『不可思议』的数与数系可持续发展

《数学中的小问题大定理》丛书（第六辑）

邹叔鑫 著

◎数系发展和新数建立

◎数的代数运算

◎数的运算定律与法则

◎数学方法论的说明

◎数学发展与认识论

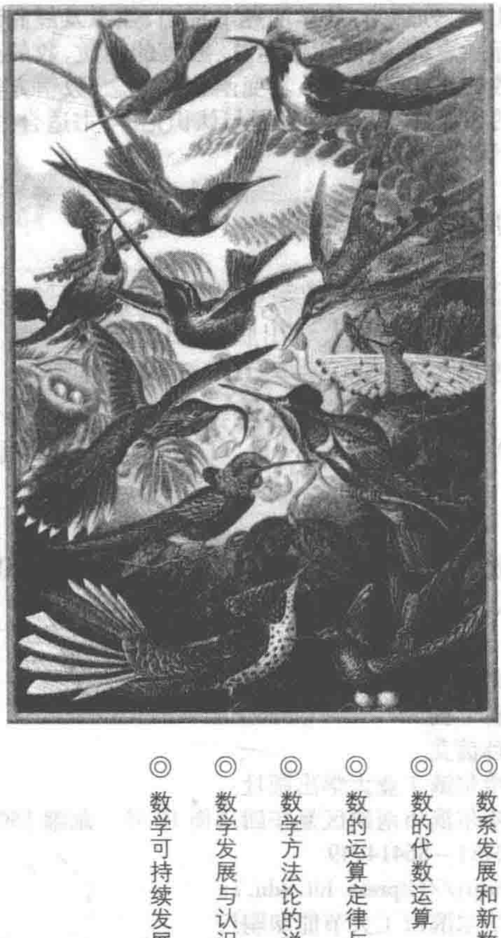
◎数学可持续发展

HITP
哈爾濱工業
HARBIN INSTITUTE O

《数学中的小问题大定理》丛书（第六辑）

『不可思议』的数与数系可持续发展

邹叔鑫 著



◎ 数系发展和新数建立

◎ 数的代数运算

◎ 数的运算定律与法则

◎ 数学方法论的说明

◎ 数学发展与认识论

◎ 数学可持续发展

HITP
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书深入浅出地介绍了现今数学中的一些问题，由分母为零和运动坐标给出 Z - 复数的数与形的概念，扩充了新数域. 本书共分 11 章，分别为：数学问题的提出、数系发展和新数建立、数的坐标系表示、数的代数运算、数集的性质、数的运算定律与法则、数的基本定理、Z - 复变函数的概念、数学方法论的说明、现象的相对解释和数学发展与认识论. 本书适合中学、大学师生及数学爱好者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

"不可思议"的数与数系可持续发展/ 邹叔鑫著.
—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2018. 1
ISBN 978 - 7 - 5603 - 7210 - 5

Ⅰ. ①不… Ⅱ. ①邹… Ⅲ. ①数学 - 基本知识
Ⅳ. ①O1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 330066 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　曹　杨
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451 - 86414749
网　　址　http://hitpress. hit. edu. cn
印　　刷　哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本　787mm × 960mm　1/16　印张 14. 25　字数 130 千字
版　　次　2018 年 1 月第 1 版　2018 年 1 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978 - 7 - 5603 - 7210 - 5
定　　价　38. 00 元

献给中学生——

打开数学思维大门的钥匙

前言

人们对数系的认识,是因为数学中的加减乘除及乘方、开方的“诡异”运算,产生正数、零与负数的区别,有理数与无理数的不同,实数与虚数的差别,并伴随着“数”和“形”的结合而发展. 现今,数学运算中的“不可思议”的数——分母为零的数,也可导致新的数系的产生,这应是人们认识观的一大提升,即数系可持续发展. 新数系包含着旧数系,还能独自演绎出“1 + 1 = 1”的加法运算律,并且反映在概率及布尔代数等运算中. 至于新数的参照系,是从“刻舟求剑”典故中悟出的相对运动坐标,来作为它的“形”. 因此,这样的新数产生,正如著名的科学家爱因斯坦所说的:“世界上最不可思议的,就是世界可以让人类理解.”

创造数学,构造数学,学习数学,研究数学,都是思维的过程,而且是较为纯净的思维过程. 然而,人们的思维分为两种:发散思维和收敛思维. 发散思维富有想象能力,善于发现问题,其中由这样的公式来估计:创造能力 = 知识量 × 发散思维能力;收敛思维富有分析能力,归纳的条理性很强,

善于解决问题. 一般来说,凡在数学上创立新概念、新理论、新模型,提出新方法,证明新定理等,都可叫作数学领域中的发明或创造. 数学创造往往开始于不严格的发散思维,而继之以严格的逻辑分析思维,即收敛思维. 也就是说,作为数学的研究,既需要有发散思维能力,也需要有收敛思维能力,才能达到完美的思想境界.

德国数学家希尔伯特指出:“数学这门科学究竟以什么作为其问题的源泉呢? 在每个数学分支中,那些最初、最老的问题肯定是起源于经验,是由外部的现象世界所提出的.”科学来源于问题,只有引出了问题,才能说进入了研究. 因此,我以“数学问题的提出”作为本书稿的第 1 章,综合外部的现象世界中所涉及的问题而对新数的创立进行阐述. 本书稿撰有 13 万字,却一直搁置在箱底长达 20 年,我今天把它拿出来“晒”,也未免让读者贻笑大方,但愿大家诚恳地给我斧正,让新数的创立能在数苑中有立根之处!

数作零分母,形为动坐标.
班门三弄斧,有待大师教.

邬叔鑫
2017 年秋
于福州

目录

第1章

数学问题的提出

世界著名的科学家爱因斯坦曾经说过:“提出一个问题往往比解决一个问题更重要,因为解决问题也许仅是一个数学上或实验上的技能而已,而提出新的问题、新的可能性,从新的角度去看旧的问题,却需要有创造性的想象力,而且标志着科学的真正进步.”著名的科学家李政道在和中国科技大学少年班师生谈话时,特别强调要使学生敢于提出问题,他说:“最重要的是会提出问题,否则将来就做不了第一流的工作.”

我们知道,许多有成就的科学家就是从提出新问题开始的.著名的欧洲科学家居里夫妇在铀的放射性被发现后提出了一个新问题:“除铀之外,是否别的元素也有放射性?放射现象的能量从哪里来?”正是这些问题促使他们反复思考与实验,成了他们发现镭的起点.当英国物理学家法拉第得知丹麦物理学家奥斯特发现了

电能产生磁时，他立即提出一个问题：既然电能产生磁，那么磁能不能产生电呢？这个问题折磨了他整整10年，经过反复思考与实验，终于发现了电磁感应现象.

科学发现的起点是问题，对于数学来说也是如此. 无论在自然世界里，还是在社会实践中，到处都有数学及其问题，关键在于需要我们去发现它，而且数学的发展也需要我们对它不断地提出新的问题.

首先，我们应该认识到，提出问题是发展科学的前提. 问题是科学的灵魂，是科学中活的血液. 科学问题的宝藏是无穷无尽的. 只要一门学科中充满了问题，它就充满了生命力，缺少问题则预示着它的发展将中止或衰亡.

其次，所选择的问题一定要是当时这个领域中活跃的、关键的、举足轻重的大问题，并且具有相当的难度. 这样问题的解决才有意义，才能激励人们去做出更多的努力. 但它又不是完全不可接近的. 在通向真理的崎岖道路上，它应该是人们前进的指路灯和加油器.

最后，在解决这些重大问题的过程中，能够促进学科各分支乃至各学科间的相互联系和综合发展，有利于产生新观点，出现新方法，创立新学科.

数学是科学的皇后，也是科学的大门和钥匙. 当今世界数学发展的趋势表现为：数学核心领域的深化与扩展，数学的广泛应用，以及计算机与数学的相互影响三大方面.

核心数学以揭示数学内部规律为特征，其目的不在于对社会是否有用，而在于是否为真. 它始终是数学发展的主要动力. 数学史中最奥秘的奇迹之一就是真正的核心数学，“它总是坚持按照自身的方式，不明显地、不可预测地最终使自己成为有用的东西”.

§1　分母为零的数

关于分配的问题，有人问：“把 8 个梨平均分给 4 个小朋友，每个小朋友能吃几个？再拿出 2 个呢？”这个问题就连小学生也会回答正确. 接着，那人又问：“把 8 个梨平均分给 0 个小朋友，每个小朋友能吃几个？再拿出 2 个呢？”大家都会这样回答：“0 作除数没有意义.”

数学中的“0”和“无”并不完全是一回事. 在小学数学里，“0”表示“没有”，是对现实的反映. 但随着人类实践活动的不断发展，对于“0”的认识不是一成不变的. 在学习了正负数以后，“0”有了更加丰富的内容，它不仅表示“没有”，而且表示一种确定的量. 也就是说，“0”是正数和负数的界限，它既不是正数，也不是负数，是唯一的中性数.

我们都知道，“0”在运算中起着重要的作用. 例如：$a+0=a$，$a-0=a$，$0-a=-a$，$0\cdot a=0$，$0\div a=0$，$a^0=1$（且 $a\neq 0$），$0!=1$.

反映现实的概念一旦符号化，可以做数学处理，

就会引出派生的符号. 这些派生符号中有的可以找到直接的现实原型,有的则不能找到,但它们却有运算的意义. 我们学习过的数学符号 a^0,0!,$\sqrt{-1}$ 能够代表虽有用处又缺乏直接现实原型的东西. 也就是说,我们能够见到$\frac{8}{4}$个或$\frac{2}{4}$个梨,但都没有吃过 $\sqrt{-1}$ 个梨. 同样,我们也没有吃过$\frac{8}{0}$个或$\frac{2}{0}$个梨.

先暂时抛开$\frac{8}{0}$,$\frac{2}{0}$的现实概念,而从运算的意义来看,我们可以进一步知道 8 个梨平均分给 0 个小朋友,和 8 + 2 个梨平均分给 0 个小朋友的结果是一样的,能列出下面的运算式

$$\frac{8}{0}+\frac{2}{0}=\frac{8+2}{0}$$

即:无意义 + 无意义 = 无意义.

如果我们都认为“0”作除数没有意义,那么根据这个概念也可说$\frac{0}{0}$是没有意义的. 但是,我们的革命导师恩格斯在《自然辩证法》一书中指出:“$\frac{0}{0}$可以表现正无限大和负无限大之间的任何数,而且在每一场合下都代表一个实数.”还有,在求函数的极限时,我们常遇到各种未定型$\frac{0}{0}$,$\frac{a}{0}$,$\frac{\infty}{\infty}$,$0\cdot\infty$,$\infty-\infty$,0^0,1^∞,∞^0 等,然后用洛必达法则来运算,求出函数的极限. 所以从$\frac{0}{0}$中,我们可以知道分母为 0 不至于无意

义,而$\frac{0}{0}$却以一个不定型的数存在.

然而,我们会这样问:$\frac{8}{0}$,$\frac{2}{0}$,$\frac{8+2}{0}$能够和$\frac{0}{0}$一样都是一个不定型的数吗? $\frac{8}{0}+\frac{2}{0}=\frac{8+2}{0}$能够和$\frac{8}{4}+\frac{2}{4}=\frac{8+2}{4}$一样进行加法运算吗? 再从虚数$\sqrt{-1}=\mathrm{i}$联想,能够确立$\frac{m}{0}=*$($m$为任意一个复数)的新数吗?

§2　"1+1=1"的加法算律

如果一位小学生在黑板上进行"1+1=1"的运算,那么他的老师一定会说是错误的. 可是这一运算结果,在某个范围内确实是正确的. 在我们的实践活动中,都存在着"1+1=2"和"1+1=1"两种不同的加法算律.

首先,从速度的合成律上来谈.

假设一条河的水流速度为v',一只船在静水中的速度为u,那么我们站在河的岸边来看这只船顺水而下的速度则是$v=v'+u$,这是经典物理中的速度合成律,它遵循"1+1=2"的加法算律.

可是在新的速度合成律上,曾有$c+c=c$的光速现象.

由于光速是不变量，又从经典的速度合成律发展到能包含光速不变性的新的速度合成律——狭义相对论的速度合成公式 $v=\dfrac{v'+u}{1+\dfrac{v'\cdot u}{c^2}}$. 又假设我们站在地球上看远离我们而去的光速大飞船 $v'=c$，而大飞船又在同一方向上朝前发射出光速小飞船 $u=c$，那么小飞船对我们来说的远离而去的速度则是 $v=\dfrac{c+c}{1+\dfrac{c\cdot c}{c^2}}=c$，这就是 $c+c=c$ 的光速现象，它却符合“1 + 1 = 1”的加法算律.

其次，从不同纸圈的面数上来谈.

我们拿出一张纸条，如果两头对接的方法不同，那么可有两头直对接而成的圆柱似的纸圈，也可有一头扭转 180°再对接而成的奇异的纸圈. 数学家称后者为“麦比乌斯带”，因为它是德国数学家麦比乌斯在 1858 年首次做出来的. 在华盛顿一座博物馆的门口，人们修建了一座奇特的数学纪念碑，碑上是一个 8 英尺(1 英尺 =0. 304 8 米)高的不锈钢制的麦比乌斯带.

把一只蚂蚁放在圆柱似的纸圈面上爬行，当它不越过纸圈边缘时所经历的面是两个面，这和原来纸条上所经历的面数是一样的，也就是体现出纸条两头直对接后的“1 + 1 = 2”的面数现象. 如果再把这只蚂蚁放在麦比乌斯带的面上爬行，那么当它也不越过纸圈边缘时所经历的面却是一个面，这与在圆柱似的纸圈上爬行所经历的面数是不同的，也就体现出了纸条一

头翻卷对接后的“1+1=1”的面数现象.

再从广义上看,如图1,由正三棱体、正四棱体、正五棱体……扭转其截面正边形相接而成的麦比乌斯环,在扭转第一顺序上都是“一面体”,也就是“1+1+1=1”“1+1+1+1=1”“1+1+1+1+1=1”….

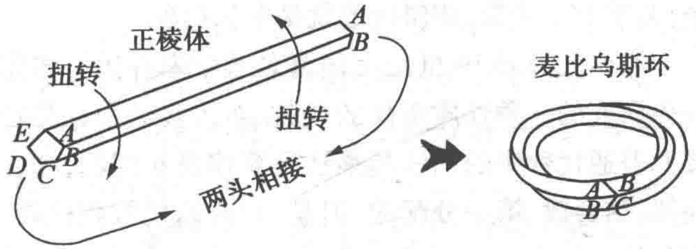


图1

再次,我们知道概率论是数学的一个重要分支,它研究的对象是随机事件的数量规律性. 在概率的事件运算中,就有这样的公式 $A+A=A$ 和 $A\cdot A=A$. 我们对于 $A+A=A$,认为偶然事件 A 在必然事件 Ω 中的出现是单一性的,至于同样事件 A 的“第二次”出现,是说 A 还在出现的过程中,是 A 的连续体,事件 A 没有“本身+本身=2本身”的特性. 如果偶然事件 A 和 B 都在必然事件 Ω 中出现,那么它们的和是 $A+B=B+A$.

$A+A=A$ 和 $A\cdot A=A$ 的运算律在电路开关上可以认为是当两个开关在同样的状态(即当它们同时打开或关闭时)下串联或并联时,所得到的电路部分同在这种状态下单独一个开关一样. 我们也知道,电子元件有两种状态(例如有信号为通路,没有信号为断路),把这两种状态分别记为“1”和“0”,这样就可以用

电子元件来组成逻辑加、逻辑乘、逻辑非的线路，使它们在自动化技术中起着重要的作用. 逻辑运算 $1+1=1$ 却不同于算术运算 $1+1=2$.

也许因为这类数学的运算与电路开关有关系，或与逻辑思维有关系，所以被称为开关代数或逻辑代数. 其实开关代数、逻辑代数就是布尔代数.

布尔代数是19世纪英国著名数学家乔治·布尔首先研究的一种性质奇怪的代数. 布尔代数中有些运算和普通代数中的加法与乘法运算律是相同的，如交换律、结合律、第一分配律. 但是，和普通代数相比较，布尔代数的另一些运算律则是反常的，如等幂律、第二分配律. 然而，概率的事件运算公式 $A+A=A$ 和 $A\cdot A=A$ 等同于布尔代数的加法等幂律和乘法等幂律 $(a+a=a, a\cdot a=a)$，也都符合“$1+1=1$”的加法算律和“$1\cdot 1=1$”的乘法算律.

最后，我们还知道，在零的运算中，虽然没有 $0\div 0$ 的结果，但是仍存在 $0+0=0, 0-0=0, 0\cdot 0=0$ 的性质. 在无穷大或无穷小的运算中，虽然 ∞，w 不是一个数，而是表示一个变数的变化过程（$\infty=\frac{1}{w}$，$\infty\to\frac{1}{0}$，且 $\infty\neq\frac{1}{0}$），但是它们也存在 $\infty+\infty=\infty$，$\infty\cdot\infty=\infty$ 和 $w+w=w$，$w\cdot w=w$ 的特性.

凡由有限多个事物组成的集合，叫作有限集；由无限多个事物组成的集合，叫作无穷集. 有限集和无穷集的运算法则有很大差别，不能混同使用. 例如：有限集 $A=\{a,b,c\}$ 有3个元素，$B=\{l,m,n,p\}$ 有4个

元素，显然 $A+B$ 有 $3+4=7$ 个元素. 但对无穷集，情况就不同了，若 $C=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$ 有 $\aleph_0$（阿列夫零）个元素，$D=\{2,4,6,\cdots,2n,\cdots\}$ 有 $\aleph_0$ 个元素，那么 $C+D$ 有 $\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$ 个元素.

然而，我们会这样问：$c+c=c$，$1+1=1$，$A+A=A$，$a+a=a$，$0+0=0$，$\infty+\infty=\infty$，$w+w=w$，$\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$，…都以一种相同的加法运算形式存在是要如何解释？它们与那分母为零的数的加法运算又有怎样的关系呢？

再进一步问道：在数的运算中，为什么既会存在着“$1+1=2$”复数型的加法算律，又会存在着“$1+1=1$”奇异数型的加法算律？它们之间又有怎样的关系呢？

§3　静止与运动的坐标系

关于“刻舟求剑”的故事.

《吕氏春秋·察今》里说，楚国有一个人过江，在船正行驶的时候把剑掉进江里，他立即在剑落水的船身上刻了个记号，说：“我的剑是从这儿掉下去的.”等船靠岸了，他就从做了记号的地方下水去找剑，结果自然找不到.

这个古代寓言可以说明存在着两种不同的坐标系. 我们知道，对于站在岸边的观察者来说，一种是江底被视为绝对静止坐标系，另一种是行驶远去的船被