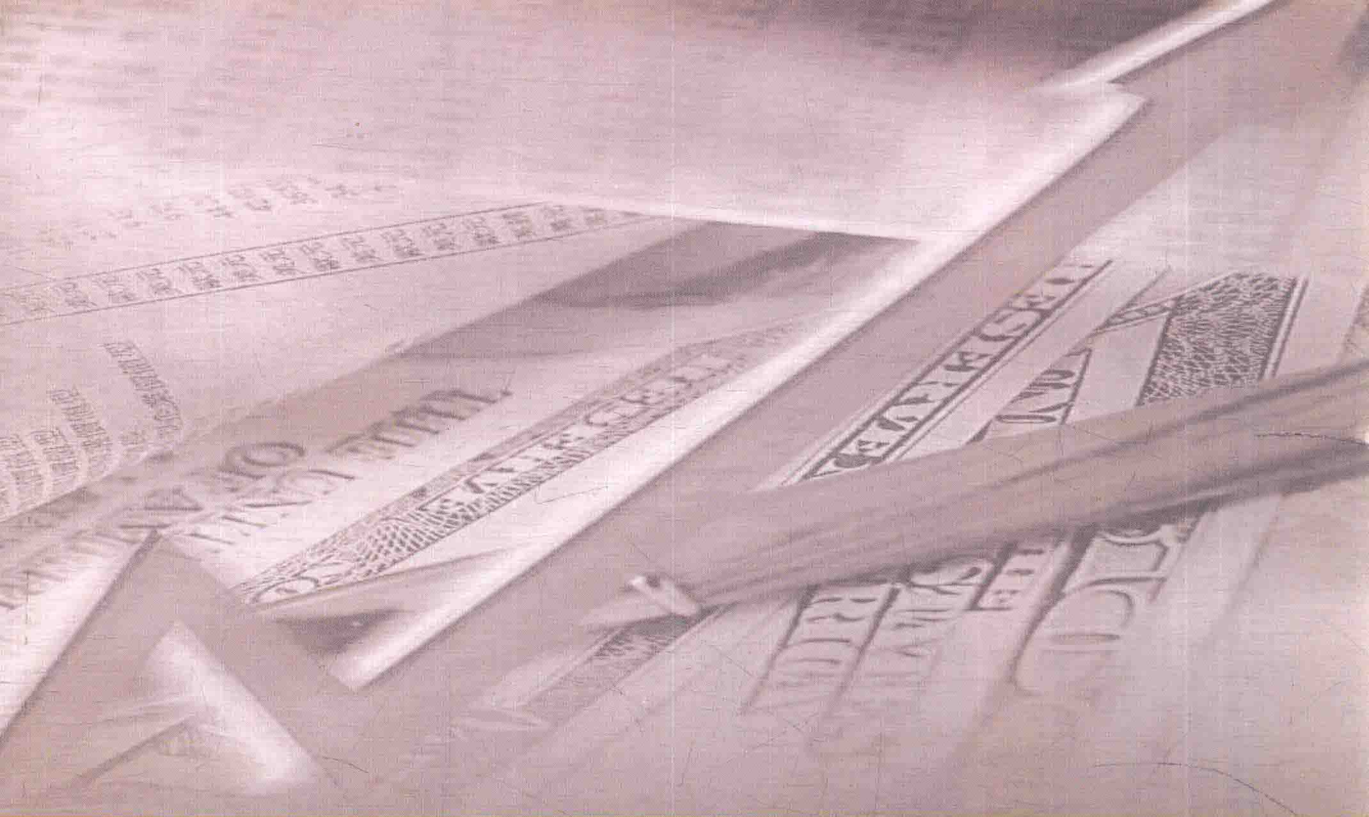

金融经济学

若干问题研究

王雪峰 著

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

金融经济学若干问题研究

王雪峰　著

哈爾濱工業大學出版社

内 容 简 介

本书的内容属于金融经济学和金融数学，是对一系列新问题的探索性研究，包括短期收益率与长期收益率之间关系的一些理论研究，无风险资产与风险资产之间具有固定比例的投资组合策略中的数学问题，仿照气体分子运动论的思想研究整个市场中股票的涨跌幅分布规律，将市场风险和极端风险都考虑在内的特殊的收益率分布函数的投资学性质研究，仿照列昂惕夫投入产出模型研究国家间货币流动的规律，关于时间序列平稳化的广义差分方法研究，金融期权的多叉树模型研究和B－S微分方程的广义差分模型研究，金融市场中不同金融资产之间相关性度量的新方法研究，协方差变动和资产收益水平变动条件下的马科维茨投资组合模型研究，基于差异信息求取广义度量矩阵的方法研究等内容。

本书可作为大专院校经济管理专业师生的参考书，也可作为金融专业的研究生、博士生和喜欢金融数学的学生们的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

金融经济学若干问题研究/王雪峰著. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2017.4
ISBN 978－7－5603－6600－5

Ⅰ.①金…　Ⅱ.①王…　Ⅲ.①金融学—研究
Ⅳ.①F830

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第088281号

策划编辑　杨秀华
责任编辑　郭　然
封面设计　刘长友
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编150006
传　　真　0451－86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨工业大学印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张19.5　字数458千字
版　　次　2017年4月第1版　2017年4月第1次印刷
书　　号　ISBN 978－7－5603－6600－5
定　　价　45.00元

前言

本书是近10年来我和我的研究生共同在金融学领域中所做的一些研究总结，实际上本书是一本论文集，其中的部分结果已在国内外学术期刊上发表。我在讲授和学习金融学理论的过程中经常会产生一些有趣的新想法，把其中我认为有学术价值的部分进行反复的分析与考证，在确认值得研究的情况下，根据我带的研究生的数学基础、金融学基础和兴趣特点为他们确定硕士论文的题目，制订详细的研究计划并提出预期可能达到的研究目标。值得欣慰的是，我的学生们都能投入较多的精力和较大的热情参与其中，完成预期的研究任务。在把这些研究生的学位论文整理成书稿的过程中，我不断地发现一些问题，包括语言表述欠妥、资料不完善、逻辑结构不合理等，甚至还有一些数学公式推导方面的错误。我只好仔细推导这些数学公式和反复修改书稿内容，这当然需要投入巨大的精力。以下概要地说明本书各个部分的研究内容和参与者的情况。

2007年我和研究生许磊开始研究长期持有风险资产的收益率和方差（风险）的相关问题，使用蒙特卡洛随机模拟方法进行研究，得到了较多新颖的计算结果（2009年硕士论文）。张晶的硕士论文（2013年）是在许磊硕士论文的基础上进行了一些理论探讨。此后我进一步研究了无限期持有风险资产的相关问题，用数理金融学方法进行研究，得到包括无限期持有风险资产的平均收益率的数学公式等一些理论结果，特别是当短期收益率服从对数正态分布时得到临界曲线的数学表达式和持有期为 n 时的一批理论结果。我将这些结果仔细整理后写成几篇学术论文，已经发表在国外学术期刊上，这些内容构成了第1章的主要内容。固定比例投资策略的数理模型研究是张贺清本科论文的题目，论文中得到的一些微分方程模型是以前没有见到的，这些内容构成本书的第2章（2013年本科学位论文）。第3章对股票市场中个股收益率的经验分布进行深入探讨，主要考察一日内整个市场所有股票的涨跌幅在不同区间中的分布特征，定量分析大盘变动和成交量变动对分布特征的影响，本章内容取自刘晓东2014年的硕士论文。在第4章中，我们提出了一类关于资产收益率的既能反映市场风险还能反映极端风险的分布密度函数模型，对这类奇异分布函数的数学性质和投资学性质进行系统的分析，并探讨了新模型在风险价值、信用风险评估、解释风险资产收益率的尖峰厚尾特征等方面的应用潜力，本章主要内容取自康飘飘2014年的硕士论文。在第5章中，我们提出用列昂惕夫投入产出模型研究世界范围内国家间货币流动的内在规律的设想，研究生丁文凤做了大量和细致的研究工作，由于涉及国家的国际储备，所以要对经典的模型进行仔细的修改，本章内容取自丁文凤2013年的硕士论文。第6章的研究内容是关于时间序列平稳化方法，我们提出一类广义差分方法，这样的研究题目有较大的挑战性，因为现在公认的方法就是逐次差分法。我认为给研究生定这样的题目不太合适，所以决定自己把这些研究设想整理出来。在第7章中，我们研究金融期权定价方面的问题，主要

是用离散化方法求解美式期权，包括用所提出的有限差分法求解 B—S 微分方程，还包括新型期权定价的多叉树理论模型的导出，本章内容取自刘埕伊 2016 年的硕士论文。第 8 章研究的内容比较特别，主要是考察股票间的相关性与大盘变动的关系问题，当大盘处于明显的多头行情或空头行情时股票间的相关性会系统性变大。对这个问题的详细考察及对股票间真实相关系数的寻找是核心问题，研究生袁杰在 2015 年的硕士论文中对这个问题进行了初步的研究，虽然研究结果没有达到我的预期设想，但是我还是决定把相关的内容纳入本书。在第 9 章中，我们研究资本市场中某项风险资产的收益水平或波动水平发生偏离预期的变化时整个最优投资组合发生变化的相关问题，研究工作基于马科维茨投资组合模型，其中使用了较复杂的数理金融学手段，本章内容取自张贺清 2015 年的硕士论文。第 10 章所涉及的问题是我在 20 多年前就考虑过的，是关于使用专家给出的样本间的差异信息寻找最佳度量矩阵的问题，这个问题有可以期待的应用前景，研究生姜天潇选择这个题目，得到了预期的理论推导部分(2015 年硕士论文)。

没有这些研究生的学位论文资料，我不可能完成本书的整理工作，所以我要感谢他们的辛勤劳动。我也要感谢他们对我的信任，因为我为他们选择的题目他们都毫无怨言地接受了，而且一旦选定目标就进入良好的研究状态。我带过的研究生中有几位是有很好的研究天赋的，但他们都选择到金融企业工作，不愿意当一名学者，这让我感到有些遗憾。我想当他们看到本书时一定会很高兴的。

由于作者自身水平的局限性，本书尚有许多疏漏和不妥之处，恳请专家和读者给予批评指正。

作　者

2017 年 1 月

目　录

第1章 长期持有风险资产的收益率的若干理论结果

本章研究长期持有风险资产的收益率的相关理论问题，在风险资产的短期收益率服从对数正态分布的假设下，得到了长期持有风险资产的收益率的分布密度函数和相应的均值与方差的理论公式，给出了所得到的理论公式的若干投资学性质的证明，详细讨论了短期收益率的均值和方差与长期收益率的均值和方差之间的关系，导出了关于短期收益率的均值和方差的临界曲线的数学公式。当风险资产的短期收益率服从一般的概率分布时，给出了当持有期 n 较大时的长期投资收益率的分布密度函数与相应的均值和方差的近似公式。

1.1 问题的相关背景

长期收益率是各期的短期收益率的几何平均，而各期的短期收益率的算术平均可以当作短期收益率的期望值。在投资分析中，人们习惯于用短期收益率的期望值来衡量收益水平，而用短期收益率的方差来衡量投资收益的不确定性(风险)。但当投资者计划进行长期投资时，基于风险资产的短期收益率的均值和方差来判断长期投资的收益水平和风险的大小是盲目的和容易出错的。比如一项风险资产A，其第 i 期的短期收益率(比如年收益率)用 ξ_i 表示，ξ_i 是随机变量，若 ξ_i 的数学期望是 $E(\xi_i)=20\%$，ξ_i 的标准差是 $\sigma(\xi_i)=0.45$，数学期望和方差与时间 i 无关，感觉投资于这项资产是比较诱人的。因为收益水平很高，一般无风险资产收益率约为 $r_f=5\%$，风险溢价为 $E(\xi_i)-r_f=15\%$。想知道长期持有风险资产A是怎样的结果，单凭直觉无法估计持有20年或持有50年的收益结果的均值是多少，也不知道收益结果的方差是多少，甚至收益结果的均值是否必然为正也不得而知。若 ξ_i 的数学期望仍是 $E(\xi_i)=20\%$，而 ξ_i 的标准差是 $\sigma(\xi_i)=0.55$，则长期持有这样的风险资产的收益水平和方差如何也不得而知。已有的投资学理论中还缺少对这一问题的系统探讨。另外，即使风险资产的短期收益率的均值和方差已知，由于短期收益率服从不同的概率分布，也会导致长期持有风险资产的收益和风险不同。关于长期持有风险资产，我们关心收益水平的均值是否为正，还关心收益水平的均值是否高于无风险资产的收益率，当然也关心长期持有风险资产的风险水平。

风险资产的短期收益率是随机的，一定期限连续投资(实际上是长期持有)的收益率也必然是随机的，并且没有简单的理论公式来表示短期和长期的收益率与方差之间的关系。笔者曾经用蒙特卡洛随机模拟方法得到一些反映风险资产的短期收益率和长期持有风险资产的年平均收益率之间关系的数值结果。用蒙特卡洛随机模拟方法研究风险资产

的短期收益率和长期持有风险资产的年平均收益率之间的关系，得到了关于短期收益率的均值和方差的经验的临界曲线，并得到了长期持有风险资产条件下何时可以获得正收益及何时获得负收益的一些经验结果。笔者还对于无限期持有风险资产的年平均收益率的问题进行较深入的理论分析，得到了一些有价值的理论公式。这些结果可以在笔者2011年出版的专著《金融经济学与金融数学若干问题研究》中找到，其中的大部分内容也曾在国际学术期刊上发表。笔者之前的这些研究工作有不足之处，主要是对持有期为n时的一般情况还没有得到相应的理论公式，只是得到了一些数值结果。对这个问题进行深入的理论研究的意义是不用怀疑的，只是这样的研究涉及比较复杂的数学推导。本章主要对风险资产的短期收益率服从对数正态分布这一特殊问题进行较深入的理论探讨，得到了一些预期的理论结果。

若投资者计划长期持有一项风险资产，他应该知道长期投资的年平均收益率和相应的方差，而不是仅仅知道短期收益率的分布。比如某项资产的年平均收益率是10%，收益率标准差为0.35，近似服从正态分布。若不进行认真测算，人们会认为长期持有该资产可以获得接近10%的年收益率，只是收益率的水平有较大的不确定性。用蒙特卡洛方法所做的实际计算结果表明，当连续持有该资产的期限较长时，比如连续持有30年，投资者得到的年平均收益率为2.54%，远远低于10%，但收益率的不确定性却大大降低。又比如某项资产的年收益率为5%，收益率标准差为0.35，计算结果表明，连续投资该资产20年的年平均收益率为−2.68%，这样的投资结果是灾难性的。

本章的主要目的是从理论上研究风险资产的短期收益率的均值和方差与长期持有该风险资产的收益率的关系，特别是研究短期收益率服从对数正态分布时的理论公式和相应的性质，这些问题在现有的投资学理论中还没有被深入研究过。长期持有风险资产的年平均收益率指标对于长期持有风险资产的投资者来说无疑具有重要的指导意义。

1.2　长期持有风险资产的收益率的理论公式

这里考虑某一项风险资产K，比如某一只股票。为了叙述方便，称资产K的年收益率为短期收益率。实际上短期和长期只是相对的，短期收益率可以是日收益率、周收益率或月收益率等。$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$是连续n年的收益率，ξ_i为独立地服从相同的分布密度函数$p(x)$的随机变量。这意味着短期收益率的均值和方差不随时间而改变。根据金融市场中风险资产的特点及金融学理论中的有效资本市场假设(EMH)，若金融时间序列的时间间隔不短于一日，则相邻的收益率之间的相关性很弱。假设$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$是独立同分布的随机变量，这样的假设符合风险资产价格的随机游走特性。由于ξ_i是收益率，所以要求$\xi_i>-1, i=1,2,\cdots,n$。也就是说，当$x\leqslant -1$时分布密度函数取零值，即$p(x)=0$。连续n年持有资产K的年平均收益率η_n由下式给出：

$$\eta_n=((1+\xi_1)(1+\xi_2)\cdots(1+\xi_n))^{1/n}-1$$

或者用下式表示：

$$\eta_n+1=((1+\xi_1)(1+\xi_2)\cdots(1+\xi_n))^{1/n} \tag{1.1}$$

为了方便，在本章中也称η_n为长期收益率。我们的主要任务是从理论上研究随机变

量 η_n 的数学期望和方差及相应的分布密度函数，还研究 $n \to +\infty$ 时的情况。显然，η_n 的数学公式是关于持有期内所有 $1+\xi_i$ 的几何平均的表达式。

为了说明长期持有风险资产的收益率的特点，我们考察一种特殊情况，即风险资产的价格在经过 n 期后回到初始价格，资产价格构成的时间序列为 $P_0, P_1, P_2, \cdots, P_n$，并且有 $P_n = P_0$。相应地，假设在此期间没有分红，则得到由 n 个收益率数值构成的时间序列 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$，其中

$$\xi_i = \frac{P_i - P_{i-1}}{P_i}, i = 1, 2, \cdots, n$$

由于 $P_n = P_0$，所以连续 n 期投资的总收益率为零。用 A_0 表示期初的投资额，用 A_n 表示期末风险资产的价值，即 $A_n = A_0(1+\xi_1)(1+\xi_2)\cdots(1+\xi_n)$，由假设条件有 $A_n = A_0$，即

$$A_0 = A_0(1+\xi_1)(1+\xi_2)\cdots(1+\xi_n)$$

所以有 $\prod\limits_{i=1}^{n}(1+\xi_i) = 1$。关于这种特殊情况，我们有下面的定理。

定理 1.1　设 $P_0, P_1, P_2, \cdots, P_n$ 是由风险资产价格构成的时间序列，$P_i > 0$，P_i 不恒等于某常数，且有 $P_n = P_0$。构造短期收益率时间序列为 $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$，其中

$$\xi_i = \frac{P_i - P_{i-1}}{P_i}, i = 1, 2, \cdots, n$$

则必然有 $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i > 0$。

证明：对于 $a_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n$，并且 a_i 不恒等于某常数，有

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$$

将 $a_i = 1 + \xi_i$ 代入上式，有

$$\left(\prod_{i=1}^{n}(1+\xi_i)\right)^{1/n} < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(1+\xi_i) = 1 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$$

根据定理的条件和前面的讨论，有 $\prod\limits_{i=1}^{n}(1+\xi_i) = 1$，代入上面的不等式，有 $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i > 0$。定理得证。

定理 1.1 断言，如果风险资产价格的初始值和终值相等(表明投资的总收益率为零)，则无论期间资产的价格以怎样的路径演变，只要价格出现波动，则价格序列决定的短期收益率序列的算术平均值必然取正值。定理 1.1 的结论与直觉判断不一致，$\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$ 是短期收益率期望的估计值，这个值可以是明显的正值，比如 $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i \approx 0.2$，但长期持有该资产的收益率为零。反过来说，若知道风险资产的短期收益率的均值和方差且短期收益率的均值大于零，长期持有这项风险资产可能得到零收益，当然也有可能得到负的收益。我们曾经用蒙特卡洛法进行随机模拟，得到的结论是，对于任意有意义的正的短期收益率 $\mu > 0$ 都存在一个临界的标准差 σ_μ，只要短期收益率的标准差 σ 满足 $\sigma > \sigma_\mu$，则长期持有该风险资产的年平均收益率为负数。

下面来仔细研究数学表达式(1.1)。对式(1.1)两边取对数,有

$$\ln(\eta_n+1)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(1+\xi_i)$$

随机变量$\omega_i=1+\xi_i$的密度函数记为$g(x)$,而随机变量ξ_i的密度函数为$p(x)$,根据概率理论的知识,有$g(x)=p(x-1)$。下面求随机变量的函数$\ln\omega_i=\ln(1+\xi_i)$的密度函数$\mathrm{d}(y)$,由于$y=\ln(x)$是一个单调增函数,反函数为$x=\mathrm{e}^y$,$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\mathrm{e}^y$,因此有

$$\mathrm{d}(y)=g(\mathrm{e}^y)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=g(\mathrm{e}^y)\mathrm{e}^y \tag{1.2}$$

下面求随机变量的和$\sum_{i=1}^{n}\ln(1+\xi_i)$的密度函数$M_n(y)$。由于$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$是独立同分布的随机变量,所以$\ln(1+\xi_1),\ln(1+\xi_2),\cdots,\ln(1+\xi_n)$也是独立同分布的随机变量。根据概率理论知识,随机变量的和$\sum_{i=1}^{n}\ln(1+\xi_i)$的密度函数$M_n(y)$是密度函数$\mathrm{d}(y)=g(\mathrm{e}^y)\mathrm{e}^y$与自己的$(n-1)$次卷积的结果。$\ln(1+\xi_1)+\ln(1+\xi_2)$的密度函数为$\mathrm{d}(y)*\mathrm{d}(y)$,有

$$\mathrm{d}(y)*\mathrm{d}(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}(t)\mathrm{d}(y-t)\mathrm{d}t$$

n项和$\sum_{i=1}^{n}\ln(1+\xi_i)$的密度函数为

$$M_n(y)=(\cdots((\mathrm{d}(y)*\mathrm{d}(y))*\mathrm{d}(y))*\cdots)*\mathrm{d}(y)$$

上式表示$\mathrm{d}(y)$与自己进行$(n-1)$次卷积的结果。

理论上可以用两种方式来求解$M_n(y)$:第一种方式是直接求出$\mathrm{d}(y)$与自己的$(n-1)$次卷积的解析表达式而得到$M_n(y)$;第二种方式是利用积分变换进行求解,比如傅里叶变换或拉普拉斯变换。由于$\mathrm{d}(y)$是非负的连续可微函数,并且有$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}(y)\mathrm{d}y=1$,所以$\mathrm{d}(y)$的傅里叶变换一定存在。记函数$\mathrm{d}(y)$的傅里叶变换为$D(z)$,即

$$F(\mathrm{d}(y))=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\infty}^{+\infty}\mathrm{d}(y)\mathrm{e}^{izy}\mathrm{d}y=D(z)$$

根据卷积运算的性质,有

$$F(\mathrm{d}(y)*\mathrm{d}(y))=D^2(z)$$

$$F\{(\cdots((\mathrm{d}(y)*\mathrm{d}(y))*\mathrm{d}(y))*\cdots)*\mathrm{d}(y)\}=D^n(z)$$

如果能够得到函数$D^n(z)$的傅里叶逆变换的解析表达式,就得到了随机变量的和$\sum_{i=1}^{n}\ln(1+\xi_i)$的密度函数$M_n(y)$,即

$$M_n(y)=F^{-1}(D^n(z))=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}D^n(z)\mathrm{e}^{-izy}\mathrm{d}z$$

假设已经得到了解析形式的密度函数$M_n(y)$,根据概率理论的知识,随机变量$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(1+\xi_i)$的密度函数$m_n(y)$的数学表达式为

$$m_n(y) = nM_n(ny) \tag{1.3}$$

接下来求随机变量 $\eta_n + 1$ 的密度函数 $N_n(x)$。

$$\ln(\eta_n + 1) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(1+\xi_i), \eta_n + 1 = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(1+\xi_i)}$$

由于 $x = \mathrm{e}^y$ 是一个单调增函数，反函数为 $y = \ln x$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}$，因此有

$$N_n(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}m_n\ln(x) = \frac{1}{x}m_n\ln(x) \tag{1.4}$$

根据概率理论的知识，随机变量 η_n 的密度函数 $H_n(x)$ 为

$$H_n(x) = \frac{1}{x+1}m_n\ln(x+1) \tag{1.5}$$

只要求出密度函数 $M_n(y)$ 就可以得到随机变量 η_n 的密度函数 $H_n(x)$。推导出密度函数 $M_n(y)$ 的解析表达式是至关重要的。可以看出，求解 η_n 的密度函数在数学上是一个比较复杂和困难的问题，涉及多次的数学变换和反变换，又涉及卷积运算，只有当短期收益率服从极特殊的分布函数时才有可能得到 η_n 的密度函数 $H_n(x)$ 的解析解。

求解随机变量 η_n 的密度函数 $H_n(x)$ 的步骤是：先根据 $p(x)$ 确定 $g(x) = p(x-1)$；再根据 $g(x)$ 确定 $d(y) = g(\mathrm{e}^y)\mathrm{e}^y$；然后根据 $d(y)$ 确定 $M_n(y)$，$M_n(y)$ 是 $d(y)$ 与自己进行 $(n-1)$ 次卷积的结果；再由 $M_n(y)$ 确定 $m_n(y) = nM_n(ny)$；最后确定随机变量 η_n 的密度函数 $H_n(x) = \frac{1}{x+1}m_n\ln(x+1)$。

1.3 短期收益率服从对数正态分布假设的合理性分析

在本节中我们假设资产 K 的短期收益率 ξ 服从特殊的对数正态分布形式，在此假设下推导相应的理论公式。实际上，假设短期收益率服从正态分布或者 t 分布比较符合真实的风险资产的情况，可惜在这些分布假设条件下无法得到显式表达的理论公式。对数正态分布不具有对称的性质，而一般的短期收益率大致呈对称分布形式，这显然不是一个令人非常满意的假设。我们期待在这个特殊的假设下得到完美的解析公式，更进一步期待所得到的公式在投资期限 n 较大时可以很好地逼近真实的情况。

服从对数正态分布的随机变量的取值要求为正数，而短期收益率 ξ 的取值范围为 $(-1, +\infty)$，直接使用不合理。但是注意到 $(1+\xi)$ 的取值范围为 $(0, +\infty)$，所以 $(1+\xi)$ 符合对数正态分布的值域的要求。假设短期收益率 ξ 决定的随机变量 $(1+\xi)$ 服从参数为 (μ, σ) 的对数正态分布，即随机变量 $(1+\xi)$ 的密度函数为

$$q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}\mathrm{e}^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{1.6}$$

当 μ 比较大而 σ 比较小时，$q(x)$ 近似呈现对称形式，而在 μ 比较小同时 σ 比较大时，$q(x)$ 呈现明显的非对称形式。根据对数正态分布函数的性质，随机变量 $(1+\xi)$ 的数学期望为

$$E(1+\xi) = \mathrm{e}^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \tag{1.7}$$

随机变量$(1+\xi)$的方差为

$$D(1+\xi)=\mathrm{e}^{2\mu+\sigma^2}(\mathrm{e}^{\sigma^2}-1) \tag{1.8}$$

根据概率理论的知识，随机变量ξ的密度函数为

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(x+1)}\mathrm{e}^{-\frac{(\ln(x+1)-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

随机变量ξ的数学期望为

$$E(\xi)=\mathrm{e}^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}-1 \tag{1.9}$$

随机变量ξ的方差与式(1.8)相同，即

$$D(\xi)=\mathrm{e}^{2\mu+\sigma^2}(\mathrm{e}^{\sigma^2}-1) \tag{1.10}$$

通过大量的统计分析知道，常见风险资产的短期收益率的密度函数大致呈现对称的单峰函数形态。与正态分布密度函数相比，实际的风险资产收益率的经验分布密度函数一般具有较明显的尖峰厚尾特征，即在密度函数的极大点处，实际的经验分布密度函数值比正态分布密度函数值大，而实际的经验分布密度函数在远离均值的地方的取值大于正态分布密度函数的值。对于对称形态的密度函数，其极大点与其数学期望的取值点一致。对于对数正态分布的密度函数，根据方程$\frac{\mathrm{d}p(x)}{\mathrm{d}x}=0$不难导出$x=\mathrm{e}^{\mu-\sigma^2}-1$，这是对数正态分布的密度函数取极大值的点。考察$\xi$的密度函数取极大值的点与$\xi$的数学期望的偏离程度，用$ER$表示偏离的数值。$ER$越小则说明对数正态分布偏离对称分布形态越少；反之，ER越大则说明对数正态分布偏离对称分布形态越多。结合式(1.9)有

$$ER=(\mathrm{e}^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}-1)-(\mathrm{e}^{\mu-\sigma^2}-1)=\mathrm{e}^{\mu}(\mathrm{e}^{\frac{\sigma^2}{2}}-\mathrm{e}^{-\sigma^2})$$

在σ^2较小的条件下，借助于泰勒级数展开法有

$$ER\approx\frac{3}{2}\sigma^2\mathrm{e}^{\mu}$$

对于真实的风险资产，比如外汇、蓝筹股票、具有浮动利率的银行存款、国库券、企业债券等，其年收益率的标准差σ有较大的不同，股票和外汇约为0.35，企业债券约为0.08，银行存款和国库券约为0.04。根据式(1.10)，当$\mu=0$时，$D(\xi)=\mathrm{e}^{\sigma^2}(\mathrm{e}^{\sigma^2}-1)\approx\sigma^2+\sigma^4$，而当$\sigma^2$较小时$\sigma^4$更小，有$D(\xi)\approx\sigma^2$。我们近似地用$D(\xi)$代替$ER$表达式中的$\sigma^2$，并近似地取$\mu=0$，有$ER$(股票)$\approx 0.18$，$ER$(债券)$\approx 0.01$，$ER$(国库券)$\approx 0.002$。在参数$\sigma^2$较小的情况下，对数正态分布接近于对称形态，而对于参数σ^2较大的情况，对数正态分布偏离对称形态较多。从理论上讲，对数正态分布适合于近似表达风险较小的资产收益率的分布密度函数，对于风险较大的股票和外汇，其收益率的密度函数难以用对数正态分布函数高精度地拟合。

1.4　短期收益率服从对数正态分布条件下的理论公式

本节的主要任务是在分布密度函数为式(1.6)的条件下，按照1.2节的理论公式导出关于η_n的解析形式的数学公式。推导$\ln(1+\xi)$的密度函数$\mathrm{d}(y)$：根据式(1.2)有$\mathrm{d}(y)=q(\mathrm{e}^y)\mathrm{e}^y$，其中$q(x)$由式(1.6)决定，代入整理有

$$d(y)=\frac{e^y}{\sqrt{2\pi}\sigma e^y}e^{-\frac{(\ln e^y-\mu)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

所以 $\ln(1+\xi)$ 服从均值为 μ，方差为 σ^2 的正态分布，即 $\ln(1+\xi)\sim N(\mu,\sigma^2)$。

下面来推导随机变量的和 $\sum_{i=1}^{n}\ln(1+\xi_i)$ 的密度函数 $M_n(y)$。根据正态分布密度函数的特点可以知道，正态分布随机变量的和仍然服从正态分布，均值和方差分别求和就可以得到和的分布中的均值和方差，有

$$M_n(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma^2 n)}}e^{-\frac{(y-n\mu)^2}{2(n\sigma^2)}} \tag{1.11}$$

根据概率理论的知识，随机变量 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(1+\xi_i)$ 的密度函数 $m_n(y)$ 为

$$m_n(y)=nM_n(ny)=\frac{n}{\sqrt{2\pi(\sigma^2 n)}}e^{-\frac{(ny-n\mu)^2}{2(n\sigma^2)}}$$

对上式进行化简处理，有

$$m_n(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sigma/\sqrt{n})}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2(\sigma/\sqrt{n})^2}} \tag{1.12}$$

密度函数 $m_n(y)$ 代表均值为 μ，方差为 $\frac{\sigma^2}{n}$ 的正态分布。

下面来推导随机变量 η_n+1 的密度函数 $N_n(x)$。$\eta_n+1=e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(1+\xi_i)}$，根据式(1.4)有

$$N_n(x)=\frac{1}{x}m_n\ln(x)=\frac{1}{x\sqrt{2\pi}(\sigma/\sqrt{n})}e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2(\sigma/\sqrt{n})^2}}$$

这是一个服从对数正态分布的密度函数，相应的参数为$(\mu,\sigma^2/n)$。下面来推导随机变量 η_n 的密度函数 $H_n(x)$。根据式(1.5)有

$$H_n(x)=\frac{1}{x+1}m_n\ln(x+1)=\frac{1}{(x+1)\sqrt{2\pi}(\sigma/\sqrt{n})}e^{-\frac{(\ln(x+1)-\mu)^2}{2(\sigma/\sqrt{n})^2}} \tag{1.13}$$

这是一个参数为 μ 和 $\frac{\sigma^2}{n}$ 的对数正态分布的密度函数。记随机变量 η_n 的数学期望为 r_n，方差为 D_n^2，根据式(1.9)和式(1.10)，有

$$r_n=e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2n}}-1 \tag{1.14}$$

$$D_n^2=e^{2\mu+\frac{\sigma^2}{n}}(e^{\frac{\sigma^2}{n}}-1) \tag{1.15}$$

1.5　长期持有收益率服从对数正态分布的资产的一些理论结果

在本节中，假设风险资产 K 的短期收益率 ξ 服从对数正态分布，密度函数为 $p(x)$，即

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(x+1)}e^{-\frac{(\ln(x+1)-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

其中 $\sigma>0$。根据 1.4 节得到的式(1.14)和式(1.15)，我们有下面的定理。

定理 1.2　用 r_∞ 表示持有风险资产 K 并且时间 n 趋于无穷大时收益率 η_n 的数学期

望的极限值，则有

$$r_{\infty}=e^{\mu}-1 \tag{1.16}$$

证明：根据式(1.14)，有

$$r_n=e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2n}}-1$$

容易得出 $r_{\infty}=\lim\limits_{n\to+\infty}r_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2n}}-1)=e^{\mu}-1$。定理得证。

定理 1.3　用 D_{∞}^2 表示持有风险资产 K 并且时间 n 趋于无穷大时收益率 η_n 的方差的极限值，则有

$$D_{\infty}^2=0 \tag{1.17}$$

证明：根据式(1.15)，有

$$D_n=e^{2\mu+\frac{\sigma^2}{n}}(e^{\frac{\sigma^2}{n}}-1)$$

容易得出 $D_{\infty}=\lim\limits_{n\to+\infty}D_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(e^{2\mu+\frac{\sigma^2}{n}}(e^{\frac{\sigma^2}{n}}-1))=0$。定理得证。

定理 1.2 和定理 1.3 的结论说明，当持有风险资产 K 的时间 n 足够长时，每期的平均收益水平 η_n 近似为 $e^{\mu}-1$，并且 η_n 的不确定性逐渐消失，这是因为 D_n^2 趋于 0。长期持有风险资产的收益水平取决于参数 μ。

定理 1.4　当持有风险资产的时间 n 趋于无穷大时，短期收益率的平均值 $E(\xi)$ 一定大于无限期持有风险资产时的平均收益率 r_{∞}，两者之差为 $e^{\mu}(e^{\frac{\sigma^2}{2}}-1)>0$，即

$$E(\xi)-r_{\infty}=e^{\mu}(e^{\frac{\sigma^2}{2}}-1) \tag{1.18}$$

或者写成

$$r_{\infty}=E(\xi)-e^{\mu}(e^{\frac{\sigma^2}{2}}-1)$$

证明：根据式(1.16)，有 $r_{\infty}=e^{\mu}-1$；根据式(1.9)，有 $E(\xi)=e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}-1$。容易得出

$$E(\xi)-r_{\infty}=e^{\mu}(e^{\frac{\sigma^2}{2}}-1)$$

由于 $e^{\mu}>0$，又因为$\frac{\sigma^2}{2}>0$，所以 $e^{\frac{\sigma^2}{2}}>1$，即 $e^{\frac{\sigma^2}{2}}-1>0$，所以有

$$E(\xi)-r_{\infty}=e^{\mu}(e^{\frac{\sigma^2}{2}}-1)>0$$

定理得证。

定理 1.4 的结论说明，无限期持有风险资产 K 的平均收益率 r_{∞} 一定小于风险资产的短期收益率的平均值 $E(\xi)$。从式(1.18)可以看出，对于固定的 $\mu>0$，若 σ^2 越大则差 $E(\xi)-r_{\infty}$ 越大，说明长期收益率水平的下降幅度 $E(\xi)-r_{\infty}$ 与因子 σ^2 正相关。另外，从式(1.18)可以看出，若 $\sigma^2=0$，则有 $E(\xi)-r_{\infty}=0$，这说明对于无风险资产而言，短期收益率与长期持有的平均收益率相等。

定理 1.5　记 $r=E(\xi)$，$D^2=D(\xi)$，对于任意正的短期收益率水平 $r>0$，可以找到一个相应的临界方差值 D^2 满足下面的等式：

$$D^2=(1+r)^2((1+r)^2-1) \tag{1.19}$$

相应地，对数正态分布密度函数中的参数取为 $\mu=0$，$\sigma^2=2\ln(1+r)$，这时无限期持有

该风险资产的平均收益率为 0,即有 $r_\infty=0$。

证明:根据式(1.6)有 $r_\infty=\mathrm{e}^\mu-1$。令 $r_\infty=0$,即 $\mathrm{e}^\mu=1$,从而有 $\mu=0$。根据式(1.9),有

$$r=E(\xi)=\mathrm{e}^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}-1=\mathrm{e}^{\frac{\sigma^2}{2}}-1>0$$

有 $\mathrm{e}^{\frac{\sigma^2}{2}}=1+r$,从而有 $\sigma^2=2\ln(1+r)$。这是由给定的 $r>0$ 确定参数 σ 的公式。又由式(1.10)有 $D^2=\mathrm{e}^{2\mu+\sigma^2}(\mathrm{e}^{\sigma^2}-1)$。取 $\mu=0,\sigma^2=2\ln(1+r)$,有

$$D^2=(1+r)^2((1+r)^2-1)$$

根据上面的推导,有 $r_\infty=0$ 成立。定理得证。

定理 1.6　对于任意的正的短期收益率水平 $E(\xi)=r>0$,短期收益率的方差值为 $D(\xi)=D^2$,则如果 $D^2<(1+r)^2((1+r)^2-1)$,则有 $r_\infty>0$;如果 $D^2>(1+r)^2((1+r)^2-1)$,则有 $r_\infty<0$;如果 $D^2=(1+r)^2((1+r)^2-1)$,则有 $r_\infty=0$。

证明:短期收益率服从对数正态分布的随机变量的均值 r 和方差 D^2 的公式为

$$r=\mathrm{e}^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}-1$$
$$D^2=\mathrm{e}^{2\mu+\sigma^2}(\mathrm{e}^{\sigma^2}-1)$$

由 $r=\mathrm{e}^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}-1$ 有 $\mathrm{e}^{\sigma^2}=\mathrm{e}^{-2\mu}(1+r)^2$,所以有 $\mathrm{e}^{2\mu+\sigma^2}=(1+r)^2$,代入 D^2 的表达式,有 $D^2=(1+r)^2(\mathrm{e}^{-2\mu}(1+r)^2-1)$。根据式(1.16)有 $r_\infty=\mathrm{e}^\mu-1$。

若 $D^2<(1+r)^2((1+r)^2-1)$,则必有 $\mu>0$,从而有 $r_\infty>0$。

若 $D^2>(1+r)^2((1+r)^2-1)$,则必有 $\mu<0$,从而有 $r_\infty<0$。

若 $D^2=(1+r)^2((1+r)^2-1)$,则必有 $\mu=0$,从而有 $r_\infty=0$。

定理得证。

从定理 1.5 中可得到一个重要的函数关系 $D^2=(1+r)^2((1+r)^2-1)$。对于给定的 $r>0$ 作为短期收益率的均值,若方差取为由式(1.19)决定的 D^2,则可以保证 $r_\infty=0$。比如取短期收益率的均值 $r=0.1$,这是一个比较高的短期收益率,由式(1.19)可以得到 $D^2=0.254$,这样的方差反映的风险并不太大。定理 1.5 的结论告诉我们,只要短期收益率的方差大于 0.254,则长期持有这样的风险资产必然取得负的收益率。结合定理 1.6 可知,曲线 $D^2=(1+r)^2((1+r)^2-1)$ 是一条关于 r_∞ 取值的临界曲线。在由 (r,D) 决定的坐标系中,曲线 $D^2=(1+r)^2((1+r)^2-1)$ 将第一象限分为两个区域,上部的区域对应于 $r_\infty<0$ 的模式,下部的区域对应于 $r_\infty>0$ 的模式。

定理 1.7　若有 $-\frac{\sigma^2}{2}<\mu<0$,则 $E(\xi)>0$,并且有 $r_\infty<0$;若有 $-\frac{\sigma^2}{2}<\mu<-\frac{\sigma^2}{2n}$,则 $E(\xi)>0$,并且有 $r_n<0$。r_n 是式(1.14)决定的持有期为 n 时的年平均收益率。

证明:由式(1.16),$r_\infty=\mathrm{e}^\mu-1$,则 $r_\infty<0$ 意味着 $\mu<0$。由式(1.9),$E(\xi)=\mathrm{e}^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}-1$,则 $E(\xi)>0$ 意味着 $\mu+\frac{\sigma^2}{2}>0$,即 $\mu>-\frac{\sigma^2}{2}$。所以当 $-\frac{\sigma^2}{2}<\mu<0$ 时有 $E(\xi)>0$,并且有 $r_\infty<0$。

由式(1.14),$r_n=\mathrm{e}^{\mu+\frac{\sigma^2}{2n}}-1$,则 $r_n<0$ 意味着 $\mu+\frac{\sigma^2}{2n}<0$,即 $\mu<-\frac{\sigma^2}{2n}$。由式(1.9),$E(\xi)=$