普通高等教育农业部“十二五”规划教材

全国高等农林院校“十二五”规划教材

线性代数

王爱茹 贾　鹂◎主编

中国农业出版社

普通高等教育农业部“十二五”规划教材
全国高等农林院校“十二五”规划教材

线性代数

王爱茹 贾 鹏 主编

中国农业出版社

图书在版编目（CIP）数据

线性代数 / 王爱茹，贾鹏主编．—北京：中国农业出版社，2011.12（2017.1 重印）
普通高等教育农业部“十二五”规划教材　全国高等农林院校“十二五”规划教材
ISBN 978-7-109-16250-1

Ⅰ.①线…　Ⅱ.①王…②贾…　Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材　Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2011）第 231508 号

中国农业出版社出版
（北京市朝阳区农展馆北路 2 号）
（邮政编码 100125）
策划编辑　朱　雷　魏明龙
文字编辑　魏明龙

三河市君旺印务有限公司印刷　新华书店北京发行所发行
2011 年 12 月第 1 版　2017 年 1 月河北第 4 次印刷

开本：720mm×960mm　1/16　印张：13.5
字数：236 千字
定价：22.00 元

内 容 简 介

本教材主要内容有：行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值与特征向量、二次型。从方程组引出行列式，用行列式研究矩阵，用矩阵研究方程组，用方程组研究特征值和特征向量，用特征值和特征向量研究二次型。每节配适量习题，每章配总习题，便于读者学习和使用。从简处理一些复杂的定理证明，对较难的计算技巧不做过多要求，重点放在线性代数的基本概念、基本方法和基本计算上。书后附 MATLAB 简介，重点介绍如何用 MATLAB 求解线性代数问题。

本教材可作为高等农林院校各专业的线性代数课程教材。

编写人员名单

主　编　王爱茹　贾　鹏

副主编　董　磊　刘淑俊　甄新武　徐文君　李雪非

参　编　周　静　左吉峰　朱　莹　范彦方

　　　　刘瑞英　李红智　郝粉霞　聂立川

主　审　汪　雷

前　言

本教材是普通高等教育农业部“十二五”规划教材和全国高等农林院校“十二五”规划教材，是在借鉴国内外各位同仁编写的教材和总结我校数学教师多年教学经验的基础上编写的，在编写过程中我们注意到以下几点：

重点放在线性代数的基本概念、基本方法和基本计算上。主要介绍行列式、矩阵、线性方程组、特征值与特征向量、二次型的基本概念和基本问题，对较难的计算技巧不做过多要求。

线性代数有很强的理论性和逻辑性，有些定理虽然结论很简洁但证明很复杂，对于非数学专业的学生有些困难，为此我们从简处理了一些复杂的定理证明。

线性代数有高度的抽象性和广泛的应用性，为此在引入基本概念时尽量从实际问题或学生熟悉的问题出发，引出抽象的概念。在各部分讲解中，尽量给出该部分应用的领域和实际应用的例子，以使读者了解线性代数的应用。

为便于教学，在章节安排上，基本上每节内容在两学时内完成。每节配适量习题，每章配总习题，便于教师教学和读者学习、使用。

随着计算机技术的发展，特别是数学软件的广泛应用，数学的作用显得越来越重要，应用数学软件解决数学问题也成为科技工作者的一项基本技能，为此书后附 MATLAB 简介，重点介绍如何用

MATLAB求解线性代数问题。

在本教材的编写过程中，河北农业大学教务处和理学院给予了大力支持和帮助，在此，表示诚挚的感谢。

由于编者水平有限，书中难免有不妥之处，敬请读者批评指正。

编 者

2011年9月

目　录

第1章 行列式

行列式是线性代数的重要内容之一，行列式的概念是在研究线性方程组的求解过程中提出的．本章介绍行列式的概念、性质和计算，以及用行列式求解线性方程组的方法——克拉默法则．

1.1 行列式的定义

1.1.1 二元线性方程组与二阶行列式

先看二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，利用消元法：第一个方程乘以 a_{22} 减去第二个方程乘以 a_{12}，可解得 x_1，同理可解得 x_2. 方程组的解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}.$$

在上面的计算结果中，分子和分母都是两个数乘积之差的形式，为了便于记忆，我们给出二阶行列式的定义，并画出实线和虚线帮助理解．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}, \tag{1.2}$$

其中横排为行，竖排为列，因有两行、两列，故称为二阶行列式．行列式中的每个数称为行列式的元素，简称元，a_{ij} 表示位于第 i 行第 j 列的元．二阶行列式有 4 个元，其值等于正对角线上两个元的乘积减去负对角线上两个元的乘积，即实线上两个数的乘积减去虚线上两个数的乘积．

例 1.1.1 计算二阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$ 的值．

解 由定义(1.2)式，得

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}=1\times(-4)-3\times 2=-10.$$

有了二阶行列式的定义，方程组的解可由行列式表示．若称由二元线性方

程组未知数的系数组成的行列式为方程组的系数行列式 D，则

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

若记

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则方程组的解可以写成

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D}. \tag{1.3}$$

1.1.2 三元线性方程组与三阶行列式

再看三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3. \end{cases} \tag{1.4}$$

用 $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，$-\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$ 分别乘以第 1、2、3 个方程，然后相加，得

$$\left[a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}\right]x_1$$

$$=b_1\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-b_2\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+b_3\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

为便于记忆，规定三阶行列式的值为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix},$$

其中 $\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 是在三阶行列式中划去 a_{11} 所在的行和列后剩余的元按照原来的顺序所构成的二阶行列式，称为元 a_{11} 的**余子式**，记为 M_{11}. 类似地，a_{21}，a_{31} 的余子式分别为

$$M_{21}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ M_{31}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix},$$

带符号的余子式 $A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}$，$A_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}$，$A_{31}=(-1)^{3+1}M_{31}$ 分

别称为 a_{11}，a_{21}，a_{31} 的**代数余子式**.

有了代数余子式的概念，三阶行列式的值可以定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} = \sum_{i=1}^{3} a_{i1}A_{i1}, \quad (1.5)$$

即：**三阶行列式的值等于第 1 列的每个元与其对应的代数余子式的乘积之和.**

对于三元线性方程组，系数行列式的值为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix},$$

若记

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = b_1\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - b_2\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + b_3\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix},$$

则有 $Dx_1 = D_1$.

类似地，记

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

则有 $Dx_2 = D_2$，$Dx_3 = D_3$. 于是，当 $D \neq 0$ 时，方程组有解：

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}. \quad (1.6)$$

上述的二、三元方程组的求解公式在计算上是复杂的，但在形式上却有着明显的规律性，容易记忆：求解公式的分母都是系数行列式 D，它由方程组中未知数的系数组成，且保持它们在方程组中的位置不变；而分子则是将系数行列式 D 中对应未知数的列替换为方程组右端同一行的常数而得到的行列式.

例 1.1.2 求解三元线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -2, \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$$

解 因为系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&-2&1\\-1&1&-1\\2&1&-3\end{vmatrix}=A_{11}+(-1)A_{21}+2A_{31}$$
$$=(-1)^{1+1}M_{11}-(-1)^{2+1}M_{21}+2(-1)^{3+1}M_{31}$$
$$=\begin{vmatrix}1&-1\\1&-3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-2&1\\1&-3\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}-2&1\\1&-1\end{vmatrix}=5\neq0,$$

所以方程组有唯一解．

$$D_1=\begin{vmatrix}-2&-2&1\\0&1&-1\\1&1&-3\end{vmatrix}=5，D_2=\begin{vmatrix}1&-2&1\\-1&0&-1\\2&1&-3\end{vmatrix}=10,$$
$$D_3=\begin{vmatrix}1&-2&-2\\-1&1&0\\2&1&1\end{vmatrix}=5.$$

由公式(1.6)得

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1，x_2=\frac{D_2}{D}=2，x_3=\frac{D_3}{D}=1.$$

注意，三阶行列式中共有 9 个数，按三阶行列式的定义，完全展开后得

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$
$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.\quad(1.7)$$

三阶行列式也可利用图 1.1 展开：

图 1.1 中，三条实线，每条实线连结的三个数的乘积前面取正号；三条虚线，每条虚线连结的三个数的乘积前面取负号．这种计算三阶行列式的方法称为**对角线法则**．

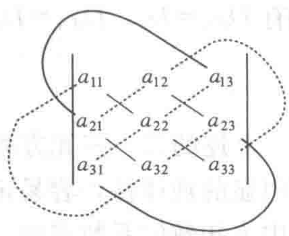

图 1.1

例 1.1.3 利用对角线法则计算行列式的值：

$$D=\begin{vmatrix}1&-2&1\\-1&1&-1\\2&1&-3\end{vmatrix}.$$

解 按照对角线法则

$$\begin{aligned}D&=1\times1\times(-3)+(-1)\times1\times1+2\times(-2)\times(-1)-\\&\quad 1\times1\times2-(-2)\times(-1)\times(-3)-1\times1\times(-1)\\&=-3-1+4-2+6+1=5.\end{aligned}$$

要注意的是，四阶及四阶以上的行列式一般没有类似的对角线法则．

1.1.3 n 阶行列式的定义

总结上述二、三阶行列式的定义，可以得到 n 阶行列式的递推定义．

一般地，如果我们定义了 $n-1$ 阶行列式的值，那么在

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

表示的 n 阶行列式中，划去 a_{ij} 所在的行和列，剩余元按照原来的顺序构成的 $n-1$阶行列式称为 a_{ij} 的**余子式**，记为 M_{ij}；称$(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为 a_{ij} 的**代数余子式**，记为 A_{ij}．

用递推的方法，可以得到 n 阶行列式值的定义：**n 阶行列式的值等于第 1 列的每个元与其对应的代数余子式的乘积之和**．即：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \cdots + a_{n1}A_{n1} = \sum_{i=1}^{n} a_{i1}A_{i1}. \quad (1.8)$$

上式也称为 n 阶行列式按第 1 列展开的展开式．它给出了计算 n 阶行列式值的方法．对于只有一个数的行列式，人们规定它的值为这个数本身．易见，二、三阶行列式的定义与上述 n 阶行列式的一般定义是相符的．

例 1.1.4 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ 的值．

解 按定义，有

$$D = 1A_{11} + 3A_{21} + 0A_{31} + 0A_{41} = 1\times(-1)^{1+1}M_{11} + 3\times(-1)^{2+1}M_{21}$$

$$= 1\times\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 3\times(-1)\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -6\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -6.$$

行列式不仅可按第 1 列展开，也可按第 1 行展开．

定理 1.1.1 **n 阶行列式的值等于第 1 行的每个元与其对应的代数余子式的乘积之和**．即：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}. \qquad (1.9)$$

证明略.

例 1.1.5 用定理 1.1.1 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ 的值.

解 按定理 1.1.1，有

$$D=1A_{11}+2A_{12}+0A_{13}+0A_{14}=1\times(-1)^{1+1}M_{11}+2(-1)^{1+2}M_{12}$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}-6\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-6.$$

上面按照第 1 列的展开式定义了 n 阶行列式的值，可以想见，在行列式的阶数较高时，按定义计算行列式的值几乎是不可能的. 为计算行列式的值，有必要研究行列式的性质.

习 题 1.1

1. 计算下列行列式的值:

(1) $\begin{vmatrix} 2 & -8 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$;　　(2) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$;

(3) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$;　　(4) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix}$;

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$;　　(6) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$;

(7) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$.