国家出版基金资助项目
现代数学中的著名定理纵横谈丛书
丛书主编 王梓坤

SCHUR CONVEX FUNCTIONS AND INEQUALITIES

Schur凸函数与不等式

石焕南 著

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

国家出版基金资助项目

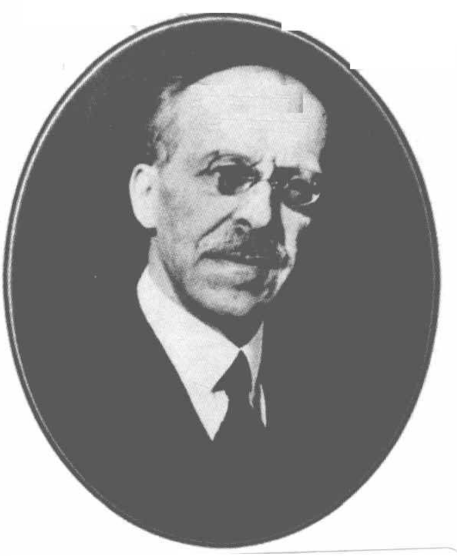
现代数学中的著名定理纵横谈丛书

丛书主编　王梓坤

SCHUR CONVEX FUNCTIONS AND INEQUALITIES

Schur凸函数与不等式

石焕南 著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容提要

Schur 凸函数(Schur convex functions)是受控理论(Majorization theory)的核心概念,是比熟知的凸函数更为广泛的一类函数,有着广泛的应用. 本书介绍有关Schur 凸函数的基本理论和推广(包括 Schur 几何凸函数、Schur 调和凸函数、Schur 幂凸函数等),并且介绍了 Schur凸函数在不等式(包括平均值不等式、积分不等式、序列不等式、对称函数不等式和几何不等式等)方面的应用. 本书包含了国内外学者(主要是国内学者)近年来所获得的大量最新的研究成果,提供了六百多篇有关的参考文献.

本书适合数学研究人员、大学数学教师、研究生、本科生、中学数学教师及数学爱好者参考阅读.

图书在版编目(CIP)数据

Schur 凸函数与不等式/石焕南著. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2017.6

(现代数学中的著名定理纵横谈丛书)

ISBN 978－7－5603－6493－3

Ⅰ.①S… Ⅱ.①石… Ⅲ.①凸函数 Ⅳ.①O174.13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 042341 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　杜莹雪
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451－86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张 50.75　字数 542 千字
版　　次　2017 年 6 月第 1 版　2017 年 6 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978－7－5603－6493－3
定　　价　188.00 元

◎代序

读书的乐趣

你最喜爱什么——书籍.

你经常去哪里——书店.

你最大的乐趣是什么——读书.

这是友人提出的问题和我的回答.真的,我这一辈子算是和书籍,特别是好书结下了不解之缘.有人说,读书要费那么大的劲,又发不了财,读它做什么?我却至今不悔,不仅不悔,反而情趣越来越浓.想当年,我也曾爱打球,也曾爱下棋,对操琴也有兴趣,还登台伴奏过.但后来却都一一断交,“终身不复鼓琴”.那原因便是怕花费时间,玩物丧志,误了我的大事——求学.这当然过激了一些.剩下来唯有读书一事,自幼至今,无日少废,谓之书痴也可,谓之书橱也可,管它呢,人各有志,不可相强.我的一生大志,便是教书,而当教师,不多读书是不行的.

读好书是一种乐趣,一种情操;一种向全世界古往今来的伟人和名人求

教的方法，一种和他们展开讨论的方式；一封出席各种活动、体验各种生活、结识各种人物的邀请信；一张迈进科学宫殿和未知世界的入场券；一股改造自己、丰富自己的强大力量. 书籍是全人类有史以来共同创造的财富，是永不枯竭的智慧的源泉. 失意时读书，可以使人重整旗鼓；得意时读书，可以使人头脑清醒；疑难时读书，可以得到解答或启示；年轻人读书，可明奋进之道；年老人读书，能知健神之理. 浩浩乎！洋洋乎！如临大海，或波涛汹涌，或清风微拂，取之不尽，用之不竭. 吾于读书，无疑义矣，三日不读，则头脑麻木，心摇摇无主.

潜能需要激发

我和书籍结缘，开始于一次非常偶然的机会. 大概是八九岁吧，家里穷得揭不开锅，我每天从早到晚都要去田园里帮工. 一天，偶然从旧木柜阴湿的角落里，找到一本蜡光纸的小书，自然很破了. 屋内光线暗淡，又是黄昏时分，只好拿到大门外去看. 封面已经脱落，扉页上写的是《薛仁贵征东》. 管它呢，且往下看. 第一回的标题已忘记，只是那首开卷诗不知为什么至今仍记忆犹新：

日出遥遥一点红，飘飘四海影无踪.

三岁孩童千两价，保主跨海去征东.

第一句指山东，二、三两句分别点出薛仁贵（雪、人贵）. 那时识字很少，半看半猜，居然引起了我极大的兴趣，同时也教我认识了许多生字. 这是我有生以来独立看的第一本书. 尝到甜头以后，我便千方百计去找书，向小朋友借，到亲友家找，居然断断续续看了《薛丁山征西》《彭公案》《二度梅》等，樊梨花便成了我心

中的女英雄.我真入迷了.从此,放牛也罢,车水也罢,我总要带一本书,还练出了边走田间小路边读书的本领,读得津津有味,不知人间别有他事.

当我们安静下来回想往事时,往往会发现一些偶然的小事却影响了自己的一生.如果不是找到那本《薛仁贵征东》,我的好学心也许激发不起来.我这一生,也许会走另一条路.人的潜能,好比一座汽油库,星星之火,可以使它雷声隆隆、光照天地;但若少了这粒火星,它便会成为一潭死水,永归沉寂.

抄,总抄得起

好不容易上了中学,做完功课还有点时间,便常光顾图书馆.好书借了实在舍不得还,但买不到也买不起,便下决心动手抄书.抄,总抄得起.我抄过林语堂写的《高级英文法》,抄过英文的《英文典大全》,还抄过《孙子兵法》,这本书实在爱得狠了,竟一口气抄了两份.人们虽知抄书之苦,未知抄书之益,抄完毫末俱见,一览无余,胜读十遍.

始于精于一,返于精于博

关于康有为的教学法,他的弟子梁启超说:“康先生之教,专标专精、涉猎二条,无专精则不能成,无涉猎则不能通也.”可见康有为强烈要求学生把专精和广博(即“涉猎”)相结合.

在先后次序上,我认为要从精于一开始.首先应集中精力学好专业,并在专业的科研中做出成绩,然后逐步扩大领域,力求多方面的精.年轻时,我曾精读杜布(J. L. Doob)的《随机过程论》,哈尔莫斯(P. R. Halmos)的《测度论》等世界数学名著,使我终身受益.简言之,即“始于精于一,返于精于博”.正如中国革命一

样,必须先有一块根据地,站稳后再开创几块,最后连成一片.

丰富我文采,澡雪我精神

辛苦了一周,人相当疲劳了,每到星期六,我便到旧书店走走,这已成为生活中的一部分,多年如此.一次,偶然看到一套《纲鉴易知录》,编者之一便是选编《古文观止》的吴楚材.这部书提纲挈领地讲中国历史,上自盘古氏,直到明末,记事简明,文字古雅,又富于故事性,便把这部书从头到尾读了一遍.从此启发了我读史书的兴趣.

我爱读中国的古典小说,例如《三国演义》和《东周列国志》.我常对人说,这两部书简直是世界上政治阴谋诡计大全.即以近年来极时髦的人质问题(伊朗人质、劫机人质等),这些书中早就有了,秦始皇的父亲便是受害者,堪称"人质之父".

《庄子》超尘绝俗,不屑于名利.其中"秋水""解牛"诸篇,诚绝唱也.《论语》束身严谨,勇于面世,"己所不欲,勿施于人",有长者之风.司马迁的《报任少卿书》,读之我心两伤,既伤少卿,又伤司马;我不知道少卿是否收到这封信,希望有人做点研究.我也爱读鲁迅的杂文,果戈理、梅里美的小说.我非常敬重文天祥、秋瑾的人品,常记他们的诗句:"人生自古谁无死,留取丹心照汗青""休言女子非英物,夜夜龙泉壁上鸣".唐诗、宋词、《西厢记》《牡丹亭》,丰富我文采,澡雪我精神,其中精粹,实是人间神品.

读了邓拓的《燕山夜话》,既叹服其广博,也使我动了写《科学发现纵横谈》的心.不料这本小册子竟给我招来了上千封鼓励信.以后人们便写出了许许多多

的“纵横谈”.

从学生时代起,我就喜读方法论方面的论著.我想,做什么事情都要讲究方法,追求效率、效果和效益,方法好能事半而功倍.我很留心一些著名科学家、文学家写的心得体会和经验.我曾惊讶为什么巴尔扎克在51年短短的一生中能写出上百本书,并从他的传记中去寻找答案.文史哲和科学的海洋无边无际,先哲们的明智之光沐浴着人们的心灵,我衷心感谢他们的恩惠.

读书的另一面

以上我谈了读书的好处,现在要回过头来说说事情的另一面.

读书要选择.世上有各种各样的书:有的不值一看,有的只值看20分钟,有的可看5年,有的可保存一辈子,有的将永远不朽.即使是不朽的超级名著,由于我们的精力与时间有限,也必须加以选择.决不要看坏书,对一般书,要学会速读.

读书要多思考.应该想想,作者说得对吗?完全吗?适合今天的情况吗?从书本中迅速获得效果的好办法是有的放矢地读书,带着问题去读,或偏重某一方面去读.这时我们的思维处于主动寻找的地位,就像猎人追找猎物一样主动,很快就能找到答案,或者发现书中的问题.

有的书浏览即止,有的要读出声来,有的要心头记住,有的要笔头记录.对重要的专业书或名著,要勤做笔记,“不动笔墨不读书”.动脑加动手,手脑并用,既可加深理解,又可避忘备查,特别是自己的灵感,更要及时抓住.清代章学诚在《文史通义》中说:“札记之功必不可少,如不札记,则无穷妙绪如雨珠落大海矣.”

许多大事业、大作品，都是长期积累和短期突击相结合的产物. 涓涓不息，将成江河；无此涓涓，何来江河？

爱好读书是许多伟人的共同特性，不仅学者专家如此，一些大政治家、大军事家也如此. 曹操、康熙、拿破仑、毛泽东都是手不释卷，嗜书如命的人. 他们的巨大成就与毕生刻苦自学密切相关.

王梓坤

作者简介

石焕南，男（1948— ），湖南祁东人.

1. **基本简历**

1962.9～1968.12，北京第五十七中学学习，1968届高中毕业生.

1968.12～1971.3，陕西省延川县文安驿公社下驿大队插队.

1971.3～1973.9，陕西省延川县革委会政工组通讯干事.

1976年毕业于北京师范大学数学系.

1976.8～1978.11，北京矿务局大安山煤矿职工子弟学校任教.

1980年自北京师范大学数学系高校师资班结业后调入北京联合大学师范学院工作直到2008年12月退休（期间于1984.9～1986在北京师苑大学数学系基础数学助教进修班进修硕士研究生课程）.

2. **研教概况**

2000年晋升为教授，2008年晋升为三级教授，所授“概率论与数理统计”课程被评为校级精品课程，多次获学院优秀科研成果一等奖，被评为北京联合大学2005～2007年度优秀教师.

曾担任学院学术委员会委员、《北京联合大学学报(自然科学版)》编委、全国不等式研究会副理事长、《不等式研究通讯》编委，现为全国不等式研究会顾问、全国初等数学研究会第三届理事会常务理事、《美国数学评论》评论员、澳大利亚国际不等式研究小组(RGMIA)成员. 发表论文 140 余篇，其中半数刊于国内核心期刊或境外期刊，20 多篇刊于 SCI 期刊. 2012 年在哈尔滨工业大学出版社出版专著《受控理论与解析不等式》.

在受控理论与解析不等式研究领域居国内领先水平，并引起国际关注，多次被邀参加国际不等式与应用大会，赴国内多所院校讲学. 2008 年 10 月赴澳大利亚国际不等式研究小组总部做短期学术访问. 2012 年参加了在韩国晋州由韩国庆尚大学(Gyeongsang National University)主办的国际“数学不等式和非线性泛函分析及其应用”的会议. 在历届全国不等式学术年会作大会发言，为全国第三届至第八届不等式年会学术委员会委员. 为《Computers and Math. Appl.》《Appl. Math. Letters》《J. Ineq. Appl.》《中国科学：A 辑》《数学学报》《应用数学与力学》等四十多家国内外期刊审稿.

3. **研究兴趣：**

(1)受控理论与不等式；

(2)凸函数与不等式；

(3)平均值与不等式；

(4)概率与不等式.

前 言

拙著《受控理论与解析不等式》自 2012 年 4 月由哈尔滨工业大学出版社出版后，受到国内同行的关注. 5 年间，书中所涉及的几乎所有问题都有了后续的研究成果. 本书《Schur 凸函数与不等式》是《受控理论与解析不等式》的再版，之所以更名为《Schur 凸函数与不等式》，是因为“受控理论”易与浑然不同的“控制理论”混淆，而 Schur 凸函数是受控理论的核心概念，故以它替代“受控理论”. 与《受控理论与解析不等式》相比较，本书的参考文献新增了近 160 余篇，基本上是近 5 年发表的，其中 94 篇是国内作者发表的(包括笔者及合作者的 27 篇). 本书收录了这些新成果，并修补、纠正了《受控理论与解析不等式》一书中的诸多疏漏和错误，同时本书还新增了“Schur 凸函数与几何不等式”等章节.

这些年，国内受控理论的研究方兴未艾，硕果累累，愈加受到国际同行的关注. 令人欣慰的是涌现了一些受控理论研究的新人，例如张静、何灯、许谦、王文、龙波涌、王东生等.

感谢哈尔滨工业大学出版社刘培杰副社长建议我撰写此书，并得到哈尔滨工业大学出版社的出版资助，

感谢刘培杰数学工作室这个优秀团队的精心编辑.

感谢李明老师等国内同行指出了《受控理论与解析不等式》中的多处疏漏.

感谢我的母校北京师范大学的王伯英教授和刘绍学教授对我科研工作的关心和鼓励.感谢胡克教授、王挽澜教授、刘证教授、匡继昌教授、续铁权教授、祁锋教授热心的指导和帮助.

衷心感谢我的家人对我始终不渝的呵护与照料,使我得以有足够的体力、精力和时间从事我钟爱的科研与写作.深深地怀念和感恩不久前去世的父亲石承忠,他含辛茹苦地养育了我及五个弟妹,教我一辈子老老实实做人,踏踏实实做事.

石焕南
2016 年 7 月 20 日

本书一般记号

这里列出本书常用的记号：

$\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$为实数集.

$\mathbf{R}_+=[0,\infty)$为非负实数集.

$\mathbf{R}_{++}=(0,\infty)$为正实数集.

$\mathbf{R}_-=(-\infty,0]$为非正实数集.

$\mathbf{R}_{--}=(-\infty,0)$为负实数集.

$\mathbf{N}=\{1,2,\cdots\}$为正整数集.

$\mathbf{Z}_+=\{0,1,2,\cdots\}$为非负整数集.

I 为实数轴上的开或闭区间.

$\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^n_+,\mathbf{R}^n_{++},\mathbf{R}^n_-,\mathbf{R}^n_{--},\mathbf{Z}^n_+,I^n$ 分别表示具有 n 个相应分量的行向量的全体.

$\mathbf{R}^{m\times n},\mathbf{R}^{m\times n}_+,\mathbf{R}^{m\times n}_{++}$分别表示具有 $m\times n$ 个相应元素的 m 行 n 列矩阵的全体.

$C(I)$表示区间 I 上的连续函数空间.

$f\in C^n(I)$表示函数 f 具有 n 阶连续导数.

$f\in C^\infty(I)$表示函数 f 具有无穷阶连续导数.

对于 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$，有

$$A(\boldsymbol{x})=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$$

$$G(\boldsymbol{x})=\left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

$$H(\boldsymbol{x})=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}x_i^{-1}}$$

分别表示 $\boldsymbol{x}$ 的算术平均、几何平均、调和平均. $A(\boldsymbol{x})$有时也记作 $\overline{\boldsymbol{x}}$.

将 $\boldsymbol{x}$ 的分量排成递减的次序后，记作 $\boldsymbol{x}\downarrow=(x_{[1]},\cdots,x_{[n]})$，即 $x_{[1]}\geqslant\cdots\geqslant x_{[n]}$. 将 $\boldsymbol{x}$ 的分量排成递增的次序后，记作 $\boldsymbol{x}\uparrow=(x_{(1)},\cdots,x_{(n)})$，即 $x_{(1)}\leqslant\cdots\leqslant x_{(n)}$.

对于 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$，$\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n$：

$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ 表示 $x_i=y_i, i=1,\cdots,n$；

$\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{y}$ 表示 $x_i\leqslant y_i, i=1,\cdots,n$；

$\boldsymbol{x}\geqslant\mathbf{0}$ 表示 $x_i\geqslant 0, i=1,\cdots,n$；

$\boldsymbol{x}\prec\boldsymbol{y}$ 表示 $\boldsymbol{x}$ 被 $\boldsymbol{y}$ 控制或 $\boldsymbol{y}$ 控制 $\boldsymbol{x}$；

$\boldsymbol{x}\prec\prec\boldsymbol{y}$ 表示 $\boldsymbol{x}$ 被 $\boldsymbol{y}$ 严格控制，或 $\boldsymbol{y}$ 严格控制 $\boldsymbol{x}$；

$\boldsymbol{x}\prec_w\boldsymbol{y}$ 表示 $\boldsymbol{x}$ 被 $\boldsymbol{y}$ 下(弱)控制；

$\boldsymbol{x}\prec^w\boldsymbol{y}$ 表示 $\boldsymbol{x}$ 被 $\boldsymbol{y}$ 上(弱)控制.

记

$$\nabla\varphi(\boldsymbol{x})=\left(\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{x})}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{x})}{\partial x_n}\right)\in\mathbf{R}^n$$

$$H(\boldsymbol{x})=\left(\frac{\partial^2\varphi(\boldsymbol{x})}{\partial x_i\partial x_j}\right)\in\mathbf{R}^{n\times n}$$

组合数 $\mathrm{C}_n^k=\dfrac{n!}{k!\ (n-k)!}$，规定 $\mathrm{C}_n^0=1$，当 $k>n$ 时，$\mathrm{C}_n^k=0$.

$\forall$ 表示对于一切，对于任意的.

$\exists$ 表示存在.

$\Rightarrow$表示蕴含，推出.

$\Leftrightarrow$表示充要条件，等价，当且仅当.

$\square$表示定理或命题证毕.

设 c,α,β,p 是常数，对于 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$，$\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n$：

$c+\boldsymbol{x}$ 表示 $(c+x_1,\cdots,c+x_n)$，$\alpha\boldsymbol{x}^p$ 表示 $(\alpha x_1^p,\cdots,\alpha x_n^p)$；

$\ln\boldsymbol{x}$ 表示 $(\ln x_1,\cdots,\ln x_n)$，$\mathrm{e}^{\boldsymbol{x}}$ 表示 $(\mathrm{e}^{x_1},\cdots,\mathrm{e}^{x_n})$；

$\alpha\boldsymbol{x}+(1-\alpha)\boldsymbol{y}$ 表示 $(\alpha x_1+(1-\alpha)y_1,\cdots,\alpha x_n+(1-\alpha)y_n)$；

$(\alpha\boldsymbol{x}^{-1}+(1-\alpha)\boldsymbol{y}^{-1})^{-1}$ 表示 $((\alpha x_1^{-1}+(1-\alpha)y_1^{-1})^{-1},\cdots,(\alpha x_n^{-1}+(1-\alpha)y_n^{-1})^{-1})$；

$\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}$ 表示 $(x_1y_1,\cdots,x_1y_1)$，$\boldsymbol{x}^\alpha\boldsymbol{y}^\beta$ 表示 $(x_1^\alpha y_1^\beta,\cdots,x_n^\alpha y_n^\beta)$，等.

目　录