学数学丛书

学数学

第3卷

李 潜 主编

中国科学技术大学出版社

学数学

学数学

单墫

第3卷

中国科学技术大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

学数学.第3卷/李潜主编.—合肥:中国科学技术大学出版社,2015.11
(学数学丛书)
ISBN 978-7-312-03876-1

Ⅰ.学… Ⅱ.李… Ⅲ.中学数学课—教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第277155号

出版 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路96号,邮编230026
http://press.ustc.edu.cn
http://shop109383220.taobao.com
印刷 安徽国文彩印有限公司
发行 中国科学技术大学出版社
经销 全国新华书店
开本 787 mm×1092 mm 1/16
印张 15.25
字数 343千
版次 2015年11月第1版
印次 2015年11月第1次印刷
印数 1—4500册
定价 33.00元

序

自今年开始,《学数学》以《学数学丛书》的形式,改由中国科学技术大学出版社出版发行.改变出版发行形式后,依然是每个季度出版一册,却可以借助出版社的发行平台和途径,拓宽市场,提升发行量,使得更多的读者获益,也可降低图书成本,实是多赢之举.这一步走得好,它将会使《学数学》办得更好、走得更远、前景更明亮!

《学数学》曾是一份深受读者喜爱的刊物,它来自于数学人,为数学人服务,受数学人支持.《学数学》没有专职编辑人员,几位在职中学教师和一位在读博士研究生,自己组稿,自己编辑,自己联系印刷,还要自办发行,十分辛苦,却又无钱可赚.然而它却办得有声有色,颇具品位.这是一种什么样的精神,一种什么样的境界!这里面除了对数学的热爱,对事业的追求和对工作的高度责任感之外,还能有什么别的解释?

《学数学丛书》以普及中等数学知识为己任,服务于广大的中学数学教师,以及关心和热爱中等数学的其他人群.它面向中学数学教学,却不局限于中学数学教学,它不讨论教材教法,却鼓励对延伸出的中等数学问题作深入的讨论.它的版面生动活泼,报道国内外中学数学界的各种活动,及时发表有关资料.它的内容生动有趣,使人感觉时读时新.李克强总理号召全民阅读,他说:“书籍和阅读是文明传承的重要载体.”《学数学丛书》为全民阅读提供了一份优秀的读物.

数学之于国民经济的重要性不言而喻.对于我们这样一个经济总量已达全球第二的大国而言,提升经济的知识含量,改变经济增长方式,实现经济发展转轨,已经是摆在眼前的任务.拿出更多更好的原创性产品,是中国经济发展的必由之路.任何一项原创性产品的研发和生产都离不开数学!更何况需要持续不断地推出新产品,持续不断地更新换代,没有一代接一

代科学人持续不断的努力,何以为继?为了国家,为了民族,我们需要锻造出一批批科学人才,一批批能够坐得住冷板凳、心无旁骛、一心只爱钻研的人,其中包括那些一心痴迷数学的人才.

《学数学丛书》愿为这一目标尽心尽力.

苏　淳

目　　录

第一篇　名家讲堂

一同做2015年江苏省数学高考试题

谈谈几何概型

一同做 2015 年江苏省数学高考试题

2015 年江苏省数学高考试题，总的来说难易适当，覆盖面广，又有一定的区分度. 我觉得它优于全国统一考试的试卷，只是最后一题（第 20 题）的最后一问实在太难，在考场上很难完成，不如索性放弃，腾出时间复核其他试题.

考试时，切忌紧张，应当"好整以暇"，想好了再下笔. 这需要在平时逐步养成. 我们现在从这份试题中选一些来做，请准备参加 2016 年高考的同学一同做. 大家的心态比较平和，可以边做边讨论.

填空题往往只见答案，不见过程，其实过程也很重要. 看到解题过程，加以改进，才能做得又快又好. 请看以下各题.

第 10 题 在平面直角坐标系 xOy 中，以点$(1,0)$为圆心且与直线 $mx-y-2m-1=0$ $(m\in\mathbf{R})$ 相切的所有圆中，半径最大的圆的标准方程为________.

解析 半径 r 即圆心$(1,0)$到 $mx-y-2m-1=0$ 的距离$\dfrac{|m-2m-1|}{\sqrt{m^2+1}}$，则

$$r^2=\frac{(m+1)^2}{m^2+1}=1+\frac{2m}{m^2+1}\leqslant 1+1=2\quad(\text{当 } m=1 \text{ 时等号成立}).$$

所以半径最大的圆的标准方程为$(x-1)^2+y^2=2$.

求 r^2 的最大值，只需用最基本的不等式 $2m\leqslant m^2+1$，但应注意等号可以成立.

第 11 题 设数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，且 $a_{n+1}-a_n=n+1$ $(n\in\mathbf{N}^*)$，则数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$的前 10 项和为________.

解析 满足 $a_{n+1}-a_n$ 等于常数的数列是等差数列，通项 a_n 是n 的一次式. 如果 $a_{n+1}-a_n$ 等于n 的一次式，数列的通项 a_n 是n 的二次式. 不难看出 $a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$满足 $a_{n+1}-a_n=n+1$，所以

$$\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{10}\frac{2}{n(n+1)}=2\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=2\left(1-\frac{1}{11}\right)=\frac{20}{11}.$$

第 12 题 在平面直角坐标系 xOy 中，P 为双曲线$x^2-y^2=1$ 右支上的一个动点. 若点 P 到直线$x-y+1=0$ 的距离大于 c 恒成立，则实数 c 的最大值为________.

解析 渐近线 $x-y=0$ 到直线 $x-y+1=0$ 的距离为$\dfrac{1}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. 而双曲线与渐近线可任意接近，所以 c 的最大值为$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

第 13 题 已知函数

$$f(x)=|\ln x|,\quad g(x)=\begin{cases}0, & 0<x\leqslant 1,\\ |x^2-4|-2, & x>1.\end{cases}$$

则方程 $|f(x)+g(x)|=1$ 实根的个数为________.

解析 当 $0<x\leqslant 1$ 时，$|f(x)+g(x)|=|\ln x|=-\ln x$，$-\ln x=1$ 有一个实根 $x=\dfrac{1}{e}$.

当 $1<x\leqslant 2$ 时，$|f(x)+g(x)|=|\ln x+4-x^2-2|=|\ln x+2-x^2|$. 因为 $(\ln x+2-x^2)'=\dfrac{1}{x}-2x<0$，所以 $\ln x+2-x^2$ 在 $[1,2]$ 上单调递减，值由 1 减至 $\ln 2-2$. 但 1 在 $(1,2]$ 上不能取到；$\ln 2-2<-1$，所以 $\ln x+2-x^2$ 有一次为 -1，$|f(x)+g(x)|$ 有一次为 1.

当 $x>2$ 时，$|f(x)+g(x)|=|\ln x+x^2-6|$. 显然 $\ln x+x^2-6$ 严格递增，由小于 -1 增至无穷. 于是 $\ln x+x^2-6$ 等于 -1 与 1 各有一次，$|f(x)+g(x)|$ 有两次为 1.

综上所述，$|f(x)+g(x)|=1$ 的实根个数为 4.

虽是填空题，却必用到导数，并不容易.

第 14 题 设向量 $\boldsymbol{a}_k=\left(\cos\dfrac{k\pi}{6},\sin\dfrac{k\pi}{6}+\cos\dfrac{k\pi}{6}\right)$ $(k=0,1,\cdots,12)$，则 $\sum\limits_{k=0}^{11}(\boldsymbol{a}_k\cdot\boldsymbol{a}_{k+1})$ 的值为________.

解析

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_k\cdot\boldsymbol{a}_{k+1}&=\cos\frac{k\pi}{6}\cos\frac{(k+1)\pi}{6}+\left(\sin\frac{k\pi}{6}+\cos\frac{k\pi}{6}\right)\left(\sin\frac{(k+1)\pi}{6}+\cos\frac{(k+1)\pi}{6}\right)\\&=2\cos\frac{k\pi}{6}\cos\frac{(k+1)\pi}{6}+\sin\frac{k\pi}{6}\sin\frac{(k+1)\pi}{6}+\sin\left(\frac{k\pi}{6}+\frac{(k+1)\pi}{6}\right)\\&=\cos\frac{(2k+1)\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{(2k+1)\pi}{6}\right)+\sin\frac{(2k+1)\pi}{6}\\&=\frac{3\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}\cos\frac{(2k+1)\pi}{6}+\sin\frac{(2k+1)\pi}{6}.\end{aligned}$$

因为

$$\sum_{k=0}^{11}e^{\frac{(2k+1)\pi}{6}i}=e^{\frac{\pi}{6}i}\cdot\frac{1-e^{\frac{\pi}{3}i\times 12}}{1-e^{\frac{\pi}{3}i}}=0,$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{11}\boldsymbol{a}_k\cdot\boldsymbol{a}_{k+1}&=\sum_{k=0}^{11}\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{2}\cos\frac{(2k+1)\pi}{6}+\sin\frac{(2k+1)\pi}{6}\right)\\&=12\times\frac{3}{4}\sqrt{3}+0+0=9\sqrt{3}.\end{aligned}$$

注 当 $\sum\limits_{k=0}^{11}z_k=0$ 时，实部之和 $\sum\limits_{k=0}^{11}x_k=0$，虚部之和 $\sum\limits_{k=0}^{11}y_k=0$.

下面讨论解答题. 只讨论与参考答案的解法有所不同的题.

第 17 题 某山区外围有两条相互垂直的直线型公路，为进一步改善山区的交通现状，计划修建一条连接两条公路和山区边界的直线型公路，记两条相互垂直的公路为 l_1、l_2，山区边界曲线为 C，计划修建的公路为 l. 如图 1 所示，M、N 为 C 的两个端点，测得点 M 到 l_1 和 l_2 的距离分别为 5 km 和 40 km，点 N 到 l_1 和 l_2 的距离分别为 20 km 和 2.5 km. 以 l_1、l_2 所在的直线分别为 x、y 轴，建立平面直角坐标系 xOy，假设曲线 C 符合函数 $y=\dfrac{a}{x^2+b}$（其中 a、b 为常数）模型.

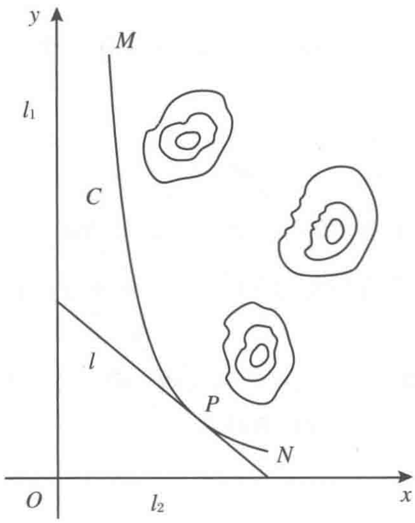

图 1

（1）求 a、b 的值；

（2）设公路 l 与曲线 C 相切于点 P，P 的横坐标为 t.

（i）请写出公路 l 长度的函数解析式 $f(t)$，并写出其定义域；

（ii）当 t 为何值时，公路 l 的长度最短？求出最短长度.

解析 题目冗长——这类“联系实际”的应用题的普遍缺点.

（1）不难，易知 $a=1\,000$，$b=0$，$y=\dfrac{1\,000}{x^2}$（$5\leqslant x\leqslant 20$）.

（2）也不难，依题意有

$$f(t)=\frac{3}{2}\sqrt{t^2+\frac{4\times10^6}{t^4}}\quad(t\in[5,20]).$$

但求 $f(t)$ 的最小值，不必用微积分，由平均不等式，有

$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{2}t^2+\frac{4\times10^6}{t^4}}\\&\geqslant\frac{3}{2}\sqrt{3\sqrt[3]{\frac{1}{2}t^2\times\frac{1}{2}t^2\times\frac{4\times10^6}{t^4}}}\\&=15\sqrt{3}.\end{aligned}$$

等号当且仅当 $\dfrac{1}{2}t^2=\dfrac{4\times10^6}{t^4}$，即 $t=10\sqrt{2}$ 时成立.

第 18 题 如图 2 所示，在平面直角坐标系 xOy 中，已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，且右焦点 F 到左准线 l 的距离为 3.

（1）求椭圆的标准方程；

（2）过 F 的直线与椭圆交于 A、B 两点，线段 AB 的垂直平分线分别交直线 l 和 AB 于

点P和C. 若 $PC=2AB$，求直线 AB 的方程.

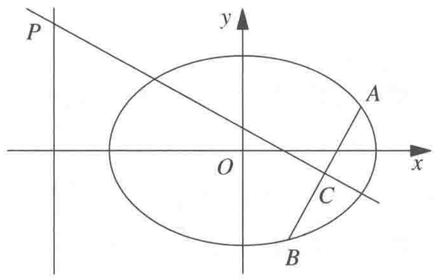

图 2

解析　(1) 不难. 易得 $a=\sqrt{2}$，$c=1$，$b=1$. 椭圆的标准方程为

$$\frac{x^2}{2}+y^2=1.$$

(2) 也不难，但计算较多，希望尽可能减少计算量.

设直线 AB 的方程为 $y=k(x-1)$. 点 $A(x_A, y_A)$ 和点 $B(x_B, y_B)$ 满足方程组

$$\begin{cases} y=k(x-1), \\ x^2+2y^2=2. \end{cases} \qquad ①$$

因为 $PC\perp AB$，所以直线 PC 的方程为 $k(y-y_C)+x-x_C=0$. 又

$$AB^2=(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2=(k^2+1)(x_A-x_B)^2,$$

$$PC^2=(x_P-x_C)^2+(y_P-y_C)^2=\frac{k^2+1}{k^2}(x_P-x_C)^2,$$

条件 $PC=2AB$ 即

$$(x_P-x_C)^2=4k^2(x_A-x_B)^2. \qquad ②$$

因为 $x_P=-\frac{a^2}{c}=-2$，$x_C=\frac{x_A+x_B}{2}$，所以式②即

$$\left(\frac{(x_A+2)+(x_B+2)}{2}\right)^2=4k^2(x_A-x_B)^2. \qquad ③$$

由方程组①消去 y，得

$$(2k^2+1)x^2-4k^2x+2k^2-2=0. \qquad ④$$

因为 x_A、x_B 是方程④的根，所以

$$(x_A-x_B)^2=\frac{(4k^2)^2-4(2k^2+1)(2k^2-2)}{(2k^2+1)^2}. \qquad ⑤$$

而 x_A+2、x_B+2 是方程

$$(2k^2+1)(x-2)^2-4k^2(x-2)+2k^2-2=0$$

的根，即

$$(2k^2+1)x^2-4(3k^2+1)x+*=0$$

的根（其中的常数项不必算出，用 * 表示），所以由韦达定理，有

$$\frac{(x_A+2)+(x_B+2)}{2}=\frac{2(3k^2+1)}{2k^2+1}. \qquad ⑥$$

联立式③、式⑤、式⑥，得

$$(3k^2+1)^2=\left(16k^4-4(2k^2+1)(2k^2-2)\right)k^2,$$

即

$$k^4-2k^2+1=0,$$

解得 $k^2=1$，$k=\pm1$. 直线 AB 的方程为 $y=x-1$ 或 $y=-x+1$.

设椭圆与 y 轴的交点为 E_1、E_2(坐标为 $(0,\pm1)$)，则直线 AB 就是直线 E_1F 或 E_2F.

第 19 题 已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+b$ (a、$b\in\mathbf{R}$) .

(1) 试讨论 $f(x)$ 的单调性；

(2) 若 $b=c-a$ (实数 c 是与 a 无关的常数)，当函数 $f(x)$ 有三个不同零点时，a 的取值范围恰好是

$$(-\infty,-3)\cup\left(1,\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2},+\infty\right). \qquad ①$$

求 c 的值.

解析 本题的第 (1) 问很容易. 利用导数 $f'(x)=3x^2+2ax$ 易知 $f(x)$ 可能有两个极值点 $x=0$ 及 $x=-\frac{2a}{3}$.

当 $a=0$ 时，$f(x)$ 单调递增.

当 $a<0$ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,0)\cup\left(-\frac{2a}{3},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(0,-\frac{2a}{3}\right)$ 上单调递减 (图 3). $x=0$ 为极大值点，极大值 $f(0)=b$；$x=-\frac{2a}{3}$ 是极小值点，极小值 $f\left(-\frac{2a}{3}\right)=\frac{4}{27}a^3+b$.

当 $a>0$ 时，$f(x)$ 在 $\left(-\infty,-\frac{2a}{3}\right)\cup(0,+\infty)$ 上单调递增，在 $\left(-\frac{2a}{3},0\right)$ 上单调递减 (图 4). $x=-\frac{2a}{3}$ 为极大值点，极大值 $f\left(-\frac{2a}{3}\right)=\frac{4}{27}a^3+b$；$x=0$ 为极小值点，极小值 $f(0)=b$.

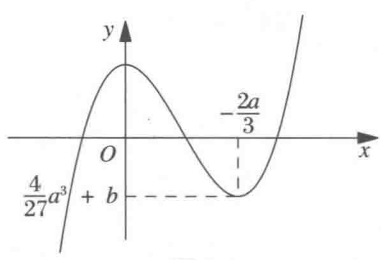

图 3

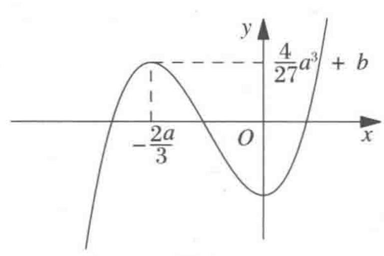

图 4

第(2)问应当利用第(1)问，其实并不困难，只需要细心分析.

当 $a\in\left(1,\frac{3}{2}\right)$时，$f(x)$有三个不同零点，所以必有

$$\frac{4}{27}a^3+b=\frac{4}{27}a^3+c-a>0, \quad ②$$

$$b=c-a<0. \quad ③$$

由式③得 $c<a$，而 a 可任意接近 1，所以 $c\leqslant 1$. 又由式②得

$$c>a-\frac{4}{27}a^3>1-\frac{4}{27}\left(\frac{3}{2}\right)^3>0.$$

如果 $c<1$，那么取 $a>c$ 但与 c 很接近，这时 $a<1$，而式②、式③均成立，从而 $f(x)$有三个不同零点，与 $a\in\left(1,\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$不合. 所以必有

$$c=1. \quad ④$$

反过来，当 $c=1$ 时，如果 $a>0$，那么由式③，$a>1$. 对于 $a\in\left(1,\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$，显然式②成立，并且

$$\frac{4}{27}a^3+b=\frac{4}{27}a^3-a+1=\frac{4}{27}\left(a-\frac{3}{2}\right)^2(a+3)>0, \quad ⑤$$

所以 $f(x)$有三个不同的零点.

如果 $a<0$，那么由式⑤，得

$$\frac{4}{27}a^3+b<0 \quad ⑥$$

的解是 $a<-3$. 对于 $a\in(-\infty,-3)$，式⑥与

$$b=c-a>0$$

成立，所以 $f(x)$有三个不同的零点.

本题 $f(x)$有三个不同的零点时，a 的取值范围是区间①. 这是一个极重要的充分必要条件. 不仅 a 在区间①中时，$f(x)$有三个不同的零点；而且 a 不在区间①中时，$f(x)$没有三个不同的零点. 正是利用这后一点，我们得出式④，也就是本题的答案. 式④以后的部分只是验证而已.

第 20 题 设 a_1、a_2、a_3、a_4 是各项为正数且公差为 d ($d\neq 0$) 的等差数列.

(1) 证明：2^{a_1}、2^{a_2}、2^{a_3}、2^{a_4}依次构成等比数列；

(2) 是否存在 a_1、d，使得 a_1、a_2^2、a_3^3、a_4^4 依次构成等比数列? 并说明理由.

(3) 是否存在 a_1、d 及正整数 n、k，使得 a_1^n、a_2^{n+k}、a_3^{n+2k}、a_4^{n+3k} 依次构成等比数列? 并说明理由.

解析 (1) 容易.

(2) 不妨设 $a_1=1$ (否则分别用$\frac{a_i}{a_1}$、$\frac{d}{a_1}$代替 a_i、d，$\left\{\frac{a_i}{a_1}\right\}$仍构成等差数列，并且 1、$\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2$、$\left(\frac{a_3}{a_1}\right)^3$、$\left(\frac{a_4}{a_1}\right)^4$ 构成等比数列与 a_1、a_2^2、a_3^3、a_4^4 构成等比数列等价).

如果 a_2^2、a_3^3、a_4^4 构成等比数列，那么

$$a_2^2 a_4^4 = (a_3^3)^2, \tag{1}$$

即

$$(1+d)(1+3d)^2 = (1+2d)^3,$$

化简得

$$d(1+3d+d^2) = 0. \tag{2}$$

因为 $1+3d+d^2 = a_4 + d^2 > 0$，$d \neq 0$，所以式②、式①不成立，即 a_1、a_2^2、a_3^3、a_4^4 不构成等比数列.

(3) 同上可设 $a_1 = 1$，并且 1、$(1+d)^m$、$(1+2d)^{m+k}$、$(1+3d)^{m+2k}$ 构成等比数列，其中 $m = n + k$ 是不小于 2 的整数. 由

$$(1+2d)^{m+k} = (1+d)^{2m}, \tag{3}$$

得

$$(1+2d)^k = \left(\frac{(1+d)^2}{1+2d}\right)^m = \left(1 + \frac{d^2}{1+2d}\right)^m > 1,$$

所以 $1+2d > 1$，$d > 0$.

又由式③，得

$$k\ln(1+2d) = m\left(\ln(1+d)^2 - \ln(1+2d)\right). \tag{4}$$

由

$$(1+3d)^{m+2k} = (1+d)^{3m},$$

得

$$2k\ln(1+3d) = m\left(\ln(1+d)^3 - \ln(1+3d)\right). \tag{5}$$

由式④、式⑤相除，消去 m、k，得

$$\frac{\ln(1+2d)}{2\ln(1+3d)} = \frac{\ln(1+d)^2 - \ln(1+2d)}{\ln(1+d)^3 - \ln(1+3d)},$$

整理得

$$4\ln(1+3d)\ln(1+d) - \ln(1+3d)\ln(1+2d) - 3\ln(1+d)\ln(1+2d) = 0. \tag{6}$$

式⑥在 $d=0$ 时成立. 我们证明当 $d > 0$ 时，式⑥不成立，从而所说的 a_1、d、m、k 不存在. 为此，令

$$\begin{aligned} g(d) = &4\ln(1+3d)\ln(1+d) - \ln(1+3d)\ln(1+2d) \\ &- 3\ln(1+d)\ln(1+2d) \quad (d \geqslant 0). \end{aligned}$$

只需证 $g(d)$ 严格递增. 采用导数，得

$$\frac{1}{2}g'(d) = \frac{(1+3d)^2\ln(1+3d) - 3(1+2d)^2\ln(1+2d) + 3(1+d)^2\ln(1+d)}{(1+d)(1+2d)(1+3d)}.$$

只需要证明 $g'(d) > 0$ $(d > 0)$，即函数

$$h(d) = (1+3d)^2\ln(1+3d) - 3(1+2d)^2\ln(1+2d) + 3(1+d)^2\ln(1+d)$$

严格递增 $(h(0)=0)$.

函数 $h(d)$ 比 $g(d)$ 简单多了，后者每项是两个对数相乘，现在每项只剩一个对数式.

继续求导数：

$$h'(d)=6\big((1+3d)\ln(1+3d)-2(1+2d)\ln(1+2d)+(1+d)\ln(1+d)\big),$$

$$\begin{aligned}h''(d)&=6\big(3\ln(1+3d)-4\ln(1+2d)+\ln(1+d)\big)\\&=6\ln\frac{(1+3d)^3(1+d)}{(1+2d)^4}=6\ln\frac{1+10d+36d^2+54d^3+27d^4}{1+8d+24d^2+32d^3+16d^4}\\&\geqslant 0.\end{aligned}$$

等号仅在 $d=0$ 时成立. 所以 $h'(d)$ 单调递增，$h'(d)\geqslant 0$，等号仅在 $d=0$ 时成立. 从而 $h(d)$、$g(d)$ 均严格递增. 题中所说的 a_1、d、n、k 不存在.

这一问太难了，好像除了用求导数法也没有什么好方法，幸而 $g(d)$、$h(d)$、$h'(d)$、$h''(d)$ 越来越简单（$h(d)$ 的每一项是对数式乘以二次式，$h'(d)$ 的每一项是对数式乘一次式，$h''(d)$ 的每一项是对数式乘常数）.

当式子越来越简单时，我们相信路子是正确的. 反之，如果情况越来越复杂，那么这样的道路多半是错误的. 赶紧改弦更张，不要坚持在错误的道路上越走越远.

下面再看看附加题.

第 21 (C) 题 已知圆 C 的极坐标方程为

$$\rho^2+2\sqrt{2}\rho\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)-4=0. \qquad ①$$

求圆 C 的半径.

解析 将 $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$ 用加法定理展开，是很笨拙的. 应当将极轴绕点 O 逆时针旋转 45°，即令 $\theta'=\theta-\frac{\pi}{4}$，将式①化为

$$\rho^2+2\sqrt{2}\rho\sin\theta'-4=0. \qquad ②$$

再将 $\rho=x^2+y^2$，$\rho\sin\theta'=y$ 代入，得

$$x^2+y^2+2\sqrt{2}y-4=0,$$

即

$$x^2+(y+\sqrt{2})^2=6.$$

所以半径为 $\sqrt{6}$.

第 22 题 如图 5 所示，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，已知 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，且四边形 $ABCD$ 为直角梯形，$\angle ABC=\angle BAD=\frac{\pi}{2}$，$PA=AD=2$，$AB=BC=1$.

求平面 PAB 与平面 PCD 所成二面角的平面角.

解析 本题可用向量解，但也可以用纯几何的方法. 后者有助于培养空间概念和绘图能力.

纯几何的方法首先要作出平面 PAB 与平面 PCD 的交线. P 是它们的一个公共点，还要找出另一个公共点.

找公共点不难. 直线 AB、CD 分别在平面 PAB、PCD 上，它们的交点也是平面 PAB 与平面 PCD 的公共点.

如图 6 所示，在平面 $ABCD$ 内，延长 AB、DC，相交于 E，PE 就是平面 PAB 与平面 PCD 的交线.

因为 $PA\perp$平面 $ABCD$，所以 $PA\perp AD$. 又$\angle BAD=\frac{\pi}{2}$，$AD\perp AE$，从而 $AD\perp$平面 PAE，$AD\perp PE$.

在平面 DPE 内作 $DF\perp PE$，F 为垂足. 联结 AF，因为 $PE\perp AD$，$PE\perp DF$，所以 $PE\perp$平面 DFA，$\angle DFA$ 就是平面 PAB 与平面 PCD 所成二面角的平面角.

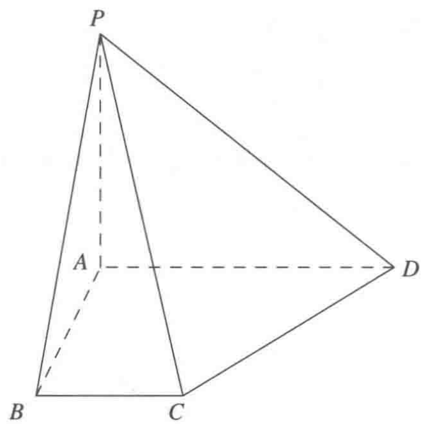

图 5

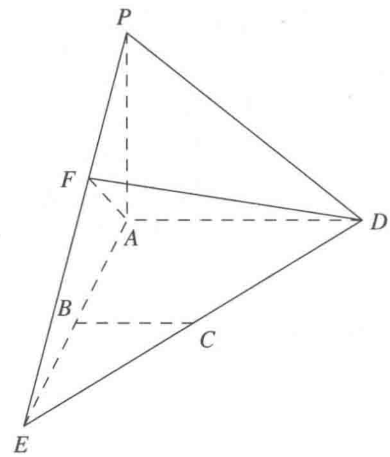

图 6

因为在梯形 $ABCD$ 中，$BC/\!/AD$，$BC=1=\frac{1}{2}AD$，所以 BC 是$\triangle EAD$ 的中位线，$EA=2AB=2$.

因为 $PA=AD=2$，$\angle PAE=\angle EAD=\frac{\pi}{2}$，所以 $PE=ED=PD=2\sqrt{2}$，$AF=\frac{1}{2}PE=\sqrt{2}$.

$\triangle PED$ 是正三角形，$DF=\frac{\sqrt{3}}{2}DP=\sqrt{6}$. 在$\triangle FAD$ 中，有

$$\cos\angle DFA=\frac{DF^2+AF^2-AD^2}{2\cdot DF\cdot AF}=\frac{(\sqrt{6})^2+(\sqrt{2})^2-2^2}{2\times\sqrt{6}\times\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

本题中，三面角 $P-EAD$ 的三个面角$\angle EPA=\angle APD=\frac{\pi}{4}$，$\angle EPD=\frac{\pi}{3}$，从而用球面三角公式（边的余弦定理）

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A$$

（其中 $a=\angle APD$，$b=\angle EPA$，$c=\angle EPD$，A 等于平面 PAB 与平面 PCD 所成二面角的平面角），得 $1=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A$，即 $\cos A=\frac{\sqrt{3}}{3}$. 这样做也很方便.