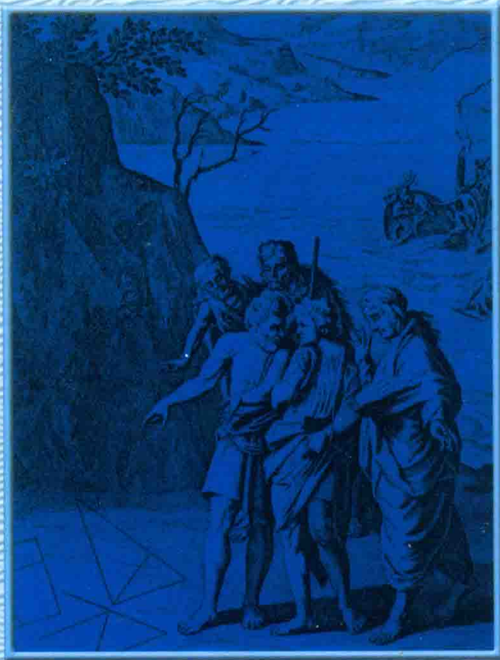
南秀全初等数学系列

奇数、偶数、奇偶分析法



南秀全 编著

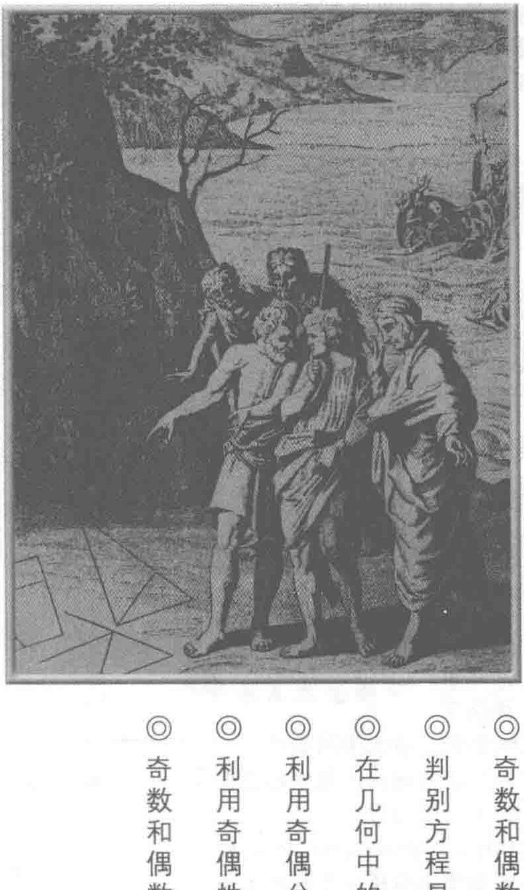
- 奇数和偶数的基本性质
- 判别方程是否有整数解
- 在几何中的应用
- 利用奇偶分析法解决操作变换问题
- 利用奇偶性解其他一些问题
- 奇数和偶数的特殊表示法

HITP
哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

南秀全初等数学系列

奇数、偶数、奇偶分析法

南秀全　编著



◎奇数和偶数的基本性质

◎判别方程是否有整数解

◎在几何中的应用

◎利用奇偶分析法解决操作变换问题

◎利用奇偶性解其他一些问题

◎奇数和偶数的特殊表示法

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书共分三章，分别介绍了奇数和偶数的基本性质，奇偶分析法在解题中的应用，以及奇数和偶数的特殊表示法. 每节后都配有相应的习题，供读者巩固和加强.

本书适合于数学奥林匹克竞赛选手和教练员、高等院校相关专业研究人员及数学爱好者使用.

图书在版编目(CIP)数据

奇数、偶数、奇偶分析法/南秀全编著. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2018.3

ISBN 978-7-5603-7132-0

Ⅰ.①奇… Ⅱ.①南… Ⅲ.①奇数②偶数 Ⅳ.①O121.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 303408 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　刘立娟
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张 48　字数 530 千字
版　　次　2018 年 3 月第 1 版　2018 年 3 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-7132-0
定　　价　98.00 元

◎前言

整数可以分为两大类:被 2 除余 1 的属于一类,被 2 整除的属于另一类. 前类中的数叫作奇数,后类中的数叫作偶数. 通过分析整数的奇偶性来论证问题的方法称为奇偶分析法. 奇偶分析法是数学奥林匹克解题的重要方法之一,本书通过对近年来国内外数学竞赛中典型的试题加以分析,来阐述奇偶分析法在解题中的作用,以及怎样利用奇偶分析法来解竞赛题.

由于本人水平有限,加上时间仓促,书中不足之处在所难免,诚请同仁们不吝赐教.

作　者

2017 年 7 月 10 日

◎目录

奇数和偶数的基本性质

第1章

我们知道，一切整数可分为两大类：奇数类和偶数类.用整除的术语来说，凡是能被 2 整除的整数叫作偶数，例如，0，± 2，± 4，± 6，…，特别是要注意 0 是偶数，任何偶数都可以表示成 $2n$ 的形式.不能被 2 整除的整数叫作奇数，例如，± 1，± 3，± 5，…，任何奇数都可以表示成 $2n+1$ 的形式，这里 n 为整数（通常记作 $n\in \mathbf{Z}$，$\mathbf{Z}$ 表示整数集）.

奇数和偶数有许多十分明显而又十分简单的性质.主要性质有：

性质 1　奇数≠偶数；奇数+偶数≠0.

性质 2　奇数±奇数=偶数；偶数±偶数=偶数；奇数±偶数=奇数.

性质 3　奇数×奇数=奇数；奇数×偶数=偶数；偶数×偶数=偶数.

性质 4　奇数个奇数之和是奇数；偶数个奇数之和是偶数；任意有限个偶数之和是偶数.

性质 5　任意有限个奇数之积是奇数；偶数与任意整数之积是偶数.

性质 6 若干个整数的乘积是奇数，则其中每一个因子都是奇数；若干个整数之积是偶数，则其中至少有一个因子是偶数.

性质 7 两个整数的和与差的奇偶性相同.

推论 若干个整数的和与差的奇偶性相同.

以上几条性质都很简单，这里就不证明了. 为了叙述方便，我们把被 b 除余 r（其中 b 是不等于 0 的整数，r 是适合 $0\leqslant r<|b|$ 的整数）的整数写作 $bq+r$（其中 $q\in\mathbf{Z}$），例如 $4q+1$ 或 $4k+1$ 就表示被 4 除余 1 的整数.

性质 8 奇数的平方被 4 除余 1，偶数的平方是 4 的倍数.

因为

$$(2n+1)^2=4n^2+4n+1=4(n^2+n)+1$$

$$(2n)^2=4n^2$$

推论 奇数的平方被 8 除余 1.

因为

$$(2n+1)^2=4(n^2+n)+1=4n(n+1)+1$$

其中 $n,n+1$ 是两个连续整数，必有一个是偶数.

性质 9 所有形如 $4k+3$ 的数不能表示为两个整数的平方和.

因为

$$(2m+1)^2+(2n+1)^2=4(m^2+m+n^2+n)+2$$

$$(2m)^2+(2n)^2=4(m^2+n^2)$$

$$(2m)^2+(2n+1)^2=4(m^2+n^2+n)+1$$

即两个奇数的平方和为 $4k+2$ 型，两个偶数的平方和为 $4k$ 型，一个奇数和一个偶数的平方和为 $4k+1$ 型，因此，没有两个整数的平方和为 $4k+3$ 型.

例如，由此性质可以得到方程 $x^2+y^2=1\ 999$ 没有整数解.

性质 10　所有形如 $4k+2$ 型的数不能表示为两个整数的平方差.

因为

$$x^2-y^2=(x+y)(x-y)$$

由性质 7，$x+y$ 与 $x-y$ 具有相同的奇偶性.

若 $x+y$ 和 $x-y$ 都是奇数，则

$$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$$

也是奇数，即为 $4k+1$ 或 $4k+3$ 型；

若 $x+y$ 和 $x-y$ 都是偶数，则

$$(x+y)(x-y)=x^2-y^2$$

为 4 的倍数，即为 $4k$ 型.

因此，没有两个整数的平方差为 $4k+2$ 型.

例如，由此性质可以得到方程 $x^2-y^2=1\ 998$ 没有整数解.

奇偶分析法在解题中的应用

第2章

利用奇数和偶数的分类及其特殊性质,可以简捷地求解一些与整数有关的数学题,包括一些看上去比较困难的问题.特别是一些趣味数学问题和数学竞赛题,只要对其中的数量关系做简单的奇偶性分析,问题就能迎刃而解.下面介绍整数的奇偶性在解题中的各种应用.

§1 判别整数的奇偶性

例 1 在 1,2,…,1 997,1 998,1 999 这 1 999 个数的前面任意添加一个正号或负号,问它们的代数和是奇数还是偶数?(根据 1989 年湖北省黄冈地区初中数学竞赛题改编)

解 因为两个整数的和与差的奇偶性相同,所以不论正负号如何添加,它们的代数和的奇偶性都与

$$1+2+\cdots+1\ 998+1\ 999$$

的奇偶性相同.

因为

$$1+2+\cdots+1\,998+1\,999=$$

$$(999\text{ 个偶数})+(1\,000\text{ 个奇数})=\text{偶数}$$

所以任意添加正负号后的代数和一定是偶数.

例 2　设 n 为奇数，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 $1,2,\cdots,n$ 的任一排列，求证：积 $(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_n-n)$ 必为偶数.　　（1906 年匈牙利数学竞赛题）

证法 1　考虑所有因子 a_i-i 的和，即

$$(a_1-1)+(a_2-2)+\cdots+(a_n-n)=$$

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)-(1+2+\cdots+n)=0$$

由于 n 是奇数，0 是偶数，若所有的因子

$$a_i-i\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

都是奇数，则奇数个奇数的和应为奇数，不可能为 0，出现矛盾.

所以必有一个因子 a_i-i 是偶数，从而乘积

$$(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_n-n)$$

是偶数.

证法 2　设 $n=2k+1$（k 是整数）.

显然，由 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的某种排列，则乘积

$$(a_1-1)(a_2-2)\cdots(a_n-n)$$

中，各个因式的被减数和减数的奇数个数都是 $k+1$ 个，即总共有 $2(k+1)=n+1$ 个奇数，而一共有 n 个因式，所以必有一个因式中的被减数和减数都是奇数，从而这个因式是偶数，于是所有 n 个因式的乘积为偶数.

评注　本例还可以推广为如下的命题：

设 $a_1,a_2,\cdots,a_{2n+1}$ 是任意 $2n+1$ 个整数，b_1，$b_2,\cdots,b_{2n+1}$ 是 $a_1,a_2,\cdots,a_{2n+1}$ 的任意一个排列，那么

乘积

$$(a_1-b_1)(a_2-b_2)\cdots(a_{2n+1}-b_{2n+1})$$

必为偶数.

例 3 开头 100 个自然数按某种顺序排列，然后按每连续三项计算和数，得到 98 个和数，其中为奇数的和数最多有几个？　(第 21 届俄罗斯数学竞赛题)

解 先证 98 个和数不可能都是奇数. 用反证法.

若所有和数都是奇数，则这 100 个自然数的排列顺序只能是下列四种情况之一：

(1)奇奇奇奇奇奇……

(2)奇偶偶奇偶偶……

(3)偶奇偶偶奇偶……

(4)偶偶奇偶偶奇……

(1)表明前 100 个自然数都是奇数，(2)～(4)表明前 100 个自然数中偶数比奇数多，都与事实不符.

所以，98 个和数不可能都是奇数.

以下说明 98 个和数中可以有 97 个奇数. 我们把 1～100 这 100 个自然数按如下顺序排列

$$\underbrace{\text{奇偶偶奇偶偶}\cdots\cdots\text{奇偶偶}}_{75\text{个数}}\underbrace{\text{奇奇奇}\cdots\cdots\text{奇}}_{25\text{个数}}$$

这样，只有第 75 个和数是由偶奇奇相加而得，应为偶数，其他 97 个和数皆为奇数.

所以，最多有 97 个和数是奇数.

例 4 把 1,2,…,2 004 这 2 004 个正整数随意放置在一个圆周上，统计所有相邻 3 个数的奇偶性得知，3 个数全是奇数的有 600 组，恰有 2 个数是奇数的有 500 组. 问：恰有 1 个是奇数的有几组？全部不是奇数的有几组？　(2004 年上海市 TI 杯高二年级数学竞赛题)

解　这 2 004 个数任意摆放在圆周上，每相邻 3 个数作为一组，共有 2 004 组. 而每个数都分别在 3 个不同的组内，设恰有 1 个奇数的有 x 组，全部不是奇数的有 y 组，则考虑奇数情形有

$$600\times3+500\times2+x=1\ 002\times3$$

解得 $x=206$. 于是

$$y=2\ 004-600-500-206=698$$

例 5　有 29 个省市的乒乓球队参加友谊邀请赛，能否安排出这样的比赛场次，使每个球队恰好参加奇数次比赛？为什么？

解　不能做出这样的安排，否则，假设总的比赛场次为 n 场，由于每一场比赛由两个队进行，可以出场比赛的共有 $2n$ 个队次. 另一方面，每个球队恰好参加奇数次比赛，于是 29 个奇数之和是奇数，这就是说，总计参加比赛的队次应为奇数，但奇数不等于偶数 $2n$，矛盾. 由此得证.

例 6　求证：不论在什么社交场合下，握过奇数次手的人数总是偶数.

证明　假设在社交场合中握了奇数次手的共有 n 人，握了偶数次手的共有 m 人，那么它们握手的总计人次是 n 个奇数加 m 个偶数，可见它们的握手总人次与 n 是同奇偶的. 另一方面，握手是相互的，每握一次手，按人次计算就是两次，所以握手的总人次必是偶数，可见 n 必是偶数，证毕.

评注　由例 5、例 6 已看到两个乒乓球队比赛与两人握手，在分别计算它们的队次与人次上有类似之处. 我们将球队（人）表示为平面上的点，如果两队（人）比赛（握手），就在表示它们的两点之间连一直线段，否

则,就不连线段,于是可得如下的例题:

例 7 设平面图上共有有限个点,没有三点共线,且其中有些点之间用直线相连. 如果图中一点恰与其他 m 个点有连线,当 m 为偶(或奇)数时,那么称这一点为偶(或奇)点. 求证:在这一平面图上,奇点的个数必是偶数.

证明 假设平面图中共有 n 条直线段,现对 n 用数学归纳法证明. 当 $n=1$ 时,则易见恰好有两个奇点,结论成立;假设当 $n=k$ 时结论成立,现需要证明命题当 $n=k+1$ 时也成立,为此,任取图中一条线段 AB,那么点 A 与点 B 的奇偶性以及在图中去掉线段 AB 后,点 A,B 的奇偶性如表 1 所示.

表 1

原图中 点 A	原图中 点 B	去掉线段 AB 的图中 点 A	去掉线段 AB 的图中 点 B	点的变化数
奇	奇	偶	偶	-2
奇	偶	偶	奇	0
偶	奇	奇	偶	0
偶	偶	奇	奇	2

从表中可见,去掉线段 AB 后,奇点的变化数是偶数. 又因原图中去掉线段 AB 后的新图中,共有 k 条线段,于是由归纳假设知,新图中共有偶数个奇点,因而原图中也有偶数个奇点,由此本题得证.

例 8 已知一个凸多边形有偶数条边,证明:可以给每条边定义一个方向,使得对于每个顶点,指向该顶点的边数为偶数. (2002 年德国数学奥林匹克竞赛题)

证明 从任意方向开始,计算到达顶点的方向数. 由于有偶数条边,故这些数之和必是偶数.

所以，有奇数个方向到达该顶点(简称奇顶点)数必为偶数.

若无奇顶点，则本题得证.

若有奇顶点，则进行如下操作，使奇顶点的个数减少 2：

选择两个奇顶点，用一条沿着某些凸多边形的边的折线联结，改变折线每一条边的方向，那么，折线内任一顶点的方向数的变化或增加 2，或减少 2，或不改变，而两个端点的方向数变化只能增减 1，从而使奇顶点变为偶顶点，而折线内的偶顶点仍为偶顶点.

例 9　设 $a_1,a_2,\cdots,a_{64}$ 是自然数 $1,2,\cdots,64$ 的一种排列，按下列方式构作 $b_i,c_i,d_i,\cdots,x$，即

$$\begin{array}{ccccc}
a_1 \quad a_2 & a_3 \quad a_4 & \cdots & a_{63} \quad a_{64} \\
b_1=|a_1-a_2| & b_2=|a_3-a_4| & \cdots & b_{32}=|a_{63}-a_{64}| \\
 & c_1=|b_1-b_2| & \cdots & c_{16}=|b_{31}-b_{32}| \\
 & & \ddots \quad \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\
 & & x &
\end{array}$$

求证：x 为偶数.　　　(1979 年北京市中学数学竞赛题)

证明　易见，$b_1,b_2,\cdots,b_{32}$ 的奇偶性与

$$a_1+a_2,a_3+a_4,\cdots,a_{63}+a_{64}$$

的奇偶性相同. $c_1,c_2,\cdots,c_{16}$ 的奇偶性与

$$a_1+a_2+a_3+a_4,a_5+a_6+a_7+a_8,\cdots,a_{61}+a_{62}+a_{63}+a_{64}$$

的奇偶性相同. 依此类推，x 与 $a_1+a_2+\cdots+a_{64}$ 的奇偶性相同. 而

$$a_1+a_2+\cdots+a_{64}=1+2+\cdots+64=(1+64)\times 32$$

是偶数，故 x 是偶数.

评注　此题亦可由 x 倒推反证. 若 x 是奇数，则在本题所述的计算过程中，倒数第二步里的两个数必是一奇一偶，而倒数第三步里的四个数只能是三奇一

偶，或是一奇三偶，也就是说，这四个数里必有奇数个奇数. 仿此推知，在计算过程的每一步里，只能有奇数个奇数，最后推知原数列 $a_1, a_2, \cdots, a_{64}$ 中也有奇数个奇数，但事实上，1，2，…，64 中有 32 个奇数. “奇数＝偶数”产生矛盾，故假设不真，即 x 只能是偶数.

例 10 在一块平地上有 n 个人，且每个人到其他人的距离均不相同. 每人都有一把水枪，当发出失火信号时，每人用枪击中距他最近的人.

证明：当 n 为奇数时，至少有一个人身上是干的；当 n 为偶数时，这个结论是否正确.

（1987 年加拿大数学奥林匹克竞赛题）

证明 当 n 为奇数时，设 $n=2m-1$.

对 m 采用数学归纳法.

当 $m=1$ 时，$n=1$，结论显然成立.

假设结论对 m 成立，下面考虑 $2m+1$ 个人的情形.

设 A，B 两个人的距离在所有的两个人的距离中是最小的.

现在撤出 A 和 B，剩下 $2m-1$ 个人，由归纳假设，至少有一个人身上是干的，设为 C. 再把 A，B 两人加进去，变成 $2m+1$ 个人. 由于 A，C 两个人的距离大于 A，B 两个人的距离，B，C 两个人的距离大于 A，B 两个人的距离，又由题设，则 C 身上仍然是干的.

当 n 为偶数时，结论不真.

事实上，设 $n=2m$，$2m$ 个人记为 A_j，B_j（$j=1,2,\cdots,m$）.

设 A_j 与 B_j 的距离为 1，而与其他人的距离都大于 1，例如，设 A_j 及 B_j 分别位于 $3j$ 及 $3j+1$（$j=1$，

$2,\cdots,m$)处，这时 A_j 与 B_j 互相击中.

例 11　我们将一些石头放入 10 行 14 列的矩形棋盘内，允许在每个单位正方形内放入石头的数目多于 1 块，然后发现在每一行、每一列上均有奇数块石头. 如果将棋盘上的单位正方形相间地染为黑色和白色，证明：在黑色正方形上石头的数目共有偶数块.

（2003 年北欧数学竞赛题）

证明　假若不然，设黑色正方形上石头的数目为奇数，将 14 列依次编号为 $1,2,\cdots,14$，将编号为奇数的列称为奇列，编号为偶数的列称为偶列. 对各行也类似处理. 由于对称性，不妨设黑格是奇行奇列格和偶行偶列格.

设奇行奇列格中有 k_1 个中放有奇数块石头，偶行偶列格中有 k_2 个中放有奇数块石头，奇行偶列格中有 k_3 个中放有奇数块石头.

由奇行中有奇数块石头，有 $k_1+k_3\equiv1 \pmod 2$.

由偶列中有奇数块石头，有 $k_2+k_3\equiv1 \pmod 2$.

由反证假设，有 $k_1+k_2\equiv1 \pmod 2$.

以上三式相加得 $2(k_1+k_2+k_3)\equiv1 \pmod 2$，这不可能.

因此，黑色正方形上石头的数目共有偶数个.

例 12　求所有的正整数对 (m,n)，使得可以将 $m\times n$ 的棋盘中的每一个单位正方形，要么染成白色，要么染成黑色，并满足下面的条件：

对于每一个单位正方形 A，与这个正方形 A 至少有一个公共顶点且与 A 同色的单位正方形的数目（包括 A 本身）有偶数个.（2005 年丝绸之路数学竞赛题）

解　称满足条件的染法为“好的”染法，称至少有