高职高专规划教材

高等应用数学

基于翻转课堂的项目化设计

主审 ● 金卫东　主编 ● 龚飞兵

苏州大学出版社
Soochow University Press

高等应用数学

——基于翻转课堂的项目化设计

金卫东　主审
龚飞兵　主编

苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等应用数学:基于翻转课堂的项目化设计/龚飞兵主编. —苏州: 苏州大学出版社,2017.8
ISBN 978-7-5672-2147-5

Ⅰ.①高… Ⅱ.①龚… Ⅲ.①应用数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O29

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 146261 号

内容简介

本教材对原有高职高专数学教材教学内容进行了适当的调整,对部分数学基础思想方法进行了必要的补充,既考虑了人才培养的应用性,又照顾了学生的可持续发展,同时也尽量保持本学科知识体系的系统性,集成了高职高专院校数学教学改革的成果。

本教材内容主要包括应用数学和数学实验两大组成部分,特点是:以项目化的布局分为六大模块,每个模块又配备了自测题与拓展阅读材料。

本教材可作为高职高专院校各专业通用高等数学教材,各类培训教材,也可作为工程技术人员的自学用书。

高等应用数学
——基于翻转课堂的项目化设计
龚飞兵 主编
责任编辑 征 慧

苏州大学出版社出版发行
(地址:苏州市十梓街1号 邮编:215006)
常州市武进第三印刷有限公司印装
(地址:常州市湟里镇村前街 邮编:213154)

开本 787×1092 1/16 印张 17.5 字数 438 千
2017 年 8 月第 1 版 2017 年 8 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-5672-2147-5 定价:40.00 元

苏州大学版图书若有印装错误,本社负责调换
苏州大学出版社营销部 电话:0512-65225020
苏州大学出版社网址 http://www.sudapress.com

前 言

随着高等职业教育由数量扩张向质量提升的转变，高等职业教育的人才培养定位也由"偏重技能"逐步转化成"专业技能、综合素质协调发展"，构建新型高职课程体系成为高职教育改革的重点。高等数学作为一门重要的基础课程，兼具提升学生的素质和专业基础，其作用越发凸显。具有多年教学经验的编写组成员在认真研究高职高专数学教学形势的基础上，紧密结合专业人才培养和能力结构要求，完成了本教材的编写。

编写本教材的指导思想：强化高职教育的培养目标，以目标为指引对原高职高专数学教材教学内容进行了适当的调整，对部分数学思想方法进行了必要的补充；考虑到现代高职学生的特点，增加了适量的例题和习题，便于学生巩固和加深对所学知识的理解和掌握。在教学内容的取舍上，按照应用优先的原则，注重数学与相关学科的横向连接，力求做到实践与应用、拓展知识面与强化能力训练、一般能力培养与职业能力培养相结合。在编写过程中，既考虑了人才培养的应用性要求，又照顾了学生可持续发展的需要，增加了正交试验等内容，同时还尽量保持本学科知识体系的系统性，涵盖高职高专院校数学教学改革的成果。

本教材主要由应用数学和数学实验两大部分组成，共分六个项目，每个项目后面都增加了反映数学历史上重要数学思想的拓展阅读材料，其主要特点是：注重知识衔接，淡化理论推导，面向专业需求，强化应用能力。

本教材主要适用于高职高专理工科纺织染化类、机械电子类、经济管理类、建筑工程类和航空类等专业。在使用本教材时，教师应该根据不同专业的实际需要适当选择相应的内容。

本教材由金卫东任主审，龚飞兵任主编。项目 1、项目 5、项目 6 由龚飞兵编写，项目 2、项目 3 由曹敏编写，项目 4 由徐亮编写，数学实验由桑宗曦负责整理，李从胜负责数学实验部分习题的程序整理。

由于编写时间及编写水平有限，书中难免存在错误和不妥之处，恳请广大读者批评与指正。

编者

2017 年 5 月

目 录

第一部分 应用数学

第二部分 数学实验

第一部分　应用数学

项目1　函数、极限与连续

任务1.1　函数的概念、基本初等函数的性质及初等函数

任务内容

- 完成与函数概念及基本初等函数性质相关的工作页；
- 学习与函数相关的知识；
- 学习基本初等函数的实际应用；
- 完成与初等函数相关的工作页；
- 学习与初等函数相关的知识；
- 对特殊函数的表达式确定分组并讨论；
- 学习基本初等函数与初等函数之间的分解与复合.

任务目标

- 掌握函数的基本概念和解析式的表达方法；
- 掌握求函数定义域的方法；
- 掌握判断函数奇偶性、单调性的方法；
- 掌握基本初等函数的基本概念和解析式的表达方法；
- 掌握三角函数的简单求法；
- 掌握特殊函数的表达形式及应用；
- 掌握复合函数的复合过程；
- 掌握复合函数的分解过程；
- 能够利用函数表达实际问题,解决专业案例.

1.1.1 工作任务

熟悉如下工作页，了解本任务学习内容. 在学习相关知识后，利用工作页在教师的指导下完成本任务，同时完成工作页内相关内容的填写.

任务工作页

1. 若田芳菲每个月工资为5600元，请计算田芳菲一年将上缴的个人所得税. ________________
2. 函数的三要素： (1) ________________ (2) ________________ (3) ________________
3. 求函数定义域时应注意的是：________________
4. 判断两个函数是同一个函数的标准是：________________
5. 如何判断函数是奇函数还是偶函数？ ________________
6. 如何判断函数是否有界？ ________________
7. 基本初等函数包括哪些函数？ ________________
8. 幂函数与指数函数在表达式上有哪些区别？ ________________
9. 三角函数在四个象限内的符号：________________
10. 求三角函数的步骤是：________________
11. 三角函数关系式有哪些？ ________________
12. 复合函数的复合过程：________________
13. 复合函数的分解过程：________________
14. 复合函数与乘法运算的区别：________________
15. 所有基本初等函数都能复合成复合函数吗？为什么？ ________________
16. 分段函数是复合函数吗？为什么？ ________________

【案例引入】 根据《中华人民共和国个人所得税法》规定：个人工资、薪金所得应当缴纳个人所得税. 从2011年9月1日起，每月应纳税所得额的计算为：每月工资、薪金所得减去3500元后的余额（注：这里未考虑社会保险、医疗保险、住房公积金），个人所得税纳税税率如表1-1所示.

表 1-1　个人所得税税率表(工资、薪金所得)

级数	全月应纳税所得额(超出 3500 元的数额)	税率/%
1	不超过 1500 元的部分	3
2	超过 1500 元到 4500 元的部分	10
3	超过 4500 元到 9000 元的部分	20
4	超过 9000 元到 35000 元的部分	25
5	超过 35000 元到 55000 元的部分	30
6	超过 55000 元到 80000 元的部分	35
7	超过 80000 元的部分	45

(1) 求应纳税函数 $f(x)$;

(2) 若李先生 12 月工资为 56000 元,问李先生 12 月应纳税为多少?

1.1.2　学习提升

函数是客观世界中量与量之间相依关系的一种数学抽象表达,是变量之间的对应关系.它展现了事物之间的因果关系,是揭示实际生活中现象本质的重要工具.

1.1.2.1　函数的概念

定义 1-1　设 x 和 y 是两个变量,D 是给定的一个数集. 如果对于每个数 $x \in D$,变量 y 按照一定的法则总有确定的数值和变量 x 对应,则称 y 是 x 的函数,记作 $y=f(x)$. 其中,给定的数集 D 称为函数 $y=f(x)$ 的定义域,x 称为自变量,y 称为因变量. 因变量 y 的取值范围

$$W=\{y \mid y=f(x), x \in D\}$$

称为函数的值域.

函数的概念比较抽象,举个实际生活中的例子:圆的半径为 r,面积为 A,它们之间的关系为 π 倍的圆半径的平方就等于圆的面积 A,那么这就构成了一个函数,即 $A=\pi \cdot r^2$. 其中圆的半径 r 称为自变量,圆的面积 A 称为因变量,π 倍的圆半径的平方等于圆的面积这个关系就称为对应关系. 所有 r 能取到的有实际意义的数值放在一起,称为定义域;相对应的 A 的值放在一起,称为值域.

单值函数:对于自变量 x 取定的一个值,y 有唯一的值与 x 对应,这样的函数称为单值函数.

多值函数:对于自变量 x 取定的一个值,y 有多个值与之对应,这样的函数称为多值函数.

1.1.2.2　函数的三要素

函数的三要素包括:定义域、值域和对应关系. 其中定义域是基础,对应关系是核心.

求函数定义域的基本方法如下：

(1) 分式中的分母不为零.

例如，设$f(x)=\dfrac{2}{x-3}$，那么$x-3\neq 0$，因此$f(x)$的定义域也就是x的取值范围，即$x\in(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$.

(2) 偶次方根下的数(或式)大于或等于零.

例如，设$f(x)=\sqrt{x-2}$，那么$x-2\geqslant 0$，因此$f(x)$的定义域也就是x的取值范围，即$x\in[2,+\infty)$.

(3) 对数式的底数大于零且不等于1，真数大于零.

例如，设$f(x)=\log_{x-5}3x$，那么$x-5>0$且$x-5\neq 1$，$3x>0$，因此$f(x)$的定义域也就是x的取值范围，即$x\in(5,6)\cup(6,+\infty)$.

以上几个方面有两个或两个以上同时出现时，先分别求出满足每一个条件的自变量的范围，再取它们的交集，就得到函数的存在域. 实际问题中的定义域除了要使解析式有意义(存在域)外，还须考虑实际上的有效范围.

1.1.2.3 两个函数相等的条件

两个函数相等的充分必要条件是其定义域、对应关系分别相同，而与所用字母无关.

例如，$y=x^2$与$u=v^2$就是相同的函数.

例 1-1 设$f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$，$g(x)=x+3$，问：它们是否为同一函数？为什么？

答：它们不是同一函数，因为它们的定义域不同. $f(x)$的定义域为$(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$，而$g(x)$的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

例 1-2 设$f(x)=\lg x^{100}$，$g(x)=100\lg x$，问：它们是否为同一函数？为什么？

答：它们不是同一函数，因为它们的定义域不同. $f(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，而$g(x)$的定义域为$(0,+\infty)$.

1.1.2.4 函数的几种特性

1. 函数的有界性.

定义 1-2 设D为某点集，对于$x\in D$，函数$f(x)$有定义. 如果存在某一正数M，使得对$x\in D$，都有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数$f(x)$在D内有界. 如果找不到这样的正数M，则称$f(x)$在D内无界.

例如，$f(x)=\sin x$，由于对$x\in(-\infty,+\infty)$都有$|f(x)|=|\sin x|\leqslant 1$，所以$f(x)=\sin x$在$(-\infty,+\infty)$内有界. 而对于函数$g(x)=x+1$，对$x\in(-\infty,+\infty)$，却找不到这样一个正数$M$，使得$|g(x)|=|x+1|\leqslant M$，所以说$g(x)=x+1$在$(-\infty,+\infty)$内无界.

在求极限等后续课程中经常要用到函数的有界性，因此必须记住两个常用的在$(-\infty,$

$+\infty$)内的有界函数:$y=\sin x$,$y=\cos x$.

简单地说,一个函数是否是有界函数,关键看这个函数是否有最大值和最小值.

2. 函数的奇偶性.

定义 1-3　设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,如果对任一 $x\in D$,恒有:

(1) $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为奇函数;

(2) $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为偶函数.

注意:有一类函数,它们既不是奇函数,也不是偶函数,把它们称为非奇非偶函数.

例 1-3　判断下列函数的奇偶性:

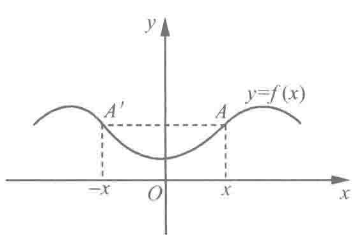
(1) $f(x)=5x^2+1$;　(2) $f(x)=2x+3\sin x$;　(3) $f(x)=9x-1$.

解　(1) $f(-x)=5(-x)^2+1=5x^2+1=f(x)$,故 $f(x)$ 为偶函数.

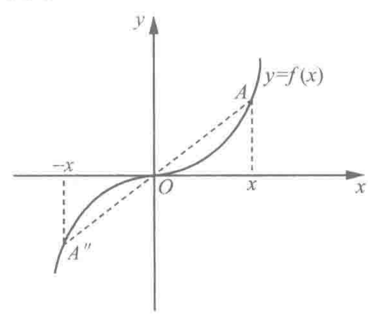
(2) $f(-x)=-2x+3\sin(-x)=-(2x+3\sin x)=-f(x)$,故 $f(x)$ 为奇函数.

(3) $f(-x)=-9x-1$,$f(-x)$ 既不等于 $-f(x)$ 又不等于 $f(x)$,所以该函数为非奇非偶函数.

函数的奇偶性体现在函数的图形上,偶函数的图形是关于 y 轴对称的,如图 1-1(a)所示;奇函数的图形是关于原点对称的,如图 1-1(b)所示.



(a) 偶函数



(b) 奇函数

图 1-1　函数的奇偶性

判断函数奇偶性的小窍门:

奇函数 × 奇函数 = 偶函数;

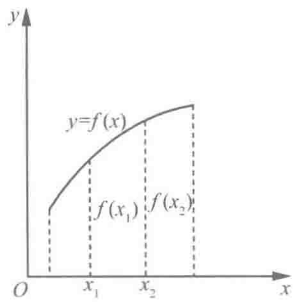
偶函数 × 偶函数 = 偶函数;

奇函数 × 偶函数 = 奇函数.

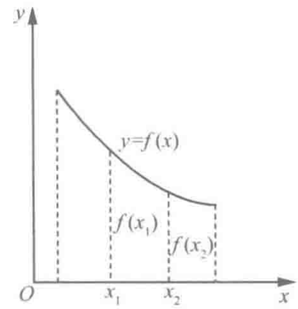
3. 函数的单调性.

定义 1-4　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I\subseteq D$. 若对 $\forall x_1, x_2\in I$,当 $x_1<x_2$ 时,总有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$)成立,则称函数 $f(x)$ 在 I 上单调增加(或单调减少).

若沿着 x 轴的正方向看,单调增加函数的图象是一条上升的曲线,如图 1-2(a)所示;单调减少函数的图象是一条下降的曲线,如图 1-2(b)所示.



(a) 单调增加函数



(b) 单调减少函数

图 1-2　函数的单调性

4. 函数的周期性.

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个正数 l，使得对于 $\forall x \in D$ 且 $x+l \in D$，有 $f(x)=f(x+l)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，l 称为 $f(x)$ 的周期. 通常所说的周期指的是最小正周期.

周期函数的图形特点：在函数的定义域内，每个长度为 l 的区间上，函数的图形有相同的形状. 例如，$y=\sin x$ 是周期函数，它的最小正周期是 2π.

1.1.2.5　三角函数

周期性是三角函数的显著特征，具有周期性的事物都可考虑用适当的三角函数来描述. 例如，天文学中的潮汐现象，电学中的交流电，经济规律，医学中的心率、血压，人的生理、情绪等都有周期性.

在电学及工程学中，三角函数占有重要地位，是计算交流电源、频率必不可少的数学工具. 根据高职专业需求，在此简要复习三角函数的计算方法及其图象和性质.

1. 角的表示法.

(1) 角度制（以角度作为单位来度量角的单位制）：周角的 $\frac{1}{360}$ 为 $1°$ 的角. 周角 $360°$，平角 $180°$，直角 $90°$.

(2) 弧度制（以弧度作为单位来度量角的单位制）：把长度等于半径长的弧所对的圆心角称为 1 弧度（rad）的角，记作 1rad.

注意： 角度是度数，弧度是数值.

2. 角度与弧度的转换.

(1) $360°=2\pi\ \text{rad}$；(2) $180°=\pi\ \text{rad}$；(3) $1°=\frac{\pi}{180}\ \text{rad}$.

3. 特殊角的三角函数值（表 1-2）.

表 1-2　特殊角的三角函数值

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在	0	不存在
$\cot\alpha$	不存在	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	不存在	0

4. 象限问题.

如图 1-3 所示,第二、三、四象限角均可用第一象限角表示.

各个三角函数在四个象限内的符号如图 1-4 所示.

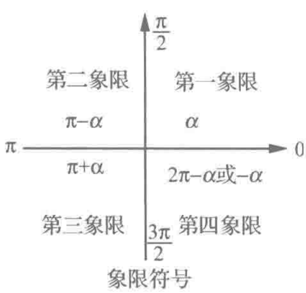


图 1-3　第二、三、四象限角用第一象限角表示

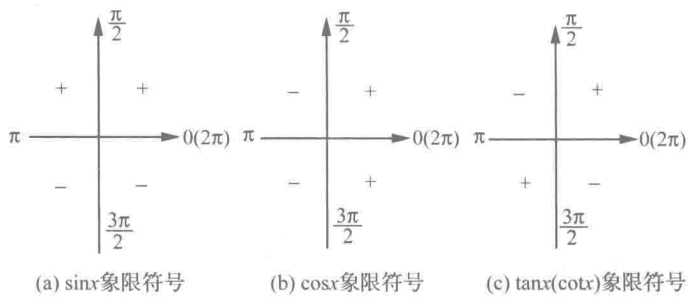


图 1-4　各个三角函数在四个象限内的符号

1.1.2.6　反函数的图象

互为反函数的两个函数图象关于直线 $y=x$ 对称.

1.1.2.7　分段函数

定义 1-5　一个函数在自变量的不同取值范围内用不同的解析式表示,这种函数称为分段函数.

两点基本认识:

(1) 分段函数是一个函数,不要因其有多个不同解析式就认为是多个函数;

(2) 分段函数的定义域是各段定义域的并集,值域是各段值域的并集.

求分段函数的值时,首先应确定自变量在定义域中所在的范围,然后按相应的对应法则求值.

例 1-4 设函数

$$f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\geqslant 0,\\ x-1, & x<0.\end{cases}$$

求:$f(-1),f(3),f(0)$.

解 $f(-1)=-1-1=-2,f(3)=2\times 3+1=7,f(0)=0+1=1$.

例 1-5 绝对值函数

$$y=|x|$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $W=[0,+\infty)$,如图 1-5 所示.

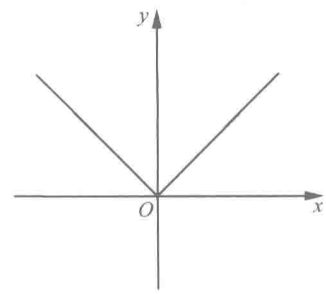


图 1-5 绝对值函数 $y=|x|$ 的图象

例 1-6 狄利克雷函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 是有理数},\\ 0, & x\text{ 是无理数}\end{cases}$$

的定义域 $D=\mathbf{R}$,值域 $W=\{0,1\}$.

例 1-7 符号函数

$$\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$$

的定义域 $D=\mathbf{R}$,值域 $W=\{-1,0,1\}$.

记号 sgn 由拉丁文 signum(符号,正负号)得来,用符号函数可以表示函数的符号.

绝对值函数可以用记号 sgn 表示为 $|x|=x\operatorname{sgn}x$,如图 1-6 所示.

例 1-8 取整函数. 设 x 为任一实数,不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分,记作 $[x]$,称 $y=[x]$ 为取整函数. 它的定义域 $D=\mathbf{R}$,值域 $W=\mathbf{Z}$,如图 1-7 所示.

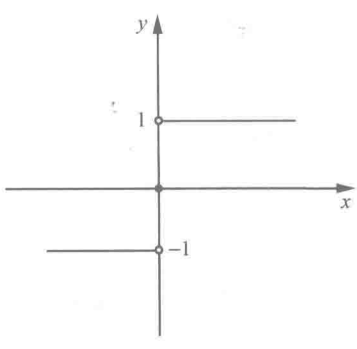


图 1-6 符号函数

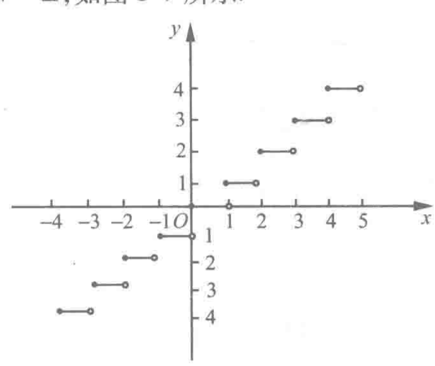


图 1-7 取整函数

1.1.2.8 **复合函数**

在日常生活中,存在很多复杂的现象,有时用一个函数并不能简单地揭示事件的本质,这时我们可以通过函数之间的复合得到新的函数. 例如,设 $y=\sin u$,而 $u=e^{v}$,$v=3x-2$,则将

$v=3x-2$ 代入 $u=e^v$,可得 $u=e^{3x-2}$,再把 $u=e^{3x-2}$代入 $y=\sin u$,可得

$$y=\sin e^{3x-2},$$

于是,称 $y=\sin e^{3x-2}$是由 $y=\sin u$,$u=e^v$ 及 $v=3x-2$ 复合而成的复合函数,把 u,v 称为中间变量.

定义 1-6 设 $y=f(u)$,$u=\varphi(x)$,若 $y=f[\varphi(x)]$有意义,则称 $y=f[\varphi(x)]$为函数 $y=f(u)$,$u=\varphi(x)$复合而成的复合函数,称 u 为中间变量.

对于 $y=f[\varphi(x)]$,φ 是内层函数,f 是外层函数.

例 1-9 设 $y=\sin u$,$u=7-3x^2$,则 $y=\sin(7-3x^2)$就是以 $u=7-3x^2$ 为中间变量的复合函数.

注意: 并不是任意两个函数都可以复合成一个复合函数. 例如,对于 $y=\ln u$,$u=-x^2$.

例 1-10 将下列各函数表示成 x 的复合函数:

(1) $y=\sqrt[3]{u+2}$,$u=\sin v$,$v=3x$;　　(2) $y=\ln u$,$u=3+2v^2$,$v=e^x$.

解 (1) $y=\sqrt[3]{u+2}=\sqrt[3]{\sin v+2}=\sqrt[3]{\sin 3x+2}$,即 $y=\sqrt[3]{\sin 3x+2}$.

(2) $y=\ln u=\ln(3+2v^2)=\ln[3+2(e^x)^2]=\ln(3+2e^{2x})$,即 $y=\ln(3+2e^{2x})$.

例 1-11 将下列复合函数分解:

(1) $y=e^{\sqrt{1-x^2}}$;　　(2) $y=\sin^5(3x-1)$.

解 (1) $y=e^u$,$u=\sqrt{v}$,$v=1-x^2$.

(2) $y=u^5$,$u=\sin v$,$v=3x-1$.

注意:

(1) 复合不是简单的加减乘除,而是构建了一种新运算.

(2) 复合函数的分解一般从最外层(或最左层)向内层一层一层分解,每次分解函数大多是基本初等函数.

(3) 函数的复合与复合函数的分解顺序相反,一般从最内层(最右层)一层一层代入,最终复合成复合函数.

1.1.2.9 初等函数

定义 1-7 幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数五大类函数称为基本初等函数.

定义 1-8 由常数及基本初等函数经过有限次四则运算和有限次函数复合所构成的并且可以用一个式子表示的函数,称为初等函数.

例如,$y=(2x+5)^8$,$y=\dfrac{2x+1}{x^2-x-6}$,$y=e^{\cos\frac{1}{x}}$就是初等函数,而 $y=\sin x+\sin 2x+\cdots+\sin nx$ 就不是初等函数.

【案例解答】

解 (1) 设工资、薪金所得为 x 元,由表 1-1 可得

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\leqslant 3500\\(x-3500)\cdot 3\% & 3500<x\leqslant 5000\\45+(x-5000)\cdot 10\% & 5000<x\leqslant 8000\\45+300+(x-8000)\cdot 20\% & 8000<x\leqslant 12500\\45+300+900+(x-12500)\cdot 25\% & 12500<x\leqslant 38500\\45+300+900+6500+(x-38500)\cdot 30\% & 38500<x\leqslant 58500\\45+300+900+6500+6000+(x-58500)\cdot 35\% & 58500<x\leqslant 83500\\45+300+900+6500+6000+8750+(x-83500)\cdot 55\% & x>83500\end{cases}$$

(2) 李先生 12 月工资为 56000 元,因此 $38500<x\leqslant 58500$,李先生 12 月应纳税为

$$f(x)=45+300+900+6500+(56000-38500)\cdot 30\%=12995(\text{元}).$$

1.1.3 专业应用案例

例 1-12 一艘装满化工染料的轮船由于发生事故导致化工染料泄漏,政府想要控制染料的进一步污染范围. 由于泄出染料表面积 S 将随时间 t 的增加而不断扩大,探讨染料表面积随时间的大致变化规律.

解 此题条件不够充分,因而有一定的开放性,可通过提出假设来解决此问题. 为了明确与简化问题,假设染料面始终呈圆形,再假设圆的半径为 r,随时间 t 的变化规律为

$$r=g(t)=1+t,$$

则由 $S=\pi r^2$ 得到复合函数

$$S=\pi r^2=\pi(1+t)^2.$$

例 1-13 某城市出租车的收费标准是:行程 3 km 以内收费为起步价 7 元,超过 3 km 的部分按每千米 1.5 元计费. 试求出租车车费与行车里程之间的函数关系式.

解 设乘客的行程为 x km,出租车车费为 y 元,则由收费标准知:

$$y=f(x)=\begin{cases}7, & 0\leqslant x\leqslant 3,\\7+1.5(x-3), & x>3.\end{cases}$$

练习题 1.1

1. 下列函数是否相同? 为什么?

(1) $f(x)=\lg x^2, g(x)=2\lg x$;　　(2) $f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}$;

(3) $f(x)=x, g(x)=(\sqrt{x})^2$;　　(4) $f(x)=e^{2x}, g(x)=(e^x)^2$.

2. 设 $f(x)=2x^2-3x+7$,求:$f(0)$, $f(4)$, $f(a)$, $f(x+1)$.