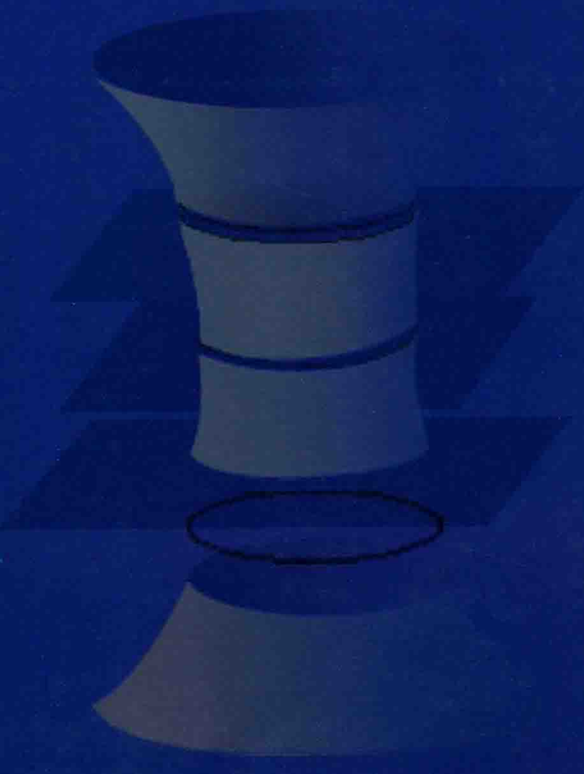
高等数学学习辅导

Higher Mathematics Learning Guidance

■ 主编　马铭福　亓 健　费祥历



中国石油大学出版社

高等学校教学参考书

高等数学学习辅导

马铭福　亓 健　费祥历　主编

中国石油大学出版社
CHINA UNIVERSITY OF PETROLEUM PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习辅导 / 马铭福，亓健，费祥历主编
.—东营：中国石油大学出版社，2015.8(2016.9 重印)
ISBN 978-7-5636-4889-4

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①马… ②亓… ③费… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 188130 号

书　　名：高等数学学习辅导
作　　者：马铭福　亓　健　费祥历

责任编辑：满云凤(电话　0532—86981533)
封面设计：赵志勇

出 版 者：中国石油大学出版社(山东　东营，邮编　257061)
网　　址：http://www.uppbook.com.cn
电子信箱：yibian8392139@163.com
印 刷 者：沂南县汇丰印刷有限公司
发 行 者：中国石油大学出版社(电话　0532—86983437)
开　　本：170 mm×225 mm　印张：27.75　字数：536 千字
版　　次：2016 年 9 月第 1 版第 2 次印刷
册　　数：7 601—11 600
定　　价：33.80 元

前 言

高等数学是高等院校理工科专业最重要的基础理论课之一，高等数学的内容极其丰富。高等数学的概念、理论和计算方法是学习各专业课必须具备的基础知识。学习高等数学对提升学生数学素养，培养逻辑思维能力、定量思维习惯和空间想象能力有着不可替代的作用。为了帮助学生加深对高等数学课程内容的理解，克服学习中的困惑，提高分析问题解决问题的能力，编写了此学习辅导书。

本书与费祥历、亓健编写的教材《高等数学》(上、下册，高等教育出版社，2015 年)各章次序相一致。每一章包含基本内容总结、学习基本要求、疑难问题分析、补充练习题，并对教材中的比较难的习题给出解题提示。辅导书中练习题题型多样，与教材中的习题基本不重复，很多内容是对教材的补充和扩展。

中国石油大学(华东)理学院基础数学系的教师金贵荣、吕炜、张丹青副教授，付红斐、纪凤辉、王健、智红燕、李锋杰、侯英敏、许晓婕、陈晓静、左文杰、邢丽丽、陈永刚、孙建国、李小平、江玲玲、黄玲玲、于娟、赵旭波、王娟、李洪芳、张会娜、排新颖、纪艳菊、刘珊、孙新国、梁锡军博士，及吴淑君、张艳华、王静、石丽娜、张海军、李磊、吕川、胡哲等青年教师在教学研究和教学实践中，积累了丰富的经验，对学生学习中的困难有较多的了解，在本书编写中提出了许多建设性意见，在辅导书编写中融入了上述教师集体的智慧。

我们相信《高等数学学习辅导》对学好高等数学会有较大的帮助，限于编者水平，书中疏误之处在所难免，希望读者批评指正，以利改进。

编 者

2015 年 7 月 10 日

目 录

第 1 章 函数与极限

一、基本内容

1. 基本概念

(1) **函数的定义**：设 $D\subset \mathbf{R}$ 是一非空数集，f 是一个确定的法则，如果 $\forall x\in D$，通过法则 f，存在唯一的 $y\in\mathbf{R}$ 与 x 相对应，则称由 f 确定了一个定义于 D 上，取值于 $\mathbf{R}$ 的函数，记为

$$y=f(x),x\in D.$$

其中 x 为自变量，y 为因变量，f 为对应法则，D 为定义域，$W=\{y|y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的值域.

平面点集 $G=\{(x,y)|y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的图形，一般情况下，G 是 xOy 平面上一条曲线.

(2) **函数的四个初等性质**：

函数的有界性：设函数 $y=f(x),x\in D$. 如果存在常数 $M>0$，使得 $|f(x)|\leqslant M,\forall x\in D$，就称 f 在 D 上有界，否则称 f 在 D 上无界.

函数的无界性可叙述为：$\forall M>0$，$\exists x_0\in D$，使得

$$|f(x_0)|>M.$$

函数的单调性：设函数 $y=f(x),x\in D$. 如果 $\forall x_1,x_2\in D,x_1<x_2,f(x_1)<(>)f(x_2)$，就称 f 在 D 上单调递增(单调递减). 单调递增函数与单调递减函数统称为单调函数.

函数的奇偶性：设函数 $y=f(x),x\in D$，定义域 D 关于原点 O 对称(即 $x\in D\Rightarrow -x\in D$). 如果 $\forall x\in D,f(-x)=-f(x)$，称 f 为奇函数；如果 $\forall x\in D$，$f(-x)=f(x)$，称 f 为偶函数.

函数的周期性：设函数 $y=f(x),x\in D$，如果存在常数 $T\neq 0$ 使 $\forall x\in D$，$x\pm T\in D$，且 $f(x\pm T)=f(x)$，称 f 为周期函数，T 称为 f 的一个周期. f 的最小的正周期简称为 f 的周期.

(3) **函数的初等运算**：

四则运算：设 $f_1:D_1\to\mathbf{R},f_2:D_2\to\mathbf{R}$ 是两个函数，$D=D_1\cap D_2\neq\varnothing$.

和 $f_1+f_2:(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x),\forall x\in D$.

差 $f_1-f_2:(f_1-f_2)(x)=f_1(x)-f_2(x),\forall x\in D$.

积 $f_1\cdot f_2$：$(f_1\cdot f_2)(x)=f_1(x)\cdot f_2(x),\forall x\in D$.

商 $\frac{f_1}{f_2}$：$\left(\frac{f_1}{f_2}\right)(x)=\frac{f_1(x)}{f_2(x)},\forall x\in D-\{x|f_2(x)=0\}\neq\varnothing$.

复合运算：设 $y=f(u),u\in D_1,u=\varphi(x),x\in D$，如果对任意的 $x\in D,u=\varphi(x)\in D_1$，则由 φ 与 f 确定了 y 与 x 之间的一个函数关系，称为 φ 与 f 的复合函数，记为 $f\circ\varphi$，即 $(f\circ\varphi)(x)=f(\varphi(x))$.

反函数运算：设函数 $f:D\to W$ 是一一对应，即 $\forall x_1,x_2\in D,x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$，且 $\forall y\in W,\exists x\in D$ 使 $y=f(x)$，则由 f 确定了从 W 到 D 的一个函数：对 $y\in W$，如 x（这个 x 是唯一的）使 $y=f(x)$，则让 x 与 y 对应，这个函数称为 f 的反函数，记为 f^{-1}，即 $x=f^{-1}(y),y\in W$. 显然有

$$\forall x\in D,(f^{-1}\circ f)(x)=x;\ \forall y\in W,(f\circ f^{-1})(y)=y.$$

习惯上，用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，$y=f(x)$ 的反函数一般记为 $y=f^{-1}(x)$.

(4) **极限定义**：

ε-N 定义：设 $\{a_n\}$ 是一个数列，a 是一个常数，如果 $\{a_n\}$ 与 a 之间有如下关系："对任意的 $\varepsilon>0$，存在自然数 N，对一切 $n>N$，有 $|a_n-a|<\varepsilon$"，就称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a，a 为 $\{a_n\}$ 的极限，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. 或者用逻辑符号叙述为

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists N,\forall n>N,|a_n-a|<\varepsilon.$$

a 不是 $\{a_n\}$ 的极限可叙述为

$$\exists\varepsilon_0>0,\forall N,\exists n_0>N,|a_{n_0}-a|\geqslant\varepsilon_0.$$

数列 $\{a_n\}$ 不收敛可叙述为

$$\forall a>0,\exists\varepsilon_0>0,\forall N,\exists n_0>N,|a_{n_0}-a|\geqslant\varepsilon_0.$$

ε-X 定义：设 $f:D\to\mathbf{R}$，对某个 $a>0,(-\infty,-a)\cup(a,+\infty)\subset D$，$A$ 是一个常数，如果函数 $f(x)$ 与 A 满足关系："对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $X\geqslant a,\forall|x|>X$，$|f(x)-A|<\varepsilon$"，就称当 x 趋于无穷时，$f(x)$ 以 A 为极限，记为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$. 或者用逻辑符号叙述为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists X\geqslant a,\forall|x|>X,|f(x)-A|<\varepsilon.$$

类似地有极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 的定义及极限不存在的定义.

ε-δ 定义：设 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内有定义，A 是一个常数，如果 $f(x)$ 与 A 有关系："对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$"，就称当 x 趋于 x_0 时，$f(x)$ 以 A 为极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$. 或者用逻辑符号叙述为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall 0<|x-x_0|<\delta, |f(x)-A|<\varepsilon.$$

类似地有左、右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$ 的定义及极限不存在的定义.

(5) **无穷小与无穷大的定义**：如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$，就称 $f(x)$ 为当 x 趋于 x_0 时的无穷小. 如果对任意 $M>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)|>M$，就称 $f(x)$ 当 x 趋于 x_0 时是无穷大，记为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$.

类似地定义 $x\to+\infty, x\to-\infty, x\to\infty, x\to x_0^+, x\to x_0^-$ 时的无穷小及无穷大.

(6) **函数的连续与间断**：

函数的连续性：设 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，则 $f(x)$ 在 x_0 处的连续性有下列三种等价说法：

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \Leftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \text{当} |x-x_0|<\delta \text{时},$$
$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

$f(x)$ 在 x_0 点的间断性：如果极限式 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ 不成立，称 $f(x)$ 在 x_0 处不连续，x_0 为 $f(x)$ 的一个间断点. 设 x_0 为 $f(x)$ 的间断点，如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 都存在，则称 x_0 为第一类间断点，否则 x_0 为 $f(x)$ 的第二类间断点.

*(7) **一致连续性**：设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果 $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$，使得 $\forall x_1, x_2\in I$，当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时，$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$，就称 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续.

2. 基本定理与重要结论

(1) **单侧极限与双侧极限的关系定理**：

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x)=A=\lim_{x\to x_0^-} f(x).$$
$$\lim_{x\to \infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to +\infty} f(x)=A=\lim_{x\to -\infty} f(x).$$

(2) **数列极限与子列收敛性的关系定理**：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a \Leftrightarrow$ 对 $\{a_n\}$ 的任一子列 $\{a_{n_k}\}$，$\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}=a \Leftrightarrow$ 对 $\{a_n\}$ 的奇子列 $\{a_{2n-1}\}$ 与偶子列 $\{a_{2n}\}$，$\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n-1}=a=\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}$.

(3) **单调有界原理：单调有界数列必有极限.**

(4) **函数极限与数列极限的关系定理(海涅定理)**：

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow$ 对 x_0 的某去心邻域内的收列于 x_0 的任一数列 $\{x_n\}$，$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$.

(5) **无穷小与函数极限的关系定理**：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$，其中 α 是

$x\to x_0$ 时的无穷小.

(6) **夹逼定理**:设在 x 的变化过程中有不等式$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$及极限 $\lim g(x)=\lim h(x)=A$,则 $\lim f(x)=A$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.\ (\mathrm{e}=2.7\ 1828\ 1828\ 45\ 90\ 45\cdots)$$

(7) **求极限的等价无穷小代换定理**:设无穷小 $\alpha\sim\alpha'$,$\beta\sim\beta'$,且 $\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}$存在,则 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}$.

(8) **极限的四则运算性质**:设 $\lim f(x)=A$,$\lim g(x)=B$ 存在,则

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B.$$

$$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=AB.$$

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B}(B\neq 0).$$

(9) **连续函数的运算定理**:连续函数的初等运算[四则运算(除法中分母为零的点除外)、复合运算、反函数运算]保持函数的连续性.

(10) **初等函数的连续性**:基本初等函数在定义域内连续;初等函数在定义区间(包含在定义域内的区间)内连续.

(11) **闭区间上连续函数的性质定理**:

最值定理:设 $f(x)$在$[a,b]$上连续,则 $f(x)$在 $[a,b]$上能取到最大值与最小值. 即 $\exists x_1,x_2\in[a,b]$使 $m=f(x_1)\leqslant f(x)\leqslant f(x_2)=M$, $\forall x\in[a,b]$.

有界性定理:设 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,则 $f(x)$在$[a,b]$上有界.

零点定理:设 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,$f(a)\cdot f(b)<0$,则 $\exists\xi\in(a,b)$使 $f(\xi)=0$.

连通性定理(介值定理):设 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,则

$$f([a,b])=[m,M],$$

即对每个 $C\in(m,M)$,$\exists\xi\in[a,b]$使 $f(\xi)=C$.

***一致连续性定理**:设 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,则 $f(x)$在$[a,b]$上一致连续.

3. 一些常用结论

(1) $$\lim_{n\to\infty}r^n=\begin{cases}+\infty, & |r|>1,\\ 1, & r=1,\\ 0, & |r|<1,\end{cases}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\ (a>0)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m}=\begin{cases}0, & n<m,\\ \infty, & n>m,\\ \dfrac{a_n}{b_n}, & n=m,\end{cases}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\arctan x=\pm\frac{\pi}{2},\qquad \lim_{x\to-\infty}e^x=0.$$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e,\quad \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

(3) 当 $x\to 0$ 时有等价无穷小：

$\sin x\sim x$； $\tan x\sim x$； $\ln(1+x)\sim x$；

$e^x-1\sim x$； $\arcsin x\sim x$； $\arctan x\sim x$；

$a^x-1\sim x\ln a\,(a>0)$； $1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$； $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$.

(4) $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$；

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1);$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1};$$

$$(2n-1)!!=(2n-1)(2n-3)\cdots 5\cdot 3\cdot 1;$$

$$(2n)!!=2n(2n-2)(2n-4)\cdots 6\cdot 4\cdot 2=2^n n!;$$

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k+\cdots+b^n;$$

$$a^n-b^n=(a-b)[a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+b^{n-1}];$$

$$a^n+b^n=(a+b)[a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots+b^{n-1}]\ (n\geqslant 3,\text{为奇数}).$$

(5) $\sin\dfrac{x}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}$，设 $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$，$x>0$ 时取＋号，$x<0$ 时取－号.

二、基本要求

(1) 理解①有关函数的基本概念：函数的定义；函数的初等运算及函数的初

① 必须深入理解，牢固掌握，熟练应用的，概念用“理解”一词表示，方法、运算用“掌握”一词表述. 在教学要求上低于前者的，概念、理论用“了解”一词表述，方法、运算用“会”或“了解”表述. 以后各章基本要求的表述方法与此相同.

等性质；基本初等函数、初等函数、分段函数的含义. 理解函数在一点处连续及区间上连续的定义；理解数列极限的 ε-N 定义及函数极限的 ε-X 定义，ε-δ 定义.

(2) 了解无穷小、无穷大以及无穷小阶的概念，会用等价无穷小及无穷小的性质求极限；了解两个极限存在准则(单调有界原理、夹逼定理)；了解间断点的概念，会判断间断点的类型；了解初等函数的连续性，会用函数连续性求极限.

(3) 掌握基本初等函数的性质与图形；掌握极限的四则运算性质，了解极限的唯一性、有界性、保号性、不等式性质；掌握闭区间上连续函数的性质定理(有界定理、最值定理、零点存在定理及连通性定理).

(4) 会求函数的定义域，会根据定义判断函数的初等性质，会建立简单的函数关系；会用两个重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=\mathrm{e}$ 求极限；会利用等价无穷小代换求极限；会用极限定义证明一些简单的极限.

三、典型例题分析

例 1 求函数的定义域：

(1) $f(x)=\sqrt{2+x-x^2}+\arcsin\lg\dfrac{x}{10}$；

(2) 已知 $f(x)$ 的定义域是 $(0,1)$，求 $f(\sin 2x)$ 的定义域；

(3) $g(x)=\sqrt{\sin x-1}$.

解 (1) 使 $f(x)$ 有意义的 x 必须满足：

$$\begin{cases}2+x-x^2\geqslant 0,\\ \left|\lg\dfrac{x}{10}\right|\leqslant 1,\end{cases}\quad 即\begin{cases}(2-x)(1+x)\geqslant 0,\\ -1\leqslant\lg\dfrac{x}{10}\leqslant 1,\end{cases}$$

由 $(2-x)(1+x)\geqslant 0$ 得 $-1\leqslant x\leqslant 2$，由 $-1\leqslant\lg\dfrac{x}{10}\leqslant 1$ 得 $1\leqslant x\leqslant 100$，从而函数 $f(x)$ 的定义域为 $1\leqslant x\leqslant 2$.

(2) 由题设知，函数 $f(\sin 2x)$ 应满足 $0<\sin 2x<1$，从而

$$2n\pi<2x<(2n+1)\pi\quad 且\ 2x\neq 2n\pi+\frac{\pi}{2}(n=0,\pm 1,\cdots).$$

因此
$$n\pi<x<\frac{(2n+1)\pi}{2}\quad 且\ x\neq n\pi+\frac{\pi}{4}(n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots).$$

(3) $g(x)=\sqrt{\sin x-1}$，$\sin x-1\geqslant 0$，只有满足 $\sin x=1$ 的 x，$g(x)$ 有意义，得定义域

$$D=\left\{x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\,\middle|\,k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\right\}.$$

注 由于高等数学(如无特别申明)主要是在实数范围内讨论问题,因此要函数有定义,负数不能开偶次方,arcsin x,arccos x 的自变量 x 满足 $|x|\leqslant 1$,对数函数的真数必须为正,零不能作除数等.

例 2 求函数的表达式:

(1) 设 $y=\dfrac{1}{2x}f(t-x)$,$y|_{x=1}=\dfrac{t^2}{2}-t+5$,求 $f(x)$;

(2) $z=\sqrt{y}+f(\sqrt[3]{x}-1)$,$z|_{y=1}=x$,求 $f(x)$ 及 z 的表达式;

(3) 设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2}, & |x|<1,\\ x^2+1, & |x|\geqslant 1,\end{cases}$ 求 $f[f(x)]$;

(4) $y=\dfrac{1-\sqrt{1+4x}}{1+\sqrt{1+4x}}$,求 $y(x)$ 的反函数.

解 (1) 由题设得 $\dfrac{t^2}{2}-t+5=\dfrac{1}{2}f(t-1)$,

即
$$f(t-1)=t^2-2t+10=(t-1)^2+9,$$
令 $t-1=x$,得
$$f(x)=x^2+9.$$

(2) 将 $y=1$,$z=x$ 代入 z 的表达式得
$$x=1+f(\sqrt[3]{x}-1)$$
令 $\sqrt[3]{x}-1=t$,$x=(t+1)^3$,从而 $(t+1)^3-1=f(t)$,

即
$$f(x)=(x+1)^3-1,z=\sqrt{y}+x-1.$$

(3) 当 $0<|x|<1$ 时,$|f(x)|=\sqrt{1-x^2}<1$,从而
$$f[f(x)]=\sqrt{1-f^2(x)}=\sqrt{1-(1-x^2)}=\sqrt{x^2}=|x|.$$
当 $x=0$ 时,$|f(0)|=1$,从而 $f[f(0)]=[f(0)]^2+1=2$.

当 $|x|\geqslant 1$ 时,$|f(x)|=|x^2+1|>1$,从而

$f[f(x)]=f^2(x)+1=(x^2+1)^2+1=x^4+2x^2+2$.

综合之即知
$$f[f(x)]=\begin{cases}|x|, & 0<|x|<1,\\ 2, & x=0,\\ x^4+2x^2+2, & |x|\geqslant 1.\end{cases}$$

(4) 从等式 $y=\dfrac{1-\sqrt{1+4x}}{1+\sqrt{1+4x}}$ 中解出 x,
$$y+y\sqrt{1+4x}=1-\sqrt{1+4x},即\sqrt{1+4x}=\frac{1-y}{1+y},$$
$$x=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1-y}{1+y}\right)^2-1\right]=-\frac{y}{(1+y)^2},$$
改写 y 为 x,x 为 y 得反函数为 $y=-\dfrac{x}{(1+x)^2}$.

例 3 函数的初等性质：

(1) 判断 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$在$[0,1)$上及$[0,a](0<a<1)$上的有界性；

(2) 判断函数 $f(x)=x+\sin x$ 的周期性；

(3) 判断函数 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}\ln\dfrac{1-x}{1+x}$的奇偶性；

(4) 确定函数 $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$的单调区间.

解 (1) 当 x 小于 1 且无限趋于 1 时，$\sqrt{1-x}$无限趋于 0，从而$\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$无限增大，因此 $f(x)$在$[0,1)$上无界，严格推证如下：

$\forall M>0$，令$|f(x)|=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}>M$，即$\sqrt{1-x}<\dfrac{1}{M}$，$1-x<\dfrac{1}{M^2}$，$x>1-\dfrac{1}{M^2}$，因此，在区间$\left(1-\dfrac{1}{M^2},1\right)$内任取一个 x_M，都可使$f(x_M)>M$，从而 $f(x)$在$[0,1)$内无界.

在$[0,a](0<a<1)$上有界．事实上，对一切 $x\in[0,a]$，$|f(x)|=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{1-a}}=M$.

(2) $f(x)$不是周期函数.事实上，反设 $f(x)$是以 T 为周期的函数，则对一切 x 有 $f(x+T)=f(x)$，即

$$x+T+\sin(x+T)=x+\sin x,\quad T+\sin(x+T)=\sin x.$$

特别取 $x=0$ 得 $T+\sin T=0$. 此式只有 $T=0$ 时才成立，与周期函数定义矛盾.

(3) $f(-x)=\dfrac{\mathrm{e}^{-x}-1}{\mathrm{e}^{-x}+1}\ln\dfrac{1+x}{1-x}=\dfrac{1-\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}=\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}\ln\dfrac{1-x}{1+x}=f(x)$，

因此，$f(x)$是偶函数.

(4) 设 $x_1<x_2$，

$$f(x_2)-f(x_1)=\left(x_2-\frac{1}{x_2}\right)-\left(x_1-\frac{1}{x_1}\right)=(x_2-x_1)\left(1+\frac{1}{x_1x_2}\right).$$

当 $x_1x_2>0$ 即 x_1,x_2 同号时，$f(x_2)-f(x_1)>0$，即 $f(x_2)>f(x_1)$. 因此，$f(x)$在$(-\infty,0)$及$(0,+\infty)$上单调递增．

例 4 证明下列极限结果的正确性：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2-n})=\dfrac{1}{2}$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$ (a 是正常数)；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$； (4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2-\sqrt{x^4-4x^2+1}\right)=2$；

(5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x}=0$.

证明 (1) 任取 $\varepsilon>0$,令

$$|a_n-A|=\left|n-\sqrt{n^2-n}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{n}{n+\sqrt{n^2-n}}-\frac{1}{2}\right|=\frac{n}{2(n+\sqrt{n^2-n})^2}<\varepsilon,$$

从这个不等式解 n 不易解,但是有

$$\frac{n}{2(n+\sqrt{n^2-n})^2}\leqslant\frac{n}{2n^2}=\frac{1}{2n},$$

令 $\dfrac{1}{2n}<\varepsilon$,可得 $n>\dfrac{1}{2\varepsilon}$,于是 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N=\left[\dfrac{1}{2\varepsilon}\right]$,当 $n>N$ 时,

$$\left|n-\sqrt{n^2-n}-\frac{1}{2}\right|\leqslant\frac{1}{2n}<\varepsilon,$$

由数列极限的 ε-N 定义,$\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2-n})=\dfrac{1}{2}$.

(2) 任取 $\varepsilon>0$,取定自然数 N_0,使 $N_0\geqslant a$,那么当 $n>N_0$ 时

$$\left|\frac{a^n}{n!}-0\right|=\frac{a^n}{n!}=\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdots\frac{a}{N_0}\cdot\frac{a}{N_0+1}\cdots\frac{a}{n}\leqslant M\cdot\frac{a}{n},$$

其中 $M=\dfrac{a}{1}\cdot\dfrac{a}{2}\cdots\dfrac{a}{N_0}$ 是常数,$\dfrac{a}{N_0+1},\dfrac{a}{N_0+2},\cdots,\dfrac{a}{n-1}$ 均小于 1,令 $M\cdot\dfrac{a}{n}<\varepsilon$,得 $n>\dfrac{Ma}{\varepsilon}$,于是

$\forall\varepsilon>0$, $\exists N=\max\left\{\left[\dfrac{Ma}{\varepsilon}\right],N_0\right\}$,当 $n>N$ 时 $\left|\dfrac{a^n}{n!}-0\right|<\varepsilon$,由数列极限的 ε-N定义,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$.

(3) $|\sqrt[n]{n}-1|=\sqrt[n]{n}-1\overset{\text{设}}{=\!=}a$,则$\sqrt[n]{n}=1+a$, $a\geqslant 0$,

$$n=(1+a)^n=1+na+\frac{n(n-1)}{2}a^2+\cdots+a^n\geqslant\frac{n(n-1)}{2}a^2,$$

得 $a\leqslant\sqrt{\dfrac{2}{n-1}}\,(n\geqslant 2)$,令$\sqrt{\dfrac{2}{n-1}}<\varepsilon$,得 $n>\dfrac{2}{\varepsilon^2}+1$,于是

$\forall\varepsilon>0$, $\exists N=\left[\dfrac{2}{\varepsilon^2}+1\right]$,当 $n>N$,时,$|\sqrt[n]{n}-1|=a<\varepsilon$.

由 ε-N 定义,$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

(4) 对任意的 $\varepsilon>0$,令

$$|f(x)-A|=|x^2-\sqrt{x^4-4x^2+1}-2|$$

$$\overset{|x|>2}{=\!=}\frac{3}{(x^2-2)+\sqrt{x^4-4x^2+1}}\leqslant\frac{3}{(x^2-2)}<\varepsilon,$$

解得 $|x|>\sqrt{\frac{3}{\varepsilon}+2}$，于是 $\forall\varepsilon>0$，$\exists X=\max\left\{\sqrt{\frac{3}{\varepsilon}+2},2\right\}$，当 $|x|>X$ 时，

$$\left|x^2-\sqrt{x^4-4x^2+1}-2\right|<\varepsilon,$$

由函数极限的 ε-X 定义，$\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-\sqrt{x^4-4x^2+1})=2$.

(5) 对任意的 $\varepsilon>0$，

$$\left|\frac{x^2-1}{x}-0\right|=\frac{|x-1||x+1|}{|x|}\underset{\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}}{\leqslant}5|x-1|,$$

令 $5|x-1|<\varepsilon$，得 $|x-1|<\frac{\varepsilon}{5}$，于是

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{5},\frac{1}{2}\right\}$，当 $0<|x-1|<\delta$ 时，$\left|\frac{x^2-1}{x}-0\right|<\varepsilon$，

由函数极限的 ε-δ 定义，$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x}=0$.

注 证明极限时通过适当放大不等式，简化不等式是基本技巧. (5)式的证明中先设 $|x-1|\leqslant\frac{1}{2}$，从而 $\left|\frac{x^2-1}{x}-0\right|\leqslant5|x-1|$，由于考虑的是 x 无限趋于 1 的变化情况，这种假设不影响证明的一般性. 当然也可设 $|x-1|\leqslant\frac{1}{3}$ 等，但如设 $|x-1|\leqslant1$，则放大不等式时分母不好处理. 如果从 $\frac{|x-1||x+1|}{|x|}<\varepsilon$，解得 $|x-1|<\frac{|x|}{|x+1|}\varepsilon$，而取 $\delta=\frac{|x|}{|x+1|}\varepsilon$，则这种 δ 不符合极限定义要求，因为，定义中 δ 仅与 ε 有关.

例 5 求下列数列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\cdot3^n+3\cdot(-2)^n}{3^n}$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}[n(\sqrt{n^2+3}-n)]$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})(|x|<1)$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}$；

(6) 设 $a_n=\frac{1}{n^3+1}+\frac{4}{n^3+2}+\cdots+\frac{n^2}{n^3+n}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$；

(7) 设 $x_1=1,x_2=1+\frac{x_1}{1+x_1},\cdots,x_{n+1}=1+\frac{x_n}{1+x_n}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\cdot3^n+3\cdot(-2)^n}{3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}(2+3\cdot(\frac{-2}{3})^n)=2$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}[n(\sqrt{n^2+3}-n)]=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n}{\sqrt{n^2+3}+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{n^2}}+1}=\frac{3}{2}$.