全国十大考研辅导机构“高端辅导”指定用书

考研数学

一本通

（高等数学分册）

主编 王博

√一线名师授课底本 知识网络一目了然

√基础强化分层编写 考试要点全面剖析

√公式结论推演归纳 常考题型归纳总结

√经典例题举一反三 精编练习巩固提高

南京大学出版社

全国十大考研辅导机构“高端辅导”指定用书

考研数学

一本通

（高等数学分册）

主　编　王　博
副主编　毕生明

南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学一本通. 高等数学分册 / 王博主编. 一南京：南京大学出版社，2017.5

ISBN 978-7-305-18551-9

Ⅰ. ①考… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①高等数学一研究生一入学考试一自学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 079135 号

出版发行 南京大学出版社
社　　址 南京市汉口路 22 号　　邮　编 210093
出 版 人 金鑫荣

书　　名 考研数学一本通(高等数学分册)
主　　编 王　博
责任编辑 王士冲　吴　汀　　编辑热线 025-83593947

照　　排 南京南琳图文制作有限公司
印　　刷 南京大众新科技印刷有限公司
开　　本 787×1092　1/16　印张 28　字数 680 千
版　　次 2017 年 5 月第 1 版　2017 年 5 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-305-18551-9
定　　价 56.00 元

网址：http://www.njupco.com
官方微博：http://weibo.com/njupco
官方微信号：njupress
销售咨询热线：(025) 83594756

前　言

为了帮助广大考研学子更好地复习、备考考研数学，作者对历年来的考研数学试题进行了研究，将其归纳、分类、整理。在此基础上，作者结合多年一线的教学辅导经验、按照最新《考试大纲》的要求编写了这套《考研数学一本通》系列图书。

为满足不同层次学生复习的需求，我们打破常规考研辅导书编写体系，定位于精品辅导教材，努力体现创新教学理念，提高考生的应试能力。本书特色如下：

1. 适应不同层次的考生，优化知识体系，体现因材施教、分层学习的特点

本书按考生复习备考的阶段将全书分为《基础篇》与《提高篇》两个部分。

《基础篇》供读者第一轮复习使用，尤其适合基础薄弱的同学打基础时使用。《基础篇》按照《考试大纲》要求并结合当前各高校的本科教学实际情况分若干小章节，每一讲分为知识网络图、考试要点剖析、基础过关题型、基础过关练习四个部分。

《提高篇》供读者第二轮复习使用。每一讲又分为重要概念、公式与结论，常考题型与典型例题，强化提高练习。

2. 注重基础，只有根生才能叶茂，高分才是硬道理

研究生入学考试数学每年仍侧重基本概念、基本理论、基本方法的考查，每年有相当一部分同学由于基础打得不够扎实，因此后续学习乏力，也有部分考生一味追求难题，结果本末倒置，折戟沙场。

知识网络图　可以帮助我们快速预览考试大纲所规定的考点。

考试要点剖析　对每部分考点进行详细阐释，并配有各类简单例题来帮助学生消化理解，为了学生更好地吸收知识和了解基本的解题方法，一般没有太多的综合性，易于学生上手。

重要概念、公式与结论　对考试中经常用到的定理与结论进行归纳、总结，尤其是一些间接得到的二级公式，考生若熟练掌握，考试时可以达到事半功倍的效果。

3. 题型全面，分析总结透彻，易于消化掌握

数学试题是无限的，而题型是有限的，掌握好《考试大纲》范围之内的各类

常考题型的解题思路、方法、技巧，就能以不变应万变，遇到类似题型，就能做到心中不慌。

基础过关题型　对基础阶段我们必须掌握的一些基础题型进行了归纳总结，此类题一般属于考研中难度中等偏下的一些题，但很能说明方法，综合性不强，一般不跨章节，计算量也不大，适合基础阶段理思路、做总结用。

强化提高题型　将考研中常考的题型，分门别类地进行整理，归纳出我们做题的“套路”，辅以大量例题，使用平实的语言呈现给读者，不搞华而不实的偏题、难题、怪题，力争最大程度地接近真题，让读者真正掌握《考试大纲》规定的内容。

4. 科学合理地配置了适量习题，力争成为将知识转化为考试能力的重要桥梁

我们不提倡题海战术，做题的目的是提高成绩，而很多同学盲目做题，浪费了大量的时间和精力，我们希望大家有针对性地适量做题，关键是要总结到位，并做到熟能生巧，举一反三。

基础过关练习　学数学就必须做一定量的习题，基础阶段我们在每章节后都附了一定的练习题，用于读者衡量学习效果使用，看是否掌握了基本知识。

强化提高练习　针对常考题型、进行有针对性的训练，才能真正掌握，在实考中才会胸有成竹。否则只会形成对照答案会做，下次遇到相同题还不会的尴尬局面。

在成书过程中，作者参考了众多前辈的著作和教材，不一一列出，在此谨向有关专家和老师表示衷心感谢。

由于作者水平有限，书中一定还存在许多不足，敬请广大读者、同行、专家批评指正，书中的疑问，及部分习题解答欢迎通过新浪微博@王博考研数学进行交流，作者也会以不定期提供专题直播的形式为学生提供服务。

王　博

2017 年 4 月

目　　录

基础篇

强化篇

基础篇

第一讲　函数　极限　连续

知识网络图

- 函数，极限，无穷小与连续性
  - 函数
    - 函数概念
    - 几种常见的函数(单调函数、奇偶函数、周期函数、有界函数)
    - 复合函数与反函数
    - 常见的函数形式(初等函数、分段函数、隐函数，由参数方程确定的、由变限积分确定的、由级数确定的)
  - 极限
    - 定义与性质，判别极限存在与不存在的方法
    - 求极限的方法
      - 函数极限
        - 直接用运算法则(四则运算，幂指数运算，代入法)
        - 未定式
          - “$\frac{0}{0}$”型或“$\frac{\infty}{\infty}$”型(恒等变形相消后代入，洛必达法则，变量替换与重要极限，泰勒公式，等价无穷小因子替换)
          - 其他未定式(转化为“$\frac{0}{0}$”型或“$\frac{\infty}{\infty}$”型)
        - 分别求左、右极限
      - 数列极限
        - 递归数列$[x_{n+1}=f(x_n)]$
        - n项和的数列(恒等变形，夹逼法，化为定积分，级数求和)
        - n项积的数列(恒等变形，转化为n项和)
        - 一般情形(转化为函数极限，恒等变形，夹逼法)
  - 无穷小
    - 概念与性质(高阶、低价、同阶、阶数)
    - 无穷小阶的比较与确定无穷小的阶的方法(洛必达法则，阶的运算性质，泰勒公式)
  - 连续性
    - 连续与间断的定义
    - 判断连续性与间断点类型的方法(初等函数连续性，连续函数运算性质，按定义)
    - 连续函数的性质(最值、介值)

§1.1 函　数

考试要点剖析

一、理解函数的概念，掌握函数的表示方法，会进行函数记号的运算. 掌握基本初等函数的性质及其图形；了解初等函数的概念.

1. 函数的定义

设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集. 如果对于每个数 $x\in D$，变量 $y\in\mathbf{R}$ 按照一定法则，总有唯一确定的数值 y 和它对应，则称 y 是 x 的函数，记为 $y=f(x)$.

其中 f 称为对应法则，**D 称定义域，R 称值域.**（表示法有公式法、表格法、图形法等）

【概念理解点拨】

1）定义域 D 是给定的，对任给一个 $x\in D$ 值，只有唯一的 y 的值与之对应.

2）函数的两个要素：定义域和对应法则（预先给定的），与用什么字母表示无关.

3）对于两个给定的函数当且仅当两个函数定义域和对应法则都对应相等才能说两个函数相等.

4）求函数 $f(x)$ 的定义域，就是求使 y 的取值和运算有意义的自变量 x 的取值范围.

【例 1.1】 已知 $f(\ln x)=1+x^2$，求 $f(x)$.

【分析】 一般来说，遇到抽象的复合函数往往都是先做变量代换，再利用函数与用什么字母表示无关来做.

【详解】 令 $\ln x=t$，则 $x=e^t$，所以 $f(t)=1+e^{2t}$，即 $f(x)=1+e^{2x}$，$x\in\mathbf{R}$.

2. 函数的分类

（1）**基本初等函数**

1）幂函数：$y=x^\mu$（$\mu\in\mathbf{R}$）；　　2）指数函数 $y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq1$）；

3）对数函数：$y=\log_a^x$（$a>0$ 且 $a\neq1$）；4）三角函数：$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$ 等；

5）反三角函数：$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$ 等.

【评注】 基本初等函数定义域、值域、性质和图形必须牢记.

（2）**反函数**：设函数 $y=f(x)$ 的值域为 D_y，如果对于 D_y 中任一 y 值，从关系式 $y=f(x)$ 中可确定唯一的 x 值，则此时按照函数的定义，也确定了 x 是 y 的函数，称此函数为 $y=f(x)$ 的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$. 习惯上也称 $y=f^{-1}(x)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数.

【概念理解点拨】

1）单调函数存在反函数.

2）反函数 $y=f^{-1}(x)$ 与 $y=f(x)$ 有相同的单调性.

3）同一直角坐标系下，函数 $y=f(x)$ 的图像与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于 $y=x$ 对称.

4）$f[f^{-1}(x)]=x$，$f^{-1}[f(x)]=x$.

（3）**复合函数**：设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f，函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 Z_φ，若集合 D_f 与 Z_φ 的交集非空，称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 为函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，u 为中间变量.

【评注】

1）函数复合的条件：$D_f \cap Z_\varphi \neq \varnothing$；

2）对复合函数，重要的是会把它分解，即知道它是由哪些“简单”函数复合的. 重点掌握函数分解成简单函数的复合，分段函数的复合.

【方法运用点拨】 分解原则：由外向内一层一层地“剥”，每剥一层一般为一个基本初等函数，只有最后一层可能不为基本初等函数.

（4）**初等函数**：基本初等函数经有限次的四则运算、复合运算所得到的可以用一个解析式表示的函数称为**初等函数**.

（5）**分段函数**：在定义域内不能用同一个式子表示的函数.

常见形式有 $f(x)=\begin{cases} f_1(x), & x\geqslant x_0 \\ f_2(x), & x<x_0 \end{cases}$；$f(x)=\begin{cases} f(x), & x\neq x_0 \\ a, & x=x_0 \end{cases}$；$f(x)=\begin{cases} f_1(x), & x>x_0 \\ a, & x=x_0 \\ f_2(x), & x<x_0 \end{cases}$.

【评注】 常见隐含的分段函数

1）**绝对值函数** $|f(x)|=\begin{cases} f(x), & x\in I_1 \\ -f(x), & x\in I_2 \end{cases}$.

2）**符号函数** $\operatorname{sgn} x=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$.

3）**取整函数** $[x]$表示不超过 x 的最大整数.

关于取整函数我们应注意以下几点

- $\lim\limits_{x\to 0^+}[x]=0$，$\lim\limits_{x\to 0^-}[x]=-1$
- $0\leqslant x-[x]<1$，即 $y=x-[x]$为有界函数

【注】 取整函数可以结合定积分考小题，结合二重积分考大题.

4）**最大值函数** $U=\max\{f_1(x),f_2(x)\}=\begin{cases} f_1(x), & f_1(x)\geqslant f_2(x) \\ f_2(x), & f_1(x)<f_2(x) \end{cases}$.

5）**最小值函数** $V=\min\{f_1(x),f_2(x)\}=\begin{cases} f_2(x), & f_1(x)\geqslant f_2(x) \\ f_1(x), & f_1(x)<f_2(x) \end{cases}$.

关于最值函数我们应注意以下几点

$$U+V=f_1(x)+f_2(x),U-V=|f_1(x)-f_2(x)|,UV=f_1(x)f_2(x).$$

【注】 最大值、最小值函数可以结合定积分考小题，结合二重积分考大题. 数学三考生要求的概率论也结合最大值、最小值函数考过小题(2011 年)、大题(2012 年、2016 年等).

（6）**隐函数**：如果在方程 $F(x,y)=0$ 中，当取 x 某区间内的任一值时，相应地总有满足这一方程的唯一 y 值存在，那么就说方程在该区间内确定的一个隐函数 $y=f(x)$.

（7）**参数方程确定的函数**

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} \quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta$$

【评注】 求由方程确定的隐函数和参数方程确定的函数的一、二阶导数是常考问题.

（8）**幂指函数**：$y=u(x)^{v(x)}[u(x)>0]$；

【方法运用点拨】 看到幂指函数,用"e的抬起法",即 $y=u(x)^{v(x)}=e^{v(x)\ln u(x)}$.

(9) **极限、变限积分确定的函数**:如 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1-x^{2n})x}{1+x^{2n}}$, $y=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}f(t)\mathrm{d}t$.

这两个函数我们会在后面相应的章节加以讨论.

3. 函数的几何特性

奇偶性、单调性、周期性、有界性.

(1) **奇偶性**:设函数 $y=f(x)$的定义域为$(-a,a)$,其中 $a>0$,

若对于任一 $x\in(-a,a)$都有 $f(-x)=f(x)$,称 $f(x)$为偶函数;

若对于任一 $x\in(-a,a)$都有 $f(-x)=-f(x)$,称 $f(x)$为奇函数.

【方法运用点拨】

• **几何图形**:偶函数:其图像关于 y 轴对称;奇函数:其图像关于**坐标原点**对称.

• **基本性质**:(1) 奇偶函数的运算性质

奇函数±奇函数=奇函数,偶函数±偶函数=偶函数,

奇函数·偶函数=奇函数,偶函数·偶函数=偶函数,奇函数·奇函数=偶函数.

(2) 任一函数均可写成是一奇函数与一偶函数之和,即

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

【评注】 读者记住如下几种考研常见的奇偶函数.

① $f(x)+f(-x)$为偶函数,$f(x)-f(-x)$为奇函数;

② e^x+e^{-x},$e^{\sin x}+e^{-\sin x}$,a^x+a^{-x}为偶函数;

③ e^x-e^{-x},$e^{\sin x}-e^{-\sin x}$,a^x-a^{-x}为奇函数.

读者发现上面的规律了吗?

(3) 注意奇偶性在定积分及二重积分中的应用.(后续各章会详细阐释)

• **判定方法**:(1) 定义:通过计算 $f(-x)=\cdots=f(x)$或$[-f(x)]$,则 $f(x)$为偶(或奇)函数.

(2) 设 $f(x)$可导,则:

1) $f(x)$是奇函数 $\Rightarrow$ $f'(x)$是偶函数(奇函数的导函数是偶函数);

2) $f(x)$是偶函数 $\Rightarrow$ $f'(x)$是奇函数(偶函数的导函数是奇函数);

(3) 连续的奇函数其原函数都是偶函数;

连续的偶函数其原函数只有一个是奇函数.

【例 1.2】 判断函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$的奇偶性.

【详解】 $f(x)+f(-x)=\ln(\sqrt{1+x^2}+x)+\ln(\sqrt{1+x^2}-x)$

$$=\ln\left[(\sqrt{1+x^2}+x)\cdot(\sqrt{1+x^2}-x)\right]=\ln(1+x^2-x^2)=0$$

即 $f(x)=-f(-x)$,所以 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$为奇函数.

【评注】 关于 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$,有如下几条性质:

① $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$为奇函数;

【例 1.3】 求 $\int_{-2019}^{2019}\ln(x+\sqrt{1+x^2})\cdot(e^x+e^{-x})\mathrm{d}x$.

【详解】 $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$是关于 x 的奇函数，e^x+e^{-x}是关于 x 的偶函数，由对称区间定积分的性质可知 $\int_{-2019}^{2019}\ln(x+\sqrt{1+x^2})\cdot(e^x+e^{-x})dx=0$.

② $f'(x)=[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]'=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$；

本条性质主要用于不定积分和定积分的凑微分法. 如

$$\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C.$$

③ 当 $x\to0$ 时，$\ln(x+\sqrt{1+x^2})\sim x$.

本条性质主要用于求极限，用法见本书极限的等价无穷小部分.

以上三条性质希望读者记住，并且熟练应用，可以大幅度的提高解题速度！

(2) **单调性**：设函数 $y=f(x)$在区间 I 上有定义，若对于 I 上任意两点 x_1 与 x_2，且 $x_1<x_2$ 时，均有 $f(x_1)<f(x_2)$[或 $f(x_1)>f(x_2)$]，称函数 $y=f(x)$在区间 I 上单调增加(或单调减少). 如果其中的"$<$"(或"$>$")改为"$\leqslant$"(或"$\geqslant$")，称函数 $f(x)$在 I 上单调不减(或单调不增).

【方法运用点拨】

• **判定方法**：

1) 定义法：令 $x_1>x_2$，计算 $f(x_1)-f(x_2)$，若其大于零，则单调增加，反之则单调减少. 其本质实际上是函数增量与自变量增量方向一致.

2) 导数法：设 $f(x)$在区间 I 上可导，则

① $f'(x)\geqslant0 \Leftrightarrow f(x)$单调不减；

② $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$单调增.

【评注】

1) 若将②的不等式 $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$改为 $f'(x)\geqslant0$，且使 $f'(x)=0$ 的点(驻点)只有有限个，则结论仍成立. 即导数大于零的函数一定单调递增，但单调递增的可导函数的导数不一定严格大于零，其导数也可能等于零，如 $y=x^3$ 在 $x\in(-\infty,+\infty)$单调递增，但有 $y'|_{x=0}=0$.

2) 判断抽象的函数的单调性，在考试时尽量采用举反例排除法.

• **单调性在考研中的重要应用**

1) 不等式证明；

2) 方程根的讨论.

(3) **周期性**：对函数 $y=f(x)$，若存在常数 $T>0$，有 $f(x+T)=f(x)$，称函数 $y=f(x)$为周期函数，T 称为 $f(x)$的周期.

【方法运用点拨】

• **判定方法**：

1) 定义法：计算 $f(x+T)=\cdots=f(x)$，则 $f(x)$是以 T 为周期的函数；

2) 可导的周期函数其导函数为周期函数，且周期不变；

3) 周期函数的原函数不一定是周期函数.

• **常见周期函数及其周期**

$y=\sin x$，$y=\cos x$. 其周期 $T=2\pi$；

$y=\tan x, y=\cot x, y=|\sin x|, y=|\cos x|$. 其周期 $T=\pi$.

(4) **有界性**:设函数 $y=f(x)$在数集 X 上有定义,若存在正数 M,使得对于每一个 $x\in X$,都有$|f(x)|\leqslant M$成立,称 $f(x)$在 X 上有界,否则,即这样的 M 不存在,称 $f(x)$在 X 上无界. 即对任何 $M>0$,总存在 $x_0\in X$,使$|f(x_0)|>M$. 若将绝对值符号去掉,当有 $f(x)\leqslant M$,称为 $f(x)$有上界,有 $f(x)\geqslant -M$,称为 $f(x)$有下界.

【概念理解点拨】 判定方法:

1) 定义:设法找 M;

2) $f(x)$在$[a,b]$上连续 $\Rightarrow$ $f(x)$在$[a,b]$上有界;

3) $f(x)$在(a,b)上连续,且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$和 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$存在 $\Rightarrow$ $f(x)$在(a,b)上有界.

【评注】

1) 有界性与区间有关.

2) 函数 $f(x)$在 I 上有界的充要条件是 $f(x)$在 I 上既有上界又有下界.

3) 区分无界函数和无穷大:无穷大一定无界,但无界未必无穷大.

4) 若函数 $y=f(x)$在区间 I 上有界,则其导函数和原函数在区间 I 上未必有界

5) 常见的有界函数.

$$|\sin x|\leqslant 1, |\cos x|\leqslant 1, x\in(-\infty,+\infty);$$

$$|\arctan x|<\frac{\pi}{2}, 0<\operatorname{arccot} x<\pi, x\in(-\infty,+\infty);$$

$$|\arcsin x|<\frac{\pi}{2}, 0<\arccos x<\pi, x\in[-1,1].$$

基础过关题型

【题型一】 函数的概念及建立函数关系

【例 1】 已知 $f(x+1)$的定义域为$[0,a](a>0)$,则 $f(x)$的定义域为( ).

(A) $[-1,a-1]$ (B) $[1,a+1]$ (C) $[a,a+1]$ (D) $[a-1,a]$

【解析】 令 $t=x+1$,得 $x=t-1$ 则 $0\leqslant t-1\leqslant a$,所以 $1\leqslant t\leqslant a+1$,故选(B).

【例 2】 设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & 当\ x\leqslant 0\\ x+2, & 当\ x>0\end{cases}$, $f(x)=\begin{cases}x^2, & 当\ x<0\\ -x, & 当\ x\geqslant 0\end{cases}$,则 $g[f(x)]=$________

【解析】 $g[f(x)]=\begin{cases}2-f(x), & f(x)\leqslant 0\\ f(x)+2, & f(x)>0\end{cases}=\begin{cases}2-(-x), & x\geqslant 0\\ 2+x^2, & x<0\end{cases}$.

【题型二】 函数的基本特性考查

【例 3】 设函数 $f(x)=x\cdot\tan x\cdot e^{\sin x}$,则 $f(x)$是( ).

(A) 偶函数 (B) 无界函数 (C) 周期函数 (D) 单调函数

【解析】 由于$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} x\cdot e^{\sin x}=\frac{\pi}{2}\cdot e$,而$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x=+\infty$,所以,$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} x\cdot\tan x\cdot e^{\sin x}=+\infty$,故 $f(x)$无界.

或考察 $f(x)$在 $x_n=2n\pi+\frac{\pi}{4}(n=1,2,\cdots)$的函数值,有$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty} x_n e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=+\infty$,可

见 $f(x)$ 是无界函数. 应选(B).

【例 4】 设 $f(x)$. 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导,且对任意 x_1,x_2,当 $x_1>x_2$ 时,都有 $f(x_1)>f(x_2)$,则(　　).

(A) 对任意 x,有 $f'(x)>0$　　(B) 对任意 x,有 $f'(-x)\leqslant 0$

(C) 函数 $f(-x)$ 单调增加　　(D) 函数 $-f(-x)$ 单调增加

【解析】 由于 $x_1>x_2$,则 $-x_1<-x_2$,由题设 $f(-x_1)<f(-x_2)$,进而 $-f(-x_1)>f-(-x_2)$,即函数 $-f(-x)$ 单调增加,故应选(D).

此题若令 $f(x)=x^3$,可知(A)(B)(C)均不正确.

§1.2 极限及其重要性质

考试要点剖析

【注】 对于是否需要掌握利用"$\varepsilon-\delta,\varepsilon-N,\varepsilon-X$"三种语言来证明极限等式,这是很多读者困惑之处. 从历年真题来看,利用"$\varepsilon-\delta,\varepsilon-N,\varepsilon-X$"三种语言来证明极限等式的题目从未考过,所以这并不是复习的重点. 但是理解极限定义的本质确是要求的,历年真题也有命制过此类题目,掌握的内容主要如下.

一、理解数列极限的定义,掌握数列极限的性质:

1. 数列的极限

• **定义:** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$, $\exists$ 一个正整数 N,当 $n>N$ 时,恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$.

(直观地说,当 n 无限增大时,对应的 x_n 无限接近于某个确定的常数 a.)

【概念理解点拨】

(1) 数列极限存在与否与数列的前有限项无关;

(2) 任一极限由两部分构成:① 变化过程,② 变化趋势;

(3) ε 越小,N 越大;

• **性质:**

(1) 数列极限的唯一性:数列不能收敛于两个不同极限.

(2) 收敛数列的有界性:收敛数列必有界.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$,那么 $\{x_n\}$ 一定有界. 即 $\exists M>0$,使得 $|x_n|<M$.

(3) 收敛数列与其子序列间的关系:

如果数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a,那么它的任一个子列也收敛,且其极限也是 a.

【概念理解点拨】

1) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=a$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$,其中 a 为任意常数.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$.

3) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty} u_{2n+1}=a \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty} u_{3n+1}=\lim\limits_{n\to\infty} u_{3n+2}=a$.

(4) (局部保序性)　设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=B$. 若 $A>B$,则存在自然数 N,使得当 $n>N$ 时,有 $x_n>y_n$;若存在自然数 N,使得当 $n>N$ 时有 $x_n\geqslant y_n$,则 $A\geqslant B$.

(5)(局部保号性) 设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A>0$(或$<0$),则存在自然数$N$,使得当$n>N$时,有$x_n>0$(或$<0$);若存在自然数$N$,使得当$n>N$时有$x_n\geqslant 0$(或$\leqslant 0$),则$A\geqslant 0$(或$\leqslant 0$).

二、理解函数极限的概念和性质,理解函数左、右极限的概念,以及函数极限存在与左、右极限之间的关系:

1. 函数极限的定义

自变量趋于无穷大情形

定义 1:$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A \Leftrightarrow$ 任给$\varepsilon>0$,存在正数X,当$x>X$时,就有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

[直观地说$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$:当$x$无限增大时,函数$f(x)$无限趋近常数$A$]

类似地,有

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A \Leftrightarrow$ 任给$\varepsilon>0$,存在正数X,当$x<-X$时,就有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow$ 任给$\varepsilon>0$,存在正数X,当$|x|>X$时,就有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

自变量趋于某定值情形

定义 2:$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow$ 任给$\varepsilon>0$,存在正数δ,当$0<|x-x_0|<\delta$时,就有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

[直观地说$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$:当$x$无限趋近$x_0$时,函数$f(x)$无限趋近常数$A$.]

类似地,有

左极限:$f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A \Leftrightarrow$ 任给$\varepsilon>0$,存在正数δ,当$-\delta<x-x_0<0$时,就有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

右极限:$f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A \Leftrightarrow$ 任给$\varepsilon>0$,存在正数δ,当$0<x-x_0<\delta$时,就有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

【注】 读者往往不理解极限的定义,也就不能熟练应用极限定义来解题.这类题抓住极限的本质即可,把握两点:

① ε是任意小(要有多小有多小)的正数;

② $|f(x)-A|$要小于一个任意小的正数.

满足以上两条,就是极限的定义.请读者看下例.

【例 1.4】 以下三个说法:

(1)"$\forall$正整数N,$\exists$正整数K,当$0<|x-a|\leqslant\dfrac{1}{K}$时,恒有$|f(x)-A|<\dfrac{1}{2N}$"是"$\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$"的充要条件.

(2)"$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,当$0<|x-a|<\delta$时,恒有$|f(x)-A|<e^{\frac{\varepsilon}{2019}}$"是"$\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$"的充要条件.

(3)"$\forall\varepsilon\in(0,1)$,$\exists$正整数$N$,当$n\geqslant N$时,恒有$|x_n-A|<2\varepsilon$"是"数列$\{x_n\}$收敛于$a$"的充要条件.

正确的个数为(　　).

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

【解析】 本题考查对极限定义本质的理解.把握一点即可解题.

$|f(x)-A|$必须小于任意小的正数.(1)中 N 是很大的正数,故$\dfrac{1}{2N}$满足“任意小”,正确;(2)中的 $e^{\frac{\varepsilon}{2019}}>1$,显然不满足“任意小”,不正确;(3)中 ε“任意小”,故 2ε 也满足“任意小”.正确,故应选择(C).

【概念理解点拨】

1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 存在与否和 $f(x)$在点 x_0 处是否有定义无关;但 $f(x)$在 x_0 的某去心邻域内须处处有定义.

2) 极限存在的**充要条件**:$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x_0+0)=f(x_0-0)=A$;

类似地有:$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$.

3) **常见极限不存在的情况.**

① $\lim\limits_{x\to x_0^+} \arctan\dfrac{1}{x-x_0}=\dfrac{\pi}{2}$,$\lim\limits_{x\to x_0^-} \arctan\dfrac{1}{x-x_0}=-\dfrac{\pi}{2}$,故$\lim\limits_{x\to x_0} \arctan\dfrac{1}{x-x_0}$不存在.

② $\lim\limits_{x\to x_0^+} \operatorname{arccot}\dfrac{1}{x-x_0}=0$,$\lim\limits_{x\to x_0^-} \operatorname{arccot}\dfrac{1}{x-x_0}=\pi$,故$\lim\limits_{x\to x_0} \operatorname{arccot}\dfrac{1}{x-x_0}$不存在.

③ $\lim\limits_{x\to x_0^+} e^{\frac{1}{x-x_0}}=+\infty$,$\lim\limits_{x\to x_0^-} e^{\frac{1}{x-x_0}}=0$,故$\lim\limits_{x\to x_0} e^{\frac{1}{x-x_0}}$不存在.

④ $\lim\limits_{x\to N^+}[x]=N$,$\lim\limits_{x\to N^-}[x]=N-1$,故$\lim\limits_{x\to N}[x]$不存在.

⑤ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}=1$,$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}=-1$,故$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$不存在.

【评注】 遇到此五种情况应分左右极限讨论.

4) 考研常考的极限

① $\lim\limits_{x\to0^+} x\cdot\ln x=0$,$\lim\limits_{x\to0^+} x^x=1$;

② $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1(a>1)$;

③ $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=\begin{cases}0, & |q|<1\\ 1, & q=1\\ \text{不存在}, & q=-1\\ \infty, & |q|>1\end{cases}$.

【例 1.5】 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$,求$\lim\limits_{x\to-1} f(x)$.

【解析】 只需要对 x^2 的大小进行讨论就行了.此外 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$是极限函数,这类函数分为两步,第一步求出极限,第二步“让干嘛就干嘛”,求极限,求导,积分.

1) ① 当$|x^2|<1$,即$-1<x<1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n}=0$,故 $f(x)=1+x$;

② 当$|x^2|>1$,即 $x>1$ 或 $x<-1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n}=\infty$,故 $f(x)=0$;

③ 当$|x^2|=1$,即 $x=\pm1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty} x^{2n}=1$,

当 $x=1$ 时,$f(x)=1$;当 $x=-1$ 时,$f(x)=0$;

所以 $f(x)=\begin{cases}1+x, & -1<x<1\\ 0, & x>1 \text{ 或 } x\leqslant-1.\\ 1, & x=1\end{cases}$