考研数学复习用书

考研数学复习一本通

数二

周华任 陈玉金 等编

考研要求阐释

考研考点详讲

考研题型归纳

考研真题精选

内容切中肯綮

篇幅不枝不蔓

打磨能力训练

考研一本通达

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

考研数学复习用书

考研数学复习一本通 · 数二

周华任　陈玉金　等编

东南大学出版社
· 南京 ·

图书在版编目(CIP)数据

考研数学复习一本通·数二/周华任等编. —南京：东南大学出版社，2017. 6

ISBN 978－7－5641－7227－5

Ⅰ. ①考… Ⅱ. ①周… Ⅲ. ①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 143471 号

考研数学复习一本通·数二

编　　者	周华任　陈玉金　等
责任编辑	宋华莉
编辑邮箱	52145104@qq. com
出版发行	东南大学出版社
出 版 人	江建中
社　　址	南京市四牌楼 2 号(邮编:210096)
网　　址	http://www. seupress. com
电子邮箱	press@seupress. com
印　　刷	南京京新印刷有限公司
开　　本	700 mm×1 000 mm　1/16
印　　张	17. 25
字　　数	448 千字
版　　次	2017 年 6 月第 1 版　2017 年 6 月第 1 版第 1 次印刷
书　　号	ISBN 978－7－5641－7227－5
定　　价	42. 00 元
经　　销	全国各地新华书店
发行热线	025－83790519　83791830

(本社图书若有印装质量问题，请直接与营销部联系，电话:025－83791830)

前　言

高等数学和线性代数是高等学校工科和经管类各专业的重要基础课程，是学习后续课程及进行科学理论研究与实践的数学基础，也是研究生入学考试的必考科目之一。为此，我们精心组织策划了这本复习辅导用书。

编写本书的目的有两个：一是帮助读者熟练掌握各种题型的解题思路、方法和技巧；二是通过精心选取的考研真题，帮助读者掌握考题的特点、重点和热点，做到知识的系统把握和灵活运用，为研究生入学考试做好准备。

本书由以下几个部分组成：

1. 知识逻辑结构图：将每章知识点列示图表，以便学习掌握。

2. 考研考试内容：列出了各章的主要内容，突出必须掌握或考试中出现频率较高的核心内容。

3. 考研考试要求：列出相应各章的考点内容，给出了相应的考研考试要求说明，以帮助广大同学对相应内容重点把握。

4. 考研考点提要：讲解考点的重要定理、定义、公式及其主要方法，突出核心基础知识和方法技巧。

5. 考研真题精选：精选历年全国研究生入学考试试题中具有代表性的题目进行了详细的解答，这些题目涉及内容广、题型多、技巧性强，可以使广大同学举一反三，触类旁通，开拓解题思路，更好地掌握考试的基本内容、考试题型和解题方法。各种题目的多少反映了考试的热冷程度。

本书由周华任、陈玉金、李喜波、蔡开华、钱岳红、宿兴涛、卢刚、任宝龙编写。

本书主要参考了高等教育出版社出版的《高等数学》(第七版上、下册)(同济大学数学系编)和《线性代数》(第五版)(同济大学数学系编)的部分内容，在此表示感谢。本书还参考了部分参考书及相关数学考研培训网站题库内容，在此一并表示感谢！由于参考内容作者信息及联系方式不详等原因，未能一一联系。如这些作者见到本书，请通过zhouzhu123123123@163.com方式与笔者联系商谈稿酬事宜。

本书可作为硕士研究生入学考试(数学二)的备考用书，也适合于大学工科各专业的学生，由于水平所限，不妥之处在所难免，恳请读者及同行批评指正。

目　　录

第一篇　高等数学

第一章　函数与极限

知识逻辑结构图

- 函数与极限
  - 函数
    - 函数性质:定义域、值域、单调性、有界性、周期性、凹凸性
    - 函数连续性
    - 函数的间断点
      - 第一类间断点
      - 第二类间断点
    - 闭区间上连续函数的性质
      - 有界性
      - 最大值和最小值
      - 介值定理
      - 零点定理
  - 极限
    - 数列极限定义
    - 函数极限定义,函数左右极限定义
    - 极限存在判定方法
      - 单调有界必有极限
      - 夹逼定理
    - 无穷小量,无穷大量
    - 求极限的方法
      - 单调有界准则
      - 夹逼准则
      - 两个重要极限
        - $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$
        - $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$
      - 无穷小量与有界量的乘积还是无穷小量
      - 等价无穷小量代换
      - 利用函数连续性:连续函数在某点的极限值等于该点的函数值
      - 极限运算法则

考研考试内容

函数的概念及表示法,函数的有界性(有界和收敛的关系:存在正数 M,使 $f(x)<M$ 恒成立则有界,不存在 M 则无界;注意与无穷大的区别,如振荡型函数)、单调性、周期性(注意周期函数的定积分性质)和奇偶性(奇偶性的前提是定义域关于原点对称),复合函数(两个函数的定义域和值域之间的关系)、反函数(函数必须严格单调,则存在单调性相同的反函数且与其原函数关于 $y=x$ 对称)、分段函数和隐函数、基本初等函数的性质及其图形,函数关系的建立(应用题).

数列极限(转化为函数极限,单调有界,定积分,夹逼定理)与函数极限(四则变换,无穷小代换,积分中值定理,洛必达法则,泰勒公式)的定义及其性质,函数的左极限与右极限,无穷小(以零为极限)和无穷大(大于任意正数)的概念及其关系,无穷小的性质及无穷小的比较(求导定阶),极限的四则运算(要在各自极限存在的条件下),极限存在的两个准则:单调有界准则和夹逼准则,两个重要极限:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$$

函数连续的概念(点极限存在且等于函数值),函数间断点的类型(第一类(有定义):可去型,跳跃型;第二类(无定义):无穷型,振荡型),初等函数的连续性,闭区间上连续函数的性质(零点定理、介值定理).

考研考试要求

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示法,并会建立简单应用问题中的函数关系式.

2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

3. 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念.

5. 理解极限的概念,理解函数左极限与右极限的概念,以及函数极限存在与左、右极限之间的关系.

6. 掌握极限的性质及四则运算法则.

7. 掌握极限存在的两个准则,并会利用它们求极限,掌握利用两个重要极限求极限的方法.

8. 理解无穷小、无穷大的概念,掌握无穷小的比较方法,会用等价无穷小求极限.

9. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续),会判别函数间断点的类型.

10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理),并会应用这些性质.

考研考点提要

一、函数的极限及其连续性

1. 无穷小(以 0 为极限的量称为无穷小量)

2. 无穷大(实际上是极限不存在的一种形式)

注 无界变量与无穷大量的区别:无穷大量一定是无界变量,但无界变量不一定是无穷大量,例如,$y=f(x)=x\sin x$ 是无界变量,但不是无穷大量. 因为取 $x=x_n=2n\pi+\frac{\pi}{2}$ 时,$f(x_n)=2n\pi+\frac{\pi}{2}$,当 n 充分大时,$f(x_n)$ 可以大于一预先给定的正数 M;但取 $x=x_n=2n\pi$ 时,$f(x_n)=0$.

3. 无穷小的比较

设 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\alpha(x)=0$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\beta(x)=0$.

(1) 若 $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$,则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小,记为 $\alpha(x)=o[\beta(x)]$.

(2) 若 $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$,则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 低阶的无穷小.

(3) 若 $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C(C\neq 0)$,则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶无穷小.

(4) 若 $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$,则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小,记为 $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

(5) 若 $\lim \frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k} = C(C \neq 0), k > 0$,则称 $\alpha(x)$ 为 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷小.

常用的等价形式:

当 $x \to 0$ 时,$\sin x \sim x, \arcsin x \sim x, \tan x \sim x, \arctan x \sim x$,

$$\ln(1+x) \sim x, e^x - 1 \sim x, 1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2, (1+x)^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{n}x$$

4. 函数连续性概念

定义 1　设函数 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内有定义,给 x 在 x_0 处以增量 Δx,相应地得到函数增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. 若极限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0,$$

则称 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续.

定义 2　设函数 $f(x)$ 满足条件:

(1) $f(x)$ 在 x_0 的邻域内有定义;

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在;

(3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$,

则称 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续.

注　一般来讲,证明性的命题用函数连续的定义 1 较方便;判断函数在某点是否连续,尤其是判断分段函数在分界点处是否连续用定义 2 较方便.

定义　若 $f(x)$ 在 (a,b) 内任一点均连续,则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续.

定义　若 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续,在 $x = a$ 处右连续[即 $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$],在 $x = b$ 处左连续[即 $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$],则称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

5. 间断点

定义　若 $f(x)$ 在 x_0 处出现如下三种情形之一:

(1) $f(x)$ 在 x_0 处无定义;

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 不存在;

(3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$,

则称 x_0 为 $f(x)$ 的间断点.

间断点 x_0 的类型:

第 Ⅰ 类间断点是 $f_-(x_0), f_+(x_0)$ 均存在,其中

若 $f_-(x_0) = f_+(x_0) \neq f(x_0)$,则 $x = x_0$ 称为可去间断点.

若 $f_-(x_0) \neq f_+(x_0)$,则 $x = x_0$ 称为跳跃间断点.

第 Ⅱ 类间断点是 $f_-(x_0), f_+(x_0)$ 至少有一个不存在.

若 $f_-(x_0), f_+(x_0)$ 之中至少有一个为 ∞,则 $x = x_0$ 称为无穷间断点.

二、重要公式和定理

定理 1　$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f_-(x_0) = f_+(x_0) = A$.

定理 2　$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$,其中 $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

定理 3　(保号性定理)若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A > 0$(或 $A < 0$),则存在一个 $\delta > 0$,当 $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 且 $x \neq x_0$ 时,$f(x) > 0$[或 $f(x) < 0$].

定理 4　若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A, f(x) > 0$[或 $f(x) < 0$],则 $A \geqslant 0$(或 $A \leqslant 0$).

定理 5 单调有界数列必有极限.

定理 6 （夹逼定理）设在 x_0 的邻域内，恒有 $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x)$，且 $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \psi(x) = A$，则 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

定理 7 无穷小的运算性质：

(1) 有限个无穷小的代数和仍为无穷小；

(2) 有限个无穷小的乘积仍为无穷小；

(3) 无穷小乘以有界变量仍为无穷小.

定理 8 （无穷大与无穷小的关系定理）

在同一变化趋势下无穷大的倒数为无穷小；非“0”的无穷小量之倒数为无穷大.

定理 9 极限的运算法则

设 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = A$，$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} g(x) = B$，

则 (1) $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B$.

(2) $\lim f(x)g(x) = \lim f(x) \lim g(x) = AB$.

(3) $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \dfrac{A}{B}(B \neq 0)$.

考研真题精选

题型 1－1 极限定义及存在性判定

1. 当 $x \to 1$ 时，函数 $\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限 （ ）

(A) 等于 2. (B) 等于 0.

(C) 为 ∞. (D) 不存在但不为 ∞.

【解】 $f(1^-) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}} = \lim\limits_{x \to 1^-}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}} = 2 \times 0 = 0$，而 $f(1^+) = \lim\limits_{x \to 1^+}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}} = +\infty$. 故选(D).

2. 设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n y_n = 0$，则下列判断正确的是 （ ）

(A) 若 x_n 发散，则 y_n 必发散. (B) 若 x_n 无界，则 y_n 必有界.

(C) 若 x_n 有界，则 y_n 必为无穷小. (D) 若 $\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小，则 y_n 必为无穷小.

【解】 由 $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = \lim\limits_{n \to \infty} x_n y_n \cdot \dfrac{1}{x_n} = 0$ 知，y_n 必为无穷小，故选(D).

取 $x_n = (-1)^n$，$y_n = 0$，可排除(A). 取 $x_n = 1,0,3,0,5,0,\cdots$，又取 $y_n = 0,2,0,4,0,6,\cdots$，可排除(B). 取 $x_n = 0$，$y_n = 1$，可排除(C).

3. “对任意给定的 $\varepsilon \in (0,1)$，总存在正整数 N，当 $n \geqslant N$ 时，恒有 $|x_n - a| \leqslant 2\varepsilon$” 是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的 （ ）

(A) 充分条件但非必要条件. (B) 必要条件但非充分条件.

(C) 充分必要条件. (D) 既非充分条件又非必要条件.

【解】 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的定义是：“对任意给定的正数 ε_1，总存在正整数 N_1，当 $n > N_1$ 时，恒有 $|x_n - a| < \varepsilon_1$.” 可以证明（这里不证，因为其证明已经超出考试大纲），这个定义与题中带引号的叙述是等价的. 读者可以根据对数列极限本质的理解，通过逐句对照会发现，两种叙述没有本质差别. 故选(C).

4. 求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

【解】　因$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\dfrac{\sin x}{x}\right)=1$,

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=2-1=1,$$

故　$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)=1$.

5. 设$\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$均为非负数列,且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1,\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$,则必有　(　　)

(A) $a_n<b_n$对任意n成立.　　(B) $b_n<c_n$对任意n成立.

(C) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$不存在.　　(D) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$不存在.

【解】　因为数列的前有限项不影响数列的敛散性,所以对于前有限项可能有$a_n\geqslant b_n,b_n\geqslant c_n$.故排除(A)和(B).

若对任意n,取$a_n=0,c_n=n$,则$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n=0$,极限存在,排除(C).故选(D).

6. 设$\{x_n\}$是数列,下列命题不正确的是　(　　)

(A) 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$.

(B) 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

(C) 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=a$.

(D) 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=a$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

【解】　数列收敛,那么它的任何无穷子列均收敛,所以(A)与(C)正确;一个数列存在多个无穷子列并集且包含原数列所有项,而且这些子列均收敛于同一个值,则原数列是收敛的.(B)正确,(D)错,故选(D).

【解题方法及技巧归纳】

(1) $\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}$型极限在考研试题中多次出现,$\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$,$\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$,因此极限$\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}$不存在.

(2) 极限式中含有绝对值符号时(如第4题),可通过取左、右极限将其去掉.

题型1-2　无穷大与无界判别

1. 函数$f(x)=x\sin x$　(　　)

(A) 当$x\to\infty$时为无穷大.　　(B) 在$(-\infty,+\infty)$内有界.

(C) 在$(-\infty,+\infty)$内无界.　　(D) 当$x\to\infty$时有有限极限.

【解】　当取$x_n=n\pi$时,$f(n\pi)=0$;当取$x_n=(2n-1)\dfrac{\pi}{2}$时,$f(x_n)\to\infty$.故选(C).

2. 当$x\to 0$时,变量$\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$是　(　　)

(A) 无穷小.　　(B) 无穷大.

(C) 有界的,但不是无穷小量.　　(D) 无界的,但不是无穷大.

【解】　当取$x_n=\dfrac{1}{n\pi}$时,$f(x_n)=0$;当取$x_n=\dfrac{1}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}$时,$f(x_n)\to\infty$.故选(D).

【解题方法及技巧归纳】

用无穷大的定义和无界的定义来区别这两个概念.

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\infty$是指在$x=0$处的充分小邻域内,对于所有的$x$,$f(x)$都可以任意大;而"无界"不

要求"所有的 x",只要有其中某个子列,使得其极限为无穷大即可.

题型 1-3 $\frac{\infty}{\infty}$ 型极限

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-e^{\frac{1}{x}}}{x+e^{\frac{1}{x}}}$.

【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\left(\dfrac{1}{e^{\frac{1}{x}}}-1\right)}{\left(\dfrac{x}{e^{\frac{1}{x}}}+1\right)}=-1$.

2. 求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}\sqrt{4x^2+x-1}+1+\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{x}\sqrt{x^2+\sin x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+1+\dfrac{1}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{\sin x}{x^2}}}=1$.

【解题方法及技巧归纳】

注意以下公式的应用.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}=\begin{cases}0, & 当\ m<n\ 时,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & 当\ m=n\ 时,\\ \infty, & 当\ m>n\ 时.\end{cases}$$

式中 $a_0\neq0,b_0\neq0$.

题型 1-4 含根式差的极限

1. 求 $\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{x^2+100}+x)$.

【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{100x}{\sqrt{x^2+100}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{100x}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\dfrac{100}{x^2}}-x}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{100x}{-x\sqrt{1+\dfrac{100}{x^2}}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{100}{-\left(\sqrt{1+\dfrac{100}{x^2}}+1\right)}=-50$.

2. 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\ln(1+x)-x^2}$.

【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\left\{\dfrac{\tan x-\sin x}{x[\ln(1+x)-x]}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}}\right\}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x(1-\cos x)}{x[\ln(1+x)-x]}$

$=\dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\ln(1+x)-x}=\dfrac{1}{4}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{\dfrac{-x}{1+x}}=-\dfrac{1}{2}$.

3. 求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2+x-2}$.

【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(3-x)-(1+x)}{(x-1)(x+2)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-2}{(x+2)(\sqrt{3-x}+\sqrt{1+x})}=-\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

【解题方法及技巧归纳】

当极限式中含有根式差时，通常需要将其有理化.

题型 1-5　无穷小代换

1. $\lim\limits_{x\to 0}x\cot 2x=$ ________.

【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan 2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2x}=\dfrac{1}{2}$.

2. 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$.

【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos x}{x(1-\cos\sqrt{x})(1+\sqrt{\cos x})}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x\cdot\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2(1+\sqrt{\cos x})}=\dfrac{1}{2}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$ ________.

【解】 原式 $=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x}{x}+\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}x\cos\dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{2}$.

4. 若 $x\to 0$ 时，$(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1$ 与 $x\sin x$ 是等价无穷小，则 $a=$ ________.

【解】 $1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-ax^2)^{\frac{1}{4}}-1}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{4}ax^2}{x\cdot x}=-\dfrac{1}{4}a$，故 $a=-4$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}=$ ________.

【解】 原极限 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\cos x-1)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$.

【解题方法及技巧归纳】

无穷小代换是简化极限式最重要的方法. 无穷小代换常见有下列 10 个公式：

(1) $\sin x\sim x$；　(2) $\tan x\sim x$；　(3) $\arcsin x\sim x$；

(4) $\arctan x\sim x$；　(5) $1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$；　(6) $\ln(1+x)\sim x$；

(7) $e^x-1\sim x$；　(8) $a^x-1\sim x\ln a$；　(9) $\sqrt{1+x}-1\sim\dfrac{1}{2}x$；

(10) $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$（$\alpha$ 为实数）. 上述都要求 $x\to 0$

有两点注意事项：

(1) 只能在乘、除运算中使用无穷小代换，不能在加、减运算中使用. 例如，下列代换（$\sin x$ 被 x 代换）是错误的：

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^3}=0.$$

(2) 在上述 10 个公式中，x 位置可以是任意无穷小函数.

题型 1-6　∞^0 型极限计算

求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\tan x}$.

【解】 原式 $=\exp\left(\lim\limits_{x\to 0^+}\tan x\cdot\ln\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=\exp\left(-\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x\right)=e^0=1$.

题型 1－7　求 1^∞ 型极限

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-2}{n+1}\right)^n=$ ________.

【解】 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{n+1}\right)^{-\frac{n+1}{3}\left(-\frac{3}{n+1}\right)n}=\mathrm{e}^{-3}$

2. 求 $\lim\limits_{x\to 0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$.

【解】 原式 $=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x+\cos x-1}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x}{x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}}=\mathrm{e}^2$.

3. 设 a 为非零常数，则 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=$ ________.

【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}\cdot\frac{2a}{x-a}\cdot x}=\mathrm{e}^{2a}$.

4. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=9$，求常数 a.

【解】 左式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}\cdot\frac{2a}{x-a}\cdot x}=\mathrm{e}^{2a}$. 由 $\mathrm{e}^{2a}=9$ 得 $a=\ln 3$.

5. 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}$.

【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{x+6}\right)^{-\frac{x+6}{3}\cdot\left(-\frac{3}{x+6}\right)\cdot\frac{x-1}{2}}=\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=$ ________.

【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{2}{\sin x}\ln(1+3x)}=\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{2\cdot 3x}{x}}=\mathrm{e}^6$.

7. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$，则 $a=$ ________.

【解】 左边 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{3a}\cdot\frac{3a}{x-a}\cdot x}=\mathrm{e}^{3a}=8$，故 $a=\ln 2$.

题型 1－8　无穷小阶的比较

1. 设 $x\to 0$ 时，$\mathrm{e}^{\tan x}-\mathrm{e}^x$ 与 x^n 是同阶无穷小，则 n 为　(　　)

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.

【解】 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{\tan x}-\mathrm{e}^x}{x^n}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^{\tan x-x}-1)}{x^n}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^n}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2 x-1}{nx^{n-1}}$

$$=\frac{1}{n}\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{x^{n-1}}=\frac{1}{n}\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^{n-1}}=\frac{1}{n}\lim_{x\to 0}x^{3-n}.$$

为使此极限等于常数，只能 $n=3$. 故选(C).

2. 已知当 $x\to 0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小，则常数 $a=$ ________.

【解】 由 $1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{3}ax^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-\dfrac{2}{3}a$，得 $a=-\dfrac{3}{2}$.

3. 设当 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小，而 $x\sin x^n$ 是比 $(\mathrm{e}^{x^2}-1)$ 高阶的无穷小，则正整数 n 等于　(　　)

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.

【解】 因为 $(1-\cos x)\ln(1+x^2)\sim\dfrac{1}{2}x^4$，$x\sin x^n\sim x^{n+1}$，$\mathrm{e}^{x^2}-1\sim x^2$，所以 $n+1=3$，故选(B).

4. 设 $\cos x-1=x\sin\alpha(x)$，其中 $|\alpha(x)|<\frac{\pi}{2}$，则当 $x\to 0$ 时，$\alpha(x)$ 是 ( )

(A) 比 x 高阶的无穷小. (B) 比 x 低阶的无穷小.
(C) 与 x 同阶但不等价的无穷小. (D) 与 x 是等价的无穷小.

【解】 因为 $\cos x-1=x\sin\alpha(x)$，$\cos x-1\sim-\frac{1}{2}x^2$，所以 $x\sin\alpha(x)\sim-\frac{1}{2}x^2$.

而 $\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$，故 $\alpha(x)\sim-\frac{1}{2}x$，所以 $\alpha(x)$ 与 x 是同阶但不等价的无穷小，故选(C).

5. 当 $x\to 0$ 时，用"$o(x)$"表示比 x 高阶的无穷小，则下列式子中错误的是 ( )

(A) $x\cdot o(x^2)=o(x^3)$. (B) $o(x)\cdot o(x^2)=o(x^3)$.
(C) $o(x^2)+o(x^2)=o(x^2)$. (D) $o(x)+o(x^2)=o(x^2)$.

【解】 (A) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot o(x^2)}{x^3}=0$，所以 $x\cdot o(x^2)=o(x^3)$.

(B) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{o(x)\cdot o(x^2)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{o(x)}{x}\cdot\frac{o(x^2)}{x^2}\right]=0$，所以 $o(x)\cdot o(x^2)=o(x^3)$.

(C) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{o(x^2)+o(x^2)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{o(x^2)}{x^2}+\frac{o(x^2)}{x^2}\right]=0$，所以 $o(x^2)+o(x^2)=o(x^2)$.

(D) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{o(x)+o(x^2)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{o(x)}{x}+\frac{o(x^2)}{x}\right]=0$，所以 $o(x)+o(x^2)=o(x)$.

故选(D).

6. 当 $x\to 0^+$ 时，若 $\ln^\alpha(1+2x)$，$(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 均是比 x 高阶的无穷小，则 α 的取值范围是 ( )

(A) $(2,+\infty)$. (B) $(1,2)$. (C) $\left(\frac{1}{2},1\right)$. (D) $\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

【解】 由定义 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln^\alpha(1+2x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(2x)^\alpha}{x}=\lim\limits_{x\to 0}2^\alpha x^{\alpha-1}=0$，

所以 $\alpha-1>0$，故 $\alpha>1$.

当 $x\to 0^+$ 时，$(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}\sim\frac{x^{\frac{2}{\alpha}}}{2^{\frac{1}{\alpha}}}$ 是比 x 高阶的无穷小，所以 $\frac{2}{\alpha}-1>0$，即 $\alpha<2$.

故选(B).

【解题方法及技巧归纳】

无穷小 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 阶的比较主要是计算极限 $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$，再根据极限值得出结论.

题型 1-9 极限式中参数的确定

已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$，其中 a,b 是常数，则 ( )

(A) $a=1,b=1$. (B) $a=-1,b=1$.
(C) $a=1,b=-1$. (D) $a=-1,b=-1$.

【解】 由题设，$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2-(a+b)x-b}{x+1}=0$，必有 $1-a=0$，$a+b=0$，得 $a=1,b=-1$，故选(C).

题型 1-10 极限存在准则及其应用

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)=$ ______.

【解】 根据夹逼定理，有

$$\frac{i}{n^2+n+n}\leqslant\frac{i}{n^2+n+i}\leqslant\frac{i}{n^2+n+1},\qquad i=1,2,\cdots,n.$$

对 i 从 1 至 n 求和,得

$$\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+n+i}\leqslant\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}.$$

令 $n\to\infty$,两端数学式的极限均为$\frac{1}{2}$,故所求极限为$\frac{1}{2}$.

2. 设 $x_1=10,x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}\,(n=1,2,\cdots)$,试证数列$\{x_n\}$的极限存在,并求此极限.

【证】 由 $x_1=10$ 及 $x_2=\sqrt{6+x_1}=\sqrt{16}=4$ 知 $x_1>x_2$. 设对某正整数 k 有 $x_k>x_{k+1}$,则有

$$x_{k+1}=\sqrt{6+x_k}>\sqrt{6+x_{k+1}}=x_{k+2},$$

故由归纳法知,对一切正整数 n,都有 $x_n>x_{n+1}$,即$\{x_n\}$为单调减少数列. 又显见 $x_n>0(n=1,2,\cdots)$,即$\{x_n\}$有下界. 根据极限存在准则知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

因此可设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则有 $a=\sqrt{6+a}$ 成立,从而 $a^2-a-6=0$,解得 $a=3,a=-2$,但因$x_n>0$ $(n=1,2,\cdots)$,所以 $a\geqslant0$,舍去 $a=-2$,得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$.

3. 设 $0<x_1<3,x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}\,(n=1,2,\cdots)$,证明数列$\{x_n\}$的极限存在,并求此极限.

【证】 只需证明数列$\{x_n\}$单调有界.

(1) 有界性. 由 $0<x_1<3$ 知 $x_1,3-x_1$ 均为正数,因此有

$$0<x_2=\sqrt{x_1(3-x_1)}\leqslant\frac{1}{2}(x_1+3-x_1)=\frac{3}{2}.$$

设 $0<x_k\leqslant\frac{3}{2}(k>1)$,则 $0<x_{k+1}=\sqrt{x_k(3-x_k)}\leqslant\frac{1}{2}(x_k+3-x_k)=\frac{3}{2}$.

由数学归纳法知,对任意正整数 $n>1$ 均有 $0<x_n\leqslant\frac{3}{2}$,因而数列$\{x_n\}$有界.

(2) 单调性. 当 $n\geqslant1$ 时,$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\sqrt{x_n(3-x_n)}}{x_n}=\sqrt{\frac{3}{x_n}-1}\geqslant\sqrt{2-1}=1$.

因而有 $x_{n+1}\geqslant x_n(n>1)$,即数列$\{x_n\}$单调增加. 这就证明了$\{x_n\}$的极限存在.

(3) 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,在 $x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}$ 两边取极限,得 $a=\sqrt{a(3-a)}$,由此解得 $a=\frac{3}{2},a=0$(舍去). 故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{3}{2}$.

题型 1-11 函数特性的判别

1. $f(x)=|x\sin x|e^{\cos x}(-\infty<x<+\infty)$ 是 ( )

(A) 有界函数. (B) 单调函数. (C) 周期函数. (D) 偶函数.

【解】 $|x\sin x|,e^{\cos x}$ 均为偶函数,其乘积仍为偶函数. 故选(D).

2. 已知 $f(x)=e^{x^2},f[\varphi(x)]=1-x$ 且 $\varphi(x)\geqslant0$,求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域.

【解】 由 $e^{[\varphi(x)]^2}=1-x$,得 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$. 由 $\ln(1-x)\geqslant0$,得 $1-x\geqslant1$,即 $x\leqslant0$. 因此 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)},x\leqslant0$.

题型 1-12 分段函数值的计算

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f[f(x)]=$ ________.

【解】 由于对任意实数 x 均有 $|f(x)|\leqslant1$,所以 $f[f(x)]=1$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x^2+x, & x>0,\end{cases}$ 则 $f(-x)$ 等于　　(　　)

(A) $f(-x)=\begin{cases}-x^2, & x\leqslant 0,\\ -(x^2+x), & x>0.\end{cases}$　　(B) $f(-x)=\begin{cases}-(x^2+x), & x<0,\\ -x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$

(C) $f(-x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x^2-x, & x>0.\end{cases}$　　(D) $f(-x)=\begin{cases}x^2-x, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$

【解】 $f(-x)=\begin{cases}(-x)^2, & -x\leqslant 0,\\ (-x)^2+(-x), & -x>0.\end{cases}$

$=\begin{cases}x^2-x, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$

故选(D).

题型 1 - 13　函数连续性

1. 若 $f(x)=\begin{cases}e^x(\sin x+\cos x), & x>0,\\ 2x+a, & x\leqslant 0\end{cases}$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数，则 $a=$ ________.

【解】 由 $\lim\limits_{x\to 0^+}e^x(\sin x+\cos x)=1$，$\lim\limits_{x\to 0^-}(2x+a)=a$，得 $a=1$.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}a+bx^2, & x\leqslant 0,\\ \dfrac{\sin bx}{x}, & x>0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则常数 a 与 b 应满足的关系是________.

【解】 由 $\lim\limits_{x\to 0^-}(a+bx^2)=a$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin bx}{x}=b$，得知 $a=b$.

3. 已知 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ ________.

【解】 $a=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$.

4. 设函数 $f(x)=\dfrac{x}{a+e^{bx}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，且 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$，则常数 a,b 满足　　(　　)

(A) $a<0,b<0$.　　(B) $a>0,b>0$.

(C) $a\leqslant 0,b>0$.　　(D) $a\geqslant 0,b<0$.

【解】 当 $b>0$ 且 $x\to-\infty$ 时，$e^{bx}\to 0$，从而 $f(x)\not\to 0$，因此 $b<0$，排除(B)和(C). 又因为 $e^{bx}>0$，为使 $f(x)=\dfrac{x}{a+e^{bx}}$ 到处连续，只能 $a\geqslant 0$，故选(D).

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}, & x>0,\\ ae^{2x}, & x\leqslant 0\end{cases}$ 若在 $x=0$ 处连续，则 $a=$ ________.

【解】 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{-\tan x}{\dfrac{x}{2}}=-2=f(0^+)$，$f(0^-)=f(0)=a$，若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=-2$.

【解题方法及技巧归纳】

判定 $f(x)$ 在点 a 处的连续性通常采用两种方法：

(1) 使用定义：$\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$.

(2) 使用充要条件：$f(a^-)=f(a^+)=f(a)$.

题型 1-14　函数的间断点及其类型的确定

1. 设 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0,\\ f(0), & x=0,\end{cases}$ 其中 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，$f'(0)\neq 0$，$f(0)=0$，则 $x=0$ 是 $F(x)$ 的　　(　　)

(A) 连续点.　　(B) 第一类间断点.

(C) 第二类间断点.　　(D) 连续点或间断点不能由此确定.

【解】 $\lim\limits_{x\to 0}F(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=f'(0)\neq 0=f(0)=F(0)$，故选(B).

2. 设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，$f(x)$ 为连续函数，且 $f(x)\neq 0$，$\varphi(x)$ 有间断点，则　　(　　)

(A) $\varphi[f(x)]$ 必有间断点.　　(B) $[\varphi(x)]^2$ 必有间断点.

(C) $f[\varphi(x)]$ 必有间断点.　　(D) $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点.

【解】 若 $F(x)=\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 为连续函数，则 $\varphi(x)=f(x)F(x)$ 必连续，矛盾. 故选(D).

3. 求函数 $f(x)=(1+x)^{x/\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}$ 在区间 $(0,2\pi)$ 内的间断点，并判断其类型.

【解】 $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 内的间断点为 $x=\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4},\dfrac{7\pi}{4}$.

当 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 时，$f\left(\dfrac{\pi}{4}^{+}\right)=+\infty$，当 $x=\dfrac{5\pi}{4}$ 时，$f\left(\dfrac{5}{4}\pi^{+}\right)=+\infty$，故 $x=\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}$ 为第二类(或无穷)间断点.

当 $x=\dfrac{3\pi}{4}$ 时，$\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}}f(x)=1$，当 $x=\dfrac{7\pi}{4}$ 时，$\lim\limits_{x\to\frac{7\pi}{4}}f(x)=1$，故 $x=\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{7\pi}{4}$ 为第一类(或可去)间断点.

4. 求极限 $\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$，记此极限为 $f(x)$，求函数 $f(x)$ 的间断点并指出其类型.

【解】 $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\exp\left(\dfrac{x}{\sin t-\sin x}\ln\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)=\lim\limits_{t\to x}\exp\left[\dfrac{x\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}-1\right)}{\sin t-\sin x}\right]$

$$=\lim_{t\to x}\exp\left[\frac{x(\sin t-\sin x)}{\sin x(\sin t-\sin x)}\right]=e^{\frac{x}{\sin x}}.$$

间断点为 $x=k\pi(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$.

因为 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{x}{\sin x}}=e$，所以 $x=0$ 为第一类(或可去)间断点，其余间断点属于第二类(或无穷)间断点.

5. 设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)x}{nx^2+1}$，则 $f(x)$ 的间断点为 $x=$ ________.

【解】 当 $x\neq 0$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)x}{x^2+\dfrac{1}{n}}=\dfrac{1}{x}$；

当 $x=0$ 时，$f(x)=0$.

则　$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, x\neq 0;\\ 0, x=0.\end{cases}$

故间断点为 $x=0$.