 对概念的叙述力图更加清晰易懂，便于教学。

4. 新增了一定数量的应用广泛的例题和习题，提高学生分析与解决实际问题的能力。

由于编者水平有限，书中不妥之处在所难免，请各位专家、读者批评、指正。

刘次华

2017 年 6 月

目　　录

第一章　随机事件与概率

随机事件对概率论的研究具有重要意义，随机事件的等价表示是概率建模的重要技巧，公理化概率定义下涉及的概率计算公式就是针对随机事件及其运算而设计的. 条件概率公式、全概率公式、贝叶斯公式在概率论中的科学地位可与微积分中的分部积分、变量代换媲美，它们构成了分析与应用概率的最常规、最有效工具.

1.1　随机试验与随机事件

掌握随机现象统计规律性的重要手段是重复观测，但在许多场合下这种观测是需要成本的. 这些成本可能是时间或其他资源，即人们的这些重复观测是受到约束的. 解决这些问题的一条出路就是通过精心设计的随机试验对这种观测进行模型化和简化. 随机试验是人们敲开随机现象规律性大门的巧妙工具. 例如，人们可通过反复投掷硬币观测正、反两面出现的统计规律来解释人类生育过程中男女性别之比的统计规律. 掌握一些经典的随机试验案例及构造设计一些随机试验，对于研究概率论是很有意义的. 随着科学研究向深度与广度的发展，我们鼓励读者在生活和工作中，总结经验，设计出一些新的随机试验来更有效地研究随机现象规律性.

1.1.1 随机试验

定义 1.1　设有试验 E，若 E 满足：

(1) 试验之前可知试验的一切可能结果，

(2) 每次试验之前不能确定此次试验的结果，

(3) 试验在相同条件下可以重复进行，

则称试验 E 为随机试验.

例 1.1　表 1.1 中数据记载了几位数学家抛硬币试验的结果.

表 1.1

实　验　者	抛硬币次数 n	出现正面次数 $n_{正}$	出现正面频率 $\frac{n_{正}}{n}$
Buffon	4040	2048	0.5069
Pearson	12000	6019	0.5016
Pearson	24000	12012	0.5005

观测上述数据可以发现，当 n 越来越大时，$\frac{n_{正}}{n}$ 有向 $\frac{1}{2}$ 集中的趋势. 思考这本质上是一种什么样的趋势.

例 1.2（投针问题）　设平面上画着一族平行线，它们之间的间距相等且都等于 a，向此平

面任投一长度为 $l(l\leqslant a)$ 的针，观测在这种反复的投掷过程中针与平行线相交的次数. 表 1.2 给出了几位数学家实验数据的记录(设 $a=1$).

表 1.2

实验者	针长	投掷次数	相交次数
Wolf	0.8	5000	2532
Smith	0.6	3204	1218.5
De Morgan. C	1.0	600	382.5
Fox	0.75	1030	1489
Lazzerini	0.88	3408	1808
Reina	0.5419	2520	859

有趣的是，通过对针与平行线相交概率的计算得到了一个关于 π 的统计估计方法，由此思路出发诞生了 Monte Carlo 随机模拟方法. Monte Carlo 随机模拟是现代统计计算的重要基础.

例 1.3(高尔顿板) 设板上钉有图 1.1 所示排列的钉子，自上端放入一小球，使其任意自由下落，下落过程中当小球碰到钉子后，它以向左边或向右边相等的机会落下，碰到下一排钉子时情形也是如此. 在底部设有如图所示的格子，进行大量试验后观测各个格子中落入的球的堆积情况. 这样的试验表明各个格子中球的堆积曲线在进行这样的反复试验中形状几乎是一样的. 读者可设想通过这种试验可解释哪些随机现象呢?

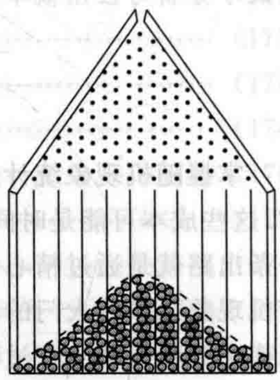

图 1.1

例 1.4 设想某人在平面上从零点出发，其规则是他手持分别标有 1、2、3、4 的一个均匀四面体，他随意抛出后，若标有 1 的面贴地，则他向东走一个单位长度，若标有 2 的面贴地，他向南走一个单位长度，标有 3 的面贴地对应他向西走一个单位长度，标有 4 的面贴地对应他向北走一个单位长度. 若干次后，观测他走过的路线的轨迹. 由此你有什么联想呢?

1.1.2 随机事件与样本空间

定义 1.2 随机试验的每一个可能结果称为一个随机事件，简称事件. 事件一般用 A、B、C 等表示. 不可能再分解的事件称为基本事件，由若干个基本事件组成的事件称为复合事件. 基本事件与复合事件的区分是相对的.

例 1.5 随意向桌面掷一颗骰子，观察出现的点数，一般情形下基本事件为{1}，{2}，{3}，{4}，{5}，{6}；而出现的点数为偶数{2,4,6}的事件则为复合事件. 若试验人员关心的仅仅是出现点数的奇偶性，则出现点数为偶数{2,4,6}的事件的基本条件.

定义 1.3 随机试验 E 产生的所有可能的基本事件的集合称为样本空间，记为 Ω.

样本空间的任一子集即为一个事件，其中必然事件记为 Ω，不可能事件记为 $\varnothing$.

例 1.6 设随机试验 E 为记录两支排球队在一局比赛中某球队的净输球数，则 $\Omega=\{2,3,4,\cdots,25\}$.

例 1.7 设随机试验 E 为任取某地区某年的年降雨量记录，则 $\Omega=\{x: x\geqslant 0, x$ 的单位为 mL，表示该地区年降雨总量$\}$.

1.2 随机事件的关系、运算及其性质

一个随机试验所涉及的事件往往是非常丰富的.正确地将一个随机试验所产生的所有事件表示出来是有意义的.这种表示的基础是要建立事件之间的关系及引入一些有意义的事件的运算,为了更好地研究随机事件之间的关系及相关的运算,对这些运算所涉及的性质的研究也是有价值的.

1.2.1 事件的关系及其运算

定义 1.4 设 A,B 表示两个事件,若 A 发生必导致 B 发生,则称 A 包含于 B 或称 B 包含 A,记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.

例 1.8 A 表示某国家某地区在某年发生了地震,B 表示该国家在该年发生了地震,则有 $A\subset B$.

定义 1.5 若 $A\subset B$ 和 $B\subset A$ 同时成立,则称 A 与 B 相等或称之为等价,记为 $A=B$.

将一个事件有目的地进行等价表示通常是概率论理论研究与实际应用的关键步骤.

定义 1.6 若 A,B 至少一个发生,则称之为 A 与 B 之和(并),记为 $A\cup B$.

求事件和的运算可推广到可列无限多个事件的场合(一个集合称为可列无限是指该集合中的元素可与自然数集建立一一对应的关系).设 $A_1,A_2,\cdots$ 为一列事件,则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示 A_1,A_2,…至少有一个事件发生.

定义 1.7 若 A 与 B 同时发生,则称之为 A 与 B 之积(交),记为 $A\cap B$,简记为 AB.

同理,$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 表示 $A_1,A_2,\cdots$ 同时发生.

定义 1.8 若 $AB=\varnothing$,称 A 与 B 互不相容或互斥.若 $A\cap B=\varnothing$,$A\cup B=\Omega$,则称 A 与 B 互为逆事件,记 $B=\overline{A}$.

显然 A 与 B 互逆,则 A 与 B 必互不相容,但反之不然.若 A 与 B 互斥,则 A 与 B 之和也记为 $A+B$.

定义 1.9 若 A 发生而 B 不发生,则称之为 A 与 B 之差,记为 $A-B$.

定义 1.10 $A\triangle B=(A-B)\cup(B-A)$ 称为 A 与 B 的对称差.

在建立了上述概念的基础上为了定义概率,有必要引入如下 σ 域的定义.

定义 1.11 设 $\mathscr{F}$ 是由 Ω 中的一些子集组成的集合,具有性质:

(1) $\Omega\in\mathscr{F}$,

(2) 若 $A\in\mathscr{F}$,则 $\overline{A}=\Omega-A\in\mathscr{F}$,

(3) 若 $A_n\in\mathscr{F}$,$n=1,2,\cdots$,则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{F}$,

则称 $\mathscr{F}$ 是 Ω 中的一个 σ 域(或称为 σ 代数).

定义 1.12 设 $A_n\subset A_{n+1}$,$n=1,2,\cdots$,称事件序列 $\{A_n,n\geqslant1\}$ 为单调递增序列;设 $A_n\supset A_{n+1}$,$n=1,2,\cdots$,称事件序列 $\{A_n,n\geqslant1\}$ 为单调递减序列。当 $\{A_n,n\geqslant1\}$ 递增时,记 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$,称 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 为此事件序列的极限.同理,当 $\{A_n,n\geqslant1\}$ 递减时,记 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 为此事件

序列的极限,亦称 $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ 为此事件序列的极限.

我们关心的事件往往需通过事件的运算才能表达出来,但若干事件通过这些运算后是否满足某些封闭性呢?这个问题是很尖锐的.σ 域的建立就在于防范这种情形的发生.可以直观地认为 σ 域就是这样一些事件构成的集合,这个集合内的事件关于 Ω、关于事件的逆运算及关于事件的可列求和运算封闭.

1.2.2 事件的运算性质

上节介绍的事件的运算具有如下性质.

(1) 事件和的运算满足

$$A\cup B=B\cup A \quad (\text{交换律}), \tag{1.1}$$

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C) \quad (\text{结合律}), \tag{1.2}$$

$$A\cup A=A,\quad A\cup\varnothing=A,\quad A\cup\Omega=\Omega.$$

(2) 事件交的运算满足

$$A\cap B=B\cap A \quad (\text{交换律}), \tag{1.3}$$

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C) \quad (\text{结合律}), \tag{1.4}$$

$$A\cap A=A,\quad A\cap\varnothing=\varnothing,\quad A\cap\Omega=A.$$

(3) 事件并与交的运算满足分配律

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C) \quad (\text{第一分配律}), \tag{1.5}$$

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C) \quad (\text{第二分配律}). \tag{1.6}$$

(4) 德·摩根对偶律

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\quad \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}, \tag{1.7}$$

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{A_n},\quad \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\overline{A_n}. \tag{1.8}$$

例 1.9 设有事件 A_1,A_2,A_3,用事件的运算表示:

(1) $B_1=\{A_1,A_2,A_3$ 中至多发生 2 个$\}$;

(2) $B_2=\{A_1,A_2,A_3$ 中至少发生 2 个$\}$.

解 (1) $B_1=\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\cup\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\cup A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3$.

(2) $B_2=A_1A_2A_3\cup A_1A_2\overline{A}_3\cup A_1\overline{A}_2A_3\cup\overline{A}_1A_2A_3$.

例 1.10 设 A,B,C 表示三个事件,用 A,B,C 表示如下事件:

(1) A 发生且 B 与 C 至少有一个发生;

(2) A 与 B 发生而 C 不发生;

(3) A,B,C 中恰有一个发生.

解 (1) $A(B\cup C)$.

(2) $AB\overline{C}$.

(3) $A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C$.

例 1.11 证明:若 A,B 为两事件,则 $A\cup B=A\cup(B-A)$.

证明 $A\cup(B-A)=A\cup(B\overline{A})=(A\cup B)\cap(A\cup\overline{A})=A\cup B$.

例 1.12 把 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 表示成 n 个互斥事件之和.

解 $A_1\cup(A_2-A_1)\cup(A_3-(A_1\cup A_2))\cup\cdots\cup(A_n-(A_1\cup\cdots\cup A_{n-1}))$.

例 1.13 化简事件$(A\cap B)\cup(A\cap\bar{B})$.

解 $AB\cup A\bar{B}=A(B\cup\bar{B})=A$.

例 1.14 设$(A\cup\bar{B})(\bar{A}\cup\bar{B})\cup(\overline{A\cup B})\cup(\overline{\bar{A}\cup B})=C$,求 B.

解 $B=\bar{C}$.

1.3 事件的概率及其计算

定义 1.13 设$\mathscr{F}$是样本空间Ω上的一个σ域,$P=P(\cdot)$是$\mathscr{F}$上定义的实函数,且P满足:

(1) $P(\Omega)=1$,

(2) $P(A)\geqslant 0$ (对一切的$A\in\mathscr{F}$),

(3) 若$A_n\in\mathscr{F}(n=1,2,\cdots)$,且两两互不相容,有$P(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}P(A_n)$成立,则称$P$是$\mathscr{F}$上的一个概率,$P(A)$称为事件$A$发生的概率.

通常将$(\Omega,\mathscr{F},P)$称为一个概率空间,性质(3)称为概率的σ可加性(可列可加性).这是1933年柯尔莫哥洛夫(Kolmogoroo)建立的概率公理化定义,使得概率成为了一个严谨的数学分支,极大地推动了学科发展.细心的读者会发现上述定义的基本作用在于判断P是否构成$\mathscr{F}$上的一个概率,但对于一个$A\in\mathscr{F}$如何具体地求出$P(A)$呢?为此我们需要从上述概率的公理化定义出发获得常用的一些概率计算的性质.

定理 1.1 概率具有如下性质:

(1) $P(\varnothing)=0$. (1.9)

(2) 有限可加性:若事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$两两互不相容,则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i). \tag{1.10}$$

(3) 逆事件概率公式:

$$P(\bar{A})=1-P(A). \tag{1.11}$$

(4) 差事件概率公式:若$B\subset A$,则

$$P(A-B)=P(A)-P(B). \tag{1.12}$$

(5) 概率的单调性:若$B\subset A$,则

$$P(B)\leqslant P(A).$$

(6) 加法公式:设A,B,C为任意三个事件,则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB). \tag{1.13}$$

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC). \tag{1.14}$$

对于任意n个事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$,下式成立:

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)+\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n). \tag{1.15}$$

(7) 设$\{A_n,n\geqslant 1\}$为递增或递减事件序列,则有

$$\lim_{n\to\infty}P(A_n)=P(\lim_{n\to\infty}A_n).$$

此性质表明在前述事件序列极限的定义下,概率是上、下连续的.

证明　(1) 由 $\Omega=\Omega\cup\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots$ 及概率的非负性及 $P(\Omega)=1$(规范性)知 $P(\varnothing)=0$.

(2) 只需令 $B_1=A_1,\cdots,B_n=A_n,B_{n+1}=\varnothing,B_{n+2}=\varnothing,\cdots$,可知 $B_1,B_2,\cdots,B_n,B_{n+1},\cdots$ 两两互不相容,且有

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i,$$

从而有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i\right)=P(B_1)+\cdots+P(B_n)+P(B_{n+1})+\cdots$$
$$=P(B_1)+\cdots+P(B_n)=P(A_1)+\cdots+P(A_n).$$

(3) 由 $A\cup\bar{A}=\Omega$ 及有限可加性,有

$$P(A\cup\bar{A})=P(A)+P(\bar{A}),\quad P(A\cup\bar{A})=P(\Omega)=1,$$

故性质(3)成立.

(4) 当 $B\subset A$ 时,有 $A=(A-B)\cup B$,又 $A-B$ 与 B 互不相容,从而由有限可加性即知性质(4)成立.

(5) 由性质(4)知当 $B\subset A$ 时,有 $P(A-B)=P(A)-P(B)$,又 $P(A-B)\geqslant 0$,从而性质(5)成立.

(6) 下面仅就 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$ 给出证明.

由于 $A\cup B=A\cup(B-AB)$,$AB\subset B$,A 与 $B-AB$ 互不相容,从而

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

(7) 证明略.

下面就两个常见的概型讨论概率公理化定义的性质是否满足的问题.

定义 1.14　古典概型:设随机试验 E 只产生有限个基本事件(也称样本点),此时样本空间中的样本点总数有限,并设每次试验中各个基本事件出现的可能性是相同的. 若 A 是由 m 个基本事件组成的事件,则 A 的概率定义为

$$P(A)=\frac{A\text{ 中所含样本点数}}{\Omega\text{ 中样本点总数}}.\tag{1.16}$$

读者在利用此公式计算 A 的概率时一定要验证 Ω 中样本点总数有限及每一个样本点出现机会均等的条件.

由于 $P(A)$ 的定义式中分子、分母所涉及的数均非负,故对任意的 $A\in\Omega$,有 $P(A)\geqslant 0$,$P(\Omega)=1$ 是显然的. 由于 Ω 中的样本点总数有限,故由 Ω 的样本点构成的所有子集的个数是有限的,从而概率公理化定义中的 σ 可加性此时对应的为特殊情形,即有限可加性. 事实上,设 $A=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$,$A_i(i=1,2,\cdots,n)$ 两两不相容,从而 A 中的样本点数为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中样本点数之和,所以

$$P(A)=P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\frac{A_1,A_2,\cdots,A_n\text{ 中样本点数之和}}{\Omega\text{ 中样本点总数}}=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

古典概率的计算涉及如下两条原理.

定义 1.15　加法原理:设事件 A 有 n 类方法出现,并设第 i 类方法由 m_i 种方式组成,则 A 的出现方式共有 $m_1+m_2+\cdots+m_n$ 种.

定义 1.16　乘法原理:若事件 A 有 m 种不同方式出现,设另有事件 B 对 A 的每一种出现方式有 n 种出现方式对应,那么 AB 就应以 nm 种不同方式出现.

加法原理体现了并行的理念,乘法原理体现分步机理.

此外,古典概型往往涉及排列组合问题,笔者认为这些知识读者已经熟悉,故不作介绍.

例 1.15　(1) A={一批产品共 N 件,其中有 M 件次品,从中任取一件,这件产品恰为次品},求 $P(A)$.

(2) B={一批产品共 N 件,其中 M 件次品,从中任取 n 件,这 n 件中恰有 l 件次品},求 $P(B)$.

(3) C={一批产品共 N 件,分成 $1,2,\cdots,k$ 个等级,第 i 个等级中有 M_i 件产品,$i=1,2,\cdots,k$,$M_1+M_2+\cdots+M_k=N$.从中任取 n 件,这 n 件中恰有第 i 个等级的产品 l_i 件,$i=1,2,\cdots,k$},求 $P(C)$.

解　显然此时符合古典概型条件.

(1) $P(A)=\dfrac{M}{N}$.

(2) 由乘法原理得

$$P(B)=\frac{\mathrm{C}_M^l\mathrm{C}_{N-M}^{n-l}}{\mathrm{C}_N^n}. \tag{1.17}$$

(3) 由乘法原理得

$$P(C)=\frac{\mathrm{C}_{M_1}^{l_1}\mathrm{C}_{M_2}^{l_2}\cdots\mathrm{C}_{M_k}^{l_k}}{\mathrm{C}_N^n}.$$

这里涉及的概率可抽象出一个称之为超几何分布的概率模型,在第二章中将进行介绍.

定义 1.17　几何概型:设样本空间中样本点的集合与平面(或一维、三维空间)某区域 G 一一对应,即 Ω 可认为是 G,并设 Ω 中的样本点出现的机会相等,设 $A\subset\Omega$,对应地有区域 $A_0\subset G$,不妨设 $A_0=A$,称

$$P(A)=\frac{A\text{ 的面积(体积)}}{G\text{ 的面积(体积)}} \tag{1.18}$$

为事件 A 的几何概型下定义的几何概率,简称 $P(A)$为 A 的概率.

几何概型可认为是古典概型的推广,一方面几何概型将古典概型中的样本空间中的点数从有限多个推广到无穷多个,另一方面古典概型中的点可看成是一些孤立的点,几何概型中 Ω 中的点为充满了一个平面(或空间)区域中的点.几何概型的计算主要涉及将所关心的概率计算问题,在满足几何概型的条件下,转化为对线段长度或平面区域面积或空间区域体积的度量问题.解题的关键是能根据问题的本质,作出正确的相应的几何图形,再进行度量.

例 1.16　在一张画了小方格的纸上随机地投一枚直径为1 cm的圆片,方格为多大时才能使圆片与线不相交的概率小于 1%?(设方格边长为 a(cm).)

解　方格边长为 a (cm),当圆片圆心落入图 1.2 中阴影部分时才与边界不相交.由几何概型有

$$P(\text{圆片不与线相交})=\frac{\text{阴影部分面积}}{\text{方格面积}}=\frac{(a-1)^2}{a^2}.$$

令 $\dfrac{(a-1)^2}{a^2}<0.01$,当 $a\leqslant 1$ (cm)时,圆片必与线相交,只需考虑 $a>1$,故

$$\frac{a-1}{a}<0.1,\quad a<\frac{10}{9},$$

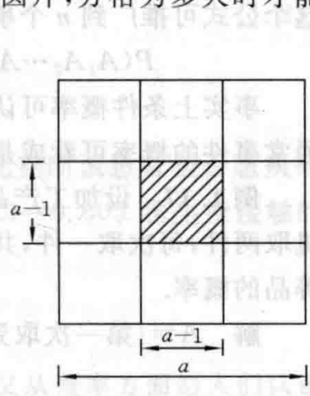

图 1.2

所以 $1<a<\frac{10}{9}$ 时可达到要求.

读者可自行验证几何概型满足概率公理化定义中的全部条件.

1.4 条件概率事件独立性

回顾以上概率的计算,其基本方法是利用概率的运算性质计算概率,当问题符合古典概型和几何概型条件时,可利用这两个模型计算概率. 概率计算性质的实质是讨论概率计算与事件和、差等运算交换后所满足的性质. 下面我们要从另外的途径发掘事件概率计算的新方法,其方向是从事件发生之间的影响关系、从事件局部到全局的关系出发,以此获得概率计算新方法的突破口.

定义 1.18 设有随机试验 E 及事件 A,B,若 $P(B)>0$,则称

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \tag{1.19}$$

为 A 在 B 发生的条件下的条件概率. 注意到概率为 0 的事件也有可能发生,读者可思考如何刻画 $P(B)=0$ 时的条件概率 $P(A|B)$.

同理,可定义

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

可以验证这样定义的条件概率满足概率公理化定义中关于概率的三个条件. 条件概率引进的角度是基于事件发生之间的影响关系构造的. 该定义同时也给出了条件概率的计算方法,事实上该定义式可启发人们从两个方面求 $P(A|B)$. 一方面从基于 A,B 原有的样本空间出发,通过计算 $P(AB),P(B)$,再由 $\frac{P(AB)}{P(B)}$ 求出 $P(A|B)$. 另一方面就 A,B 而言,可视 B 为一个缩小的样本空间,记为 Ω_B. 在此样本空间上,只要求出 $P(A)$ 即为原来定义下的 $P(A|B)$.

考虑由

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \quad 及 \quad P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)},$$

可得乘法公式

$$P(AB)=P(A|B)P(B)=P(B|A)P(A). \tag{1.20}$$

这个公式可推广到 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的场合:

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1\cdots A_{n-1}). \tag{1.21}$$

事实上条件概率可认为是一种相对概率,在 $P(A|B)$ 中当 $B=\Omega$ 时,$P(A|B)=P(A)$,故通常事件的概率可看成是条件概率的特例.

例 1.17 设加工产品 20 件,其中有 15 件一等品、5 件二等品,一等品、二等品混放. 现随机取两件,每次取一件,共两次,不放回抽样,求在第一次取到一等品的条件下第二次仍取到一等品的概率.

解 $A=\{$第一次取到一等品$\}$,$B=\{$第二次取到一等品$\}$,在原样本空间下

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{15\times 14}{20\times 19}}{\frac{15}{20}}=\frac{14}{19}.$$