

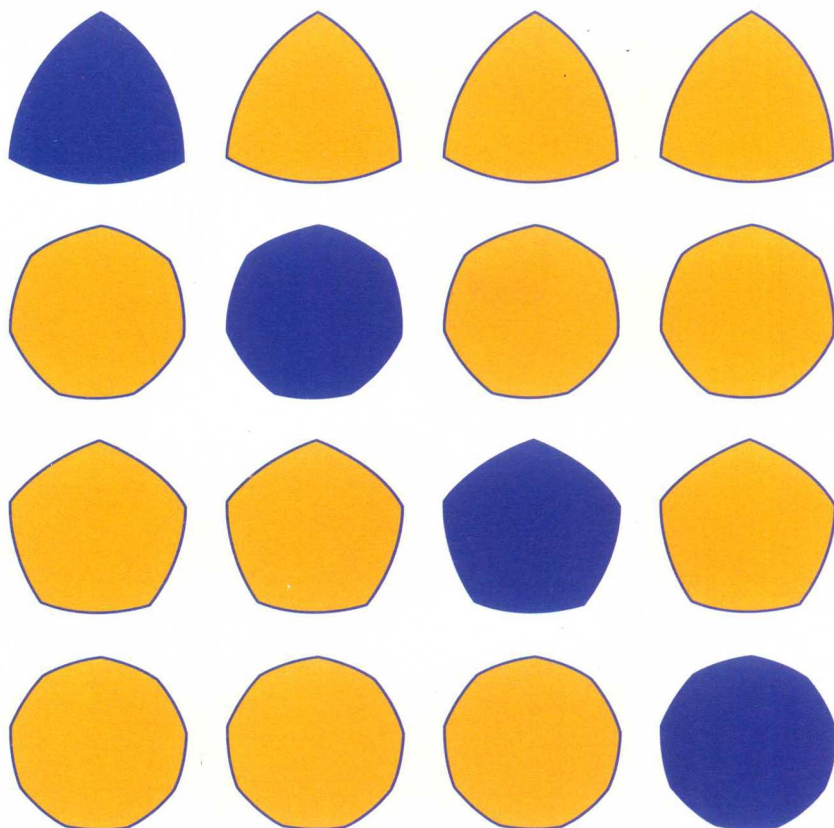
〔日〕神永正博

著

孙庆媛

译

Masahiro
Kaminaga



直感を裏切る数学

解析直觉与谎言

数学
思考法

TURING 图灵新知

解析直觉与谎言

Masahiro
Kaminaga

直感を裏切る数学

「思い込み」
にだまされない数学的思考法

「日」神永正博
孙庆媛
译
著

数学思考法

人民邮电出版社
北京

图书在版编目(CIP)数据

数学思考法:解析直觉与谎言/(日)神永正博著;
孙庆媛译.--北京:人民邮电出版社,2018.3

(图灵新知)

ISBN 978-7-115-47110-9

I. ①数… II. ①神… ②孙… III. ①数学—普及读
物 IV. ①O1-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第260125号

内 容 提 要

本书为讲解“数学思考法”的通俗科普读物,书中通过用数学思维解析实际生活案例、公众认知中的错误直觉、数学经典名题等方式,由浅入深地传授了分析数据信息价值、辨别谎言、拆解转化复杂问题、抓住事物本质的思考之法,同时讲解了相关的数学知识与理论,可以有效提高理性思维、判断与解决问题能力,对于理解数学、培养数学兴趣亦有有益启示。

-
- ◆ 著 [日]神永正博
译 孙庆媛
责任编辑 武晓宇
装帧设计 broussaille 私制
责任印制 周昇亮
- ◆ 人民邮电出版社出版发行 北京市丰台区成寿寺路11号
邮编 100164 电子邮件 315@ptpress.com.cn
网址 <http://www.ptpress.com.cn>
北京隆昌伟业印刷有限公司印刷
- ◆ 开本: 880×1230 1/32
印张: 9.25
字数: 172千字 2018年3月第1版
印数: 1-4000册 2018年3月北京第1次印刷
著作权合同登记号 图字: 01-2016-2840号
-

定价: 49.00元

读者服务热线: (010)51095186转600 印装质量热线: (010)81055316

反盗版热线: (010)81055315

广告经营许可证: 京东工商广登字20170147号

前言

在科学的殿堂中，攀登愈高愈能得见前所未闻之真理。

——粒子物理学家卡罗·鲁比亚 (Carlo Rubbia)

我们这一代日本人生活在一个看不到未来的灰暗时代。人口老龄化、低生育率、人口数量减少、能源危机，种种问题都在冲击着日本社会，使得长久以来形成的社会秩序逐步走向崩溃。

而在另一个世界，前沿数学研究的未来也同样模糊不清。为了探索那些尚未被人所窥知的真理，数学家们必须不断地发起挑战，去证明那些常人根本无法想象的数学定理。

数学研究和现实社会，乍一听好像是两个完全不相干的世界。但是，在某种意义上，也可以认为两者都处于同样的境遇。这两个世界所面临的问题，都是无法仅仅用迄今为止人们所积累的学识和经验就可以解决的。

当人们谈论那些天才数学家时，经常会冠之以“天赋”“神秘的直觉”等美誉。关于数学的讨论中也尽是诸如“搞数学的有没有天

分最重要”“做数学研究得有那种感觉才行”等论调。你的身边应该也有一些悲观的家长吧，他们总是觉得“我家孩子根本就不是学数学的那块料……”

但是，在我看来，这些都不过只是些宣传口号罢了。“天分”“感觉”等，说这话的人都是事后诸葛亮。那些被称为“直觉”的灵光一闪，不过是早已得出答案的当事者的事后说明而已。他们其实早已窥见了解决问题的正确途径，只不过是换种说法，把解决的过程称为“直觉”。当你真正面对那些无法解答的问题时，我想这种神乎其神的所谓“直觉”的力量，根本不会有什么帮助吧！

真正的天才，并不是说他有才华就会大放光彩，能够受人瞩目一定是因为他进行了大量的思考和研究工作。在数学的领域里，没有所谓“直觉”这样的捷径。最终能够通往正确答案的唯一道路，就是要有韧性，要不断地反复去思考问题之所在，耐心地追寻其中的逻辑。

按照这个道理来说，我觉得，即使是普通人也有可能实现破解难题的壮举。无论话语出自多么伟大的人之口，错的就是错的；即使是幼小的孩童说的，对的也永远是对的。在数学面前，威权主义也无能为力！世界上还有比这更直白的吗？

今天的日本，之所以能够跨入发达国家之列，有赖于不断借鉴其他发达国家的发展经验，并加以改良。不过，发展到现在，日本

已经成为别国借鉴的对象，而其本身的发展前景，则再也找不到可以学习的范本了。但是，只要还存在一群能够理性思索那些有悖于直觉的事情的人，那么我们就还是可以期待，这个国家能够在未来开启新的篇章。而那些乍一看“颠覆直觉”的理念，也很有可能会成为解决我们当下问题的关键。

数学研究对所有人来说都是平等的。同样，在解决社会问题这方面，也只有认真努力、不断积累，才可能开启通往下一个时代之门。希望读者阅读本书时，在体验用数学思考法解决各种“颠覆直觉的问题”的同时，也能够获得这样的认知。如此，作为本书作者的我就颇感欣慰了。

致读者

本书由 20 个主题构成。每个主题都以数学爱好者“X 先生”的日记作为引线进行展开。每一篇日记中，X 先生都会就某个数学话题表达自己的意见，但是他的表述中一定存在一些错误的理解。请大家在阅读每一节开篇的日记时，也尝试去寻找一下他的错误。

目录

第一章	颠覆直觉的数据	001
	比率的魔法棒	002
	“平均”的日本人	017
	贝叶斯定理	028
	齐普夫定律	041
	本福特定律	057
第二章	颠覆直觉的概率	073
	惊人的“同月同日生”	074
	飞镖游戏之谜	091
	你不知道的排队这件事	103
	反正弦理论	117
	蒲丰投针实验	129
第三章	颠覆直觉的图形	143
	井盖与 50 便士	144
	鲁珀特亲王之问	153
	线段的旋转之舞	166
	托里拆利小号	178
	色彩的难题	190

第四章 颠覆直觉的定理 201

空间填充曲线 202

帕隆多悖论 213

蒙提·霍尔的陷阱 228

关于“无限”的故事 239

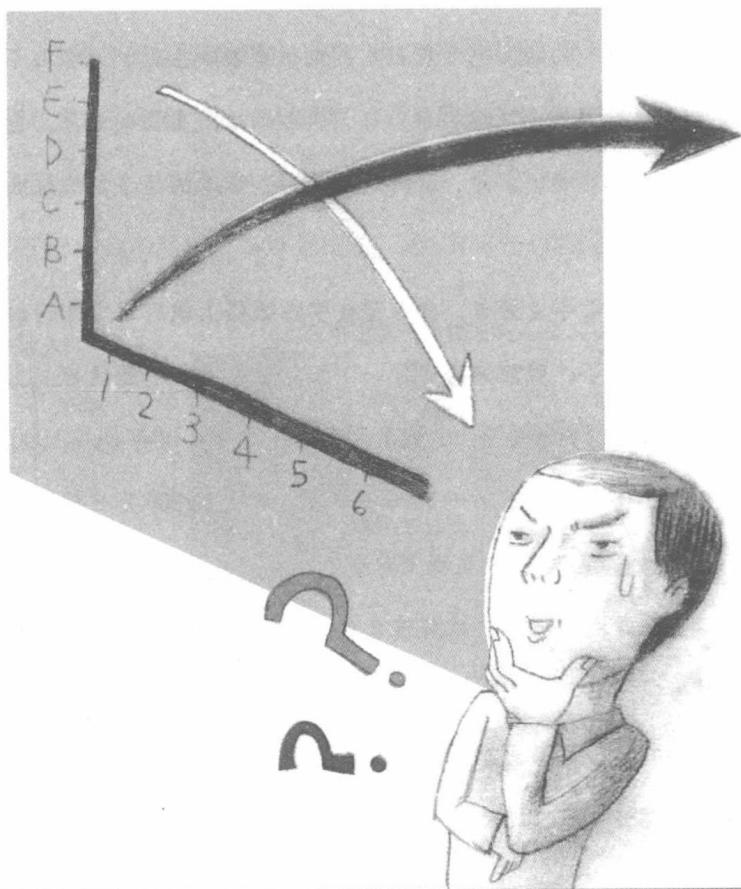
连续统假设 251

后记 269

尾注 272

第一章

颠覆直觉的数据



比率的魔法棒

4月2日

作为一名新入职的员工，最大的愿望就是不会被公司裁掉。现在，经济不景气的新闻充斥着日本的电视节目和报纸，日本的年轻人置身于这样的社会环境之中，每天听到的尽是负面的消息，也难怪他们提不起精神。但是，认真思考的话，日本的经济真的那么不景气吗？

作为一位数学爱好者，我希望能够在数据上找到这个结论的根据。这种情况下，就应该去查证一下统计数据了。于是我马上上网查询，在某位网友的博客上，我看到了这样的内容：“年收入1000万日元以上、年收入500万~1000万日元、年收入500万日元以下的三个阶层，人均年收入均呈现上升趋势。”

这是不是可以说明日本经济已经复苏了呢？日本不但没有变得越来越穷，反而变得更加富有了才对吧？

寒冬将尽，春日可期。日本经济的漫长冬季已经过去，我们也终于可以迎接春天的到来了！

怪！经济不景气时人均收入反而增长？

在当今信息社会，充斥着形形色色的新闻消息。普通人要从其中分辨出哪些是真新闻，哪些是编造出来的谎言，并非易事。为此，我们要先读懂关键的统计数据，再逐步展开对消息真伪的分析。

为使分析过程更简明易懂，我们先简单地把某国的国民划分为“高收入群体”和“低收入群体”（两类群体的分界点是年收入 500 万日元）。假设这个国家一共由 4 个人组成，他们的年收入分别是 1400 万日元、600 万日元、300 万日元、200 万日元（图 1）。

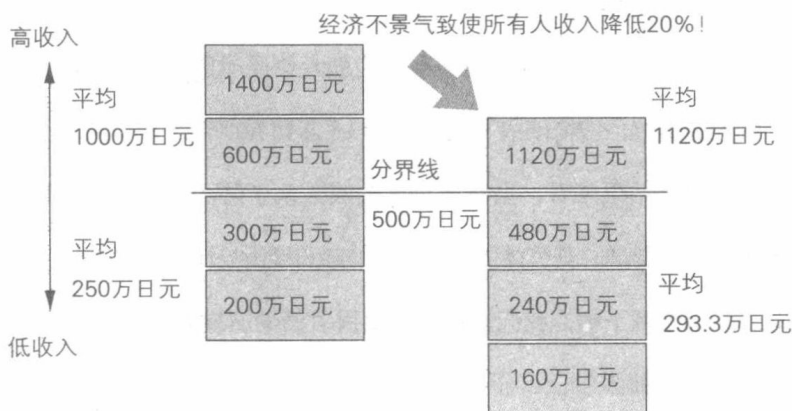


图 1 经济不景气但人均所得却增长的情形

在这种设定之下，可以计算得出各个群体年收入的平均值，即

高收入群体的平均值为 1000 万日元，低收入群体的平均值为 250 万日元。

但是，在经济不景气的情况下，所有人的收入都减少了 20%。于是，高收入群体中相对收入较低的、年收入 600 万日元的人就不再符合标准，需要被划分到低收入群体中进行统计。

现在，让我们看一下变动之后各群体年收入平均值的变化。高收入群体中只剩下原本年收入为 1400 万日元的统计对象，即使减掉 20%，他的年收入仍有 1120 万日元。因为这个群体只有一个样本，所以平均值自然也是 1120 万日元。另一方面，低收入群体中增加了一个样本，统计对象增加为 3 人。原本年收入为 600 万日元的统计对象，减掉 20% 后年收入为 480 万，但在低收入群体中已经是最高的收入水平了。因此，该统计对象的加入拉高了整个低收入群体的年收入平均值，使得该数字上升为 293.3 万日元。

从这个结果来看，虽然所有人的收入都下降了 20%，但是列入统计的两个群体，其整体的年收入平均值却都是上升的。

在这个例子中，我们是有意地使用了极少的样本进行统计分析，但是在现实社会中，当社会经济陷入严重恶化的困境时，确实会出现一些类似的看似矛盾的情形，例如，在各个群体的年收入平均值上升的同时，贫困人口的比例也在增加。

当然也存在与此相反的情形，例如，即便各群体的年收入平均

值有所下降，但如果高收入群体所占比例有所增加，社会整体的年收入平均值也会上升。这种现象常常可以在处于快速发展的经济体中看到。

这种现象的产生，具体来说，是因为随着收入的提高，低收入群体中的一部分人被列入了高收入群体的统计范围，但是相对于既有的样本，这些新列入的样本值都比较低，因而导致高收入群体整体的年收入平均值被拉低。与此同时，低收入群体的年收入平均值也降低了。原因在于那些转移到高收入群体的统计范围的样本人群，原本在低收入群体的样本中都属于收入较高的一群人，他们的转移使得群体整体的平均值下降。

就结论而言，从整体上看，高收入群体在社会成员中所占的比例有所提升，表示整个社会应当是更加富裕了。但从数据上，我们却只能看到两个群体的年收入平均值都呈下降的趋势。在这种情况下，统计数据很容易产生误导。

在本节开头部分的日记中，X先生写道：“三个阶层，人均年收入均呈现上升趋势。”但是我们要说，仅凭这一点还不足以断言日本的经济已经复苏。也许乍一看，有人会觉得我们的质疑根本没什么道理，但是如果他读过上文中的分析，就会了解原因之所在。

在某个条件下的两组数据，分别讨论时都会满足某种性质，可是一旦合并考虑，却可能导致相反的结论。在数学领域中，这种

现象被称为辛普森悖论 (Simpson's Paradox)。这个理论是由英国统计学家 E.H. 辛普森 (E.H. Simpson) 在 1951 年发表的论文 “The Interpretation of Interaction in Contingency Tables” 中正式提出的¹。

平均值的陷阱

我们还可以举另外一个例子来说明这种现象。

假设我们分别对美国本地学生、赴美留学生两个群组进行英语水平测试，得到了表 1 的结果。测试的满分成绩为 100 分，统计数据采用的是两个群组各自的平均分。当然这个案例中的数据都是虚构的，但是不影响我们的分析。

表 1 英语水平测试成绩统计

	1990 年	2010 年	成绩变化
美国本地学生平均分	90	94	+4
赴美留学生平均分	60	70	+10
整体平均分	84	82	-2

将 1990 年的测试成绩与 2010 年的数据进行对比，我们可以发现，美国本地学生和赴美留学生两个群组的平均成绩都分别增长了 4 分、10 分。从这个结果上看，大家可能都会同意下面的结论——两个群组的学生，在这 20 年间英语水平都得到了提升。

但是，别急着下结论，我们再看一下整体的平均成绩，可以看到 2010 年比 1990 年下降了 2 分。这个结果似乎和我们的理解不太一致，这中间到底是哪里出错了呢？

其实，这里面并没有什么错误，这种违背我们直觉的现象，在现实生活中也很有可能出现。

在这个案例中，很重要的一点是要弄清楚接受测试的美国本地学生和赴美留学生的人数比重。为了方便计算，我们在这里把两个群组的总人数设定为 100 人。那么在 1990 年进行测试时，接受测试的美国本地学生应为 80 人，留学生为 20 人，这样就可以根据以下算式得出整体平均分为 84 分。

$$\frac{90 \times 80 + 60 \times 20}{100} = 84$$

与此相对，在 2010 年的测试中，美国本地学生人数应当为 50 人，留学生也是 50 人，这样就能计算得出整体平均分为 82 分。

$$\frac{94 \times 50 + 70 \times 50}{100} = 82$$

从英语测试的成绩来看，无论是 1990 年，还是 2010 年，结果都是“美国本地学生得分 > 赴美留学生得分”。从人数上看，1990 年的测试中，美国本地学生人数达 80 人之多，而接受测试的留学生只有 20 人。也就是说，1990 年的测试中，成绩较好的群组（美国本地学生）人数居多，成绩较差的群组（赴美留学生）人数较少。而到了

2010年，成绩较好的美国本地学生群组人数减少到了50人，成绩较差的留学生群组人数增加到了50人。

所以，尽管两个群组的平均成绩在20年后的测试中都上升了，但这种上升幅度并没有抵消“成绩较好的群组”，即美国本地学生的样本人数减少所带来的影响，从而导致在整体平均分上，2010年反而下降了2分（图2）。

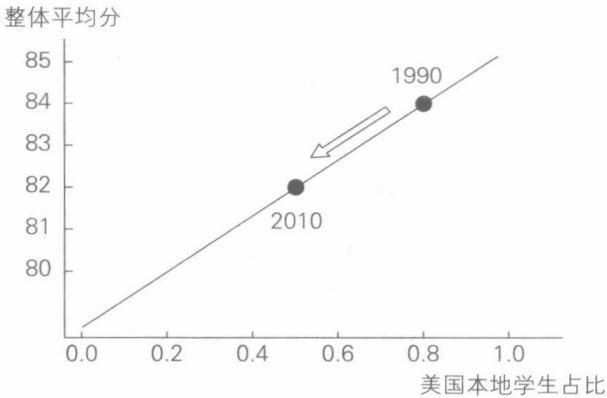


图2 美国本地学生占比与整体平均分的关系

这个案例和前文中人均年收入的例子其实是同样的道理。如果我们把1990年两个学生群组的人数比重颠倒过来，即本地学生20人，留学生80人，就可以产生另一个看似矛盾的案例：两个群组的平均分都有所下降，但整体的平均分却呈现上升趋势。

关于新生儿体重的悖论

“新生儿体重悖论”是辛普森悖论研究中的一个重要案例。在对新生儿体重的统计上，究竟在哪些方面形成了悖论呢？悖论又是如何形成的？这将是我們接下来所要探讨的问题。

《美国流行病学杂志》²上曾经刊登过一篇关于新生儿出生时体重的研究论文。在该论文中，如表 2 所示，研究者把研究对象划分为 A、B 两组，A 组新生儿的母亲没有吸烟行为，B 组新生儿的母亲存在吸烟行为，然后对这两组新生儿的体重和死亡率进行统计和对比。在本书中，我们把 A 组称为“低风险群组”、B 组称为“高风险群组”。死亡率用“‰”，也就是千分率来表示，表 2 中给出的正是 1000 名新生儿中的死亡人数。按照新生儿出生时的体重数据，以每 500 克作为刻度间距，我们将所有统计对象分为出生时体重小于 1000 克、1000 克~ 1500 克、1501 克~ 2000 克等多个范围。