非线性波的可积性与解析方法

田守富　邹　丽　张田田　著

科学出版社

非线性波的可积性与解析方法

田守富　邹　丽　张田田　著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书主要研究非线性微分方程、超对称方程和超离散方程的可积性与解析方法，包括方程之间的变换关系、可积簇的构造、对称与守恒律、孤立子解与拟周期波解和可积性质. 全书共五部分：第一部分介绍孤立子与可积系统的研究背景和发展历史；第二部分讨论微分方程之间的变换关系、算法及应用，非线性波方程的 Darboux 与 Bäcklund 变换，以及构造近似解的微分变换方法及应用；第三部分系统分析微分方程的对称与守恒律，为了寻找微分方程更丰富的解析性质，进一步讨论非局域守恒律、非局域对称和广义群不变解；第四部分讨论微分方程的孤立子解和拟周期波的构造性理论，并分析拟周期波解的极限性行为；第五部分介绍微分方程、超对称方程和超离散方程的可积性及其解析性等.

本书可作为高等学校数学、物理学、海洋工程和流体力学等专业的研究生和高年级本科生的教材，也可供相关领域的研究人员和工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

非线性波的可积性与解析方法/田守富，邹丽，张田田著. —北京：科学出版社，2017.11

ISBN 978-7-03-055187-0

Ⅰ. ①非… Ⅱ. ①田… ②邹… ③张… Ⅲ. ①非线性波-可积性 Ⅳ. ①O534

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 270344 号

责任编辑：朱英彪 赵晓廷 胡志强 / 责任校对：桂伟利
责任印制：张 伟 / 封面设计：蓝正设计

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京中石油彩色印刷有限责任公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*

2017 年 11 月第 一 版 开本：720 × 1000 B5
2017 年 11 月第一次印刷 印张：15 1/4
字数：300 000

定价：88.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

近年来, 非线性科学在数学、物理、生物学、通信和经济学等学科中有着重要的应用, 而孤立子理论和可积系统是非线性科学的主要组成部分, 也是数学物理方向的主要研究热点之一. 孤立子理论的研究蓬勃发展, 建立了许多描述孤立子现象的方程, 这些数学方程是一类非线性偏微分方程. 许多非线性偏微分方程 (PDE) 都可用来刻画孤立子现象, 如 KdV 方程、KP 方程、NLS 方程和 Camassa-Holm 方程等, 这类方程属于无穷维可积的哈密顿系统. 到目前为止, 大量的非线性微分方程可用来刻画非线性科学分支领域中的物理现象, 如凝聚态物理、非线性光学、超导 Josephson 结、量子力学、海洋中的冲击波和畸变波等, 对这些微分方程的研究将会促进非线性科学的发展, 因此引起了大量数学和物理学家的研究兴趣.

非线性 PDE 的解析解问题是孤立子理论和可积系统中研究的热点问题之一. 由于偏微分方程求解的不规律性, 虽然通过一些技巧可以获得部分偏微分方程的解析解, 但到目前为止, 仍然没有一个统一研究所有 PDE 解析解的有效方法. 但是对于某几类 PDE, 已得到一些著名的有效方法, 如李对称群法、反散射变换法、微分变换法、代数几何方法、Darboux 和 Bäcklund 变换法、Hirota 双线性方法以及 Painlevé 截断展开法等.

非线性波方程的可积性质研究经历了一个很长且又奇特的发展过程. 著名的可积系统有: 有限维的 Kepler 问题、多样化的自旋陀螺和连续的 Painlevé方程; 对于无穷维的孤立子方程, 经典的孤立子可积系统包括 KdV 方程、Sine-Gordon 方程和 NLS 方程等, 这些方程在数学物理领域有着重要的应用价值. 研究非线性微分方程、超对称方程和超离散方程的可积性质具有非常重要的意义, 是研究这几类方程精确可解性的先验和第一步. 非线性波的双线性形式、Lax 对、无穷维守恒律、无穷维对称、哈密顿结构、Painlevé 测试和双线性 Bäcklund 变换等, 都可用来描述方程的可积性质. 本书就是利用多维 Bell 多项式来研究几类非线性微分方程的可积性质.

全书分为五部分.

第一部分包括第 1 章, 主要介绍孤立子理论和可积系统的发展史.

第二部分包括第 2~5 章, 主要介绍非线性波方程之间的变换关系和几类可积簇. 第 2 章基于李对称群方法, 介绍微分方程之间的变换关系, 分别给出单个因变量、多个因变量和变系数与常系数之间的可逆变换等, 利用微分变换研究潜水波 Camassa-Holm 方程的近似解析解. 第 3 章构造一类方程的三类 N 重 Darboux 和

Bäcklund 变换, 并利用 Painlevé截断展开法, 研究一类方程的 Grammian 形式解. 第 4 章给出一类哈密顿 Lattice 簇, 并介绍其 Darboux 变换、Lax 可积性质及其约化. 第 5 章主要介绍一类自容源 mKP 方程簇, 给出其二元 Darboux 变换及各种形式的解析解.

第三部分包括第 6 章和第 7 章, 主要介绍非线性波方程的李对称、守恒律和群不变解. 第 6 章利用守恒律乘子研究非线性波方程的守恒律, 基于所得到的守恒律, 研究非线性波方程的非局域等价 PDE 系统, 并进一步给出原方程的非局域对称和守恒律, 最后将此方法应用于非线性扩散方程, 得到相应的非局域结果. 第 7 章给出非线性波方程的 (广义) 群不变解, 并将其应用于非线性扩散方程, 得到局域对称无法得到的群不变解, 本章最后介绍 Kompaneets 方程的非经典对称及其群不变解和稳态解.

第四部分包括第 8~10 章, 主要介绍非线性波方程的孤立子解和拟周期波解. 第 8 章利用 Hirota 双线性方法和 Riemann Theta 函数的特性, 研究一类非线性波方程的孤立子解和拟周期波解, 并给出拟周期波解的极限渐近行为. 本章主要以 Caudrey-Dodd-Gibbon-Sawada-Kotera 方程和 (2+1) 维的爆破孤立子方程为例. 第 9 章基于超空间、超 Hirota 双线性算子和超 Riemann Theta 函数, 研究一类超非线性波方程的超拟周期波解, 并将相关结果应用于超 Korteweg-de Vries-Burgers (KdV-Burgers) 方程, 得到超空间上的解析解. 第 10 章介绍一类离散方程的拟周期波解, 并将所研究问题进行超离散化, 得到超离散化方程的超拟周期波解.

第五部分包括第 11 章和第 12 章, 主要介绍非线性波方程的可积性质. 第 11 章介绍 Bell 多项式的有关概念、相关结论, 以及一类非线性波方程的可积性质, 给出了广义变系数 KP 方程和 5 阶 KdV 方程的可积性质, 如 Hirota 双线性、Lax 对、无穷守恒律、孤立子解和拟周期波解等. 第 12 章介绍超 Bell 多项式的有关概念、相关结论, 以及一类超对称方程的可积性质和几类广义超离散方程的 Lax 可积性质, 如 Lattice Krichever-Novikov 方程、离散的 modified KdV(mKdV) 方程和离散的 Painlevé方程, 本章最后介绍具有有限亏格的 Riemann Theta 函数的超离散化, 并将相应的结论应用于超离散 mKdV 方程.

本书各部分之间的内容互相独立, 读者可以随意跳跃式阅读其中的章节内容.

特别感谢国家自然科学基金 (11301527, 51522902, 51379033, 51579040)、中国博士后科学基金 (2015M570498, 2017T100413)、江苏省 “青蓝工程” 人才项目等的大力资助. 感谢合作者张鸿庆教授、Bluman 教授、王振教授和羊正正博士给本书写作的支持. 感谢 Fokas 教授、宗智教授、曹策问教授、楼森岳教授、屈长征教授、马文秀教授、胡星标教授、刘青平教授、周汝光教授、范恩贵教授、闫振亚研究员、陈勇教授、张大军教授、朝鲁教授、张玉峰教授、夏铁成教授、谢福鼎教授、李彪教授、贺劲松教授、张盛教授和王灯山教授给予作者科研道路上的热心指导和

帮助.

由于非线性科学涉及非常广泛的研究领域, 加上作者水平有限, 书中难免存在不足之处, 恳请读者批评、指正.

作　者

2017 年 6 月

目　　录

前言

第一部分　非线性波的发展史

第 1 章　孤立子理论与可积系统的发展史 …… 3
1.1　孤立子的研究概要 …… 3
1.2　可积系统的研究概要 …… 5
1.2.1　有穷维哈密顿系统 …… 6
1.2.2　无穷维哈密顿系统 …… 7
1.2.3　无穷与有穷维哈密顿系统之间的联系 …… 10
1.2.4　代数几何解 …… 10
1.3　非线性微分方程求解的发展概要 …… 11
1.3.1　反散射方法 …… 11
1.3.2　Bäcklund 和 Darboux 变换 …… 12
1.3.3　Hirota 双线性方法 …… 12
1.3.4　李对称理论 …… 13
1.3.5　其他方法的研究 …… 14
1.4　超对称方程和超离散方程的发展概要 …… 14
参考文献 …… 16

第二部分　变换方法与可积簇

第 2 章　微分方程之间变换方法 …… 29
2.1　$AC = BD$ 模式的介绍 …… 29
2.2　李对称群在微分方程之间变换的理论 …… 30
2.3　李对称群在 $AC = BD$ 理论框架下的应用 …… 32
2.3.1　多个因变量的非线性 PDE 到线性 PDE 的可逆变换 …… 32
2.3.2　单个因变量的非线性 PDE 到线性 PDE 的可逆变换 …… 35
2.3.3　变系数线性 PDE 到常系数线性 PDE 的可逆变换 …… 37
参考文献 …… 39

第 3 章 非线性微分方程的 Darboux 和 Bäcklund 变换及其应用 ······ 41
3.1 三类 N-重 Darboux 变换 ······ 41
3.1.1 广义导数 NLS 方程的 N 重 Darboux 变换 ······ 41
3.1.2 广义导数 NLS 方程的周期波解 ······ 49
3.2 Bäcklund 和 Darboux 变换 ······ 55
3.2.1 Painlevé截断展开的奇异流形法 ······ 55
3.2.2 Darboux 变换及其 Grammian 形式解 ······ 59
3.3 非线性微分方程的微分变换-Padé逼近方法 ······ 63
3.3.1 微分变换-Padé逼近方法 ······ 63
3.3.2 浅水波 Camassa-Holm 方程 ······ 64
参考文献 ······ 67
第 4 章 哈密顿 Lattice 簇的 Lax 可积性、约化及其 Darboux 变换 ······ 69
4.1 一类新的多哈密顿 Lattice 簇的 Lax 可积性及其约化 ······ 69
4.2 一类新的多哈密顿 Lattice 簇的 Darboux 变换 ······ 76
参考文献 ······ 79
第 5 章 自容源 mKP 方程簇 ······ 80
5.1 自容源 mKP 方程及其向前、向后和二元 Darboux 变换 ······ 80
5.1.1 mKP 方程向前的 Darboux 变换 ······ 80
5.1.2 mKP 方程向后的 Darboux 变换 ······ 81
5.1.3 mKP 方程的二元 Darboux 变换 ······ 81
5.2 自容源 mKP 方程的广义二元 Darboux 变换 ······ 83
5.3 自容源 mKP 方程的几种类型的解 ······ 89
参考文献 ······ 93

第三部分 对称与守恒律及其应用

第 6 章 非局域对称与守恒律 ······ 97
6.1 Euler 算子与守恒律乘子 ······ 97
6.1.1 Euler 算子与守恒律乘子简介 ······ 97
6.1.2 非线性微分方程的守恒律 ······ 98
6.2 Noether 定理和 Boyer 定理在守恒律乘子算法下的局限性 ······ 100
6.3 非局域相关 PDE 系统及其树形结构 ······ 101
6.3.1 非线性微分方程的势系统和子系统 ······ 101
6.3.2 非线性扩散方程的非局域 PDE 系统及其树形结构 ······ 103
6.4 非局域理论的应用 ······ 108

6.5 非线性扩散方程的非局域对称、非局域守恒律与非局域线性化 …… 110
6.5.1 非线性扩散方程的非局域对称与非局域守恒律 …… 110
6.5.2 非线性扩散方程的非局域线性化 …… 111
参考文献 …… 113
第 7 章 广义群不变解 …… 115
7.1 非局域对称的广义群不变解 …… 115
7.1.1 非局域对称的算法 …… 115
7.1.2 非线性扩散方程 …… 116
7.2 Kompaneets 方程的非经典群不变解及其稳态解 …… 119
参考文献 …… 124

第四部分　孤立子解和拟周期波解

第 8 章 非线性微分方程的拟周期波解及其极限特性分析 …… 127
8.1 非线性微分方程的广义 Hirota-Riemann 方法 …… 127
8.1.1 双线性形式 …… 127
8.1.2 非线性微分方程的周期波解 …… 129
8.2 CDGSK 方程 …… 133
8.2.1 CDGSK 方程的周期波解 …… 133
8.2.2 CDGSK 周期波的极限特性 …… 135
8.3 (2+1) 维的爆破孤立子方程 …… 143
8.3.1 (2+1) 维 BS 方程的周期波解 …… 143
8.3.2 (2+1) 维 DBS 方程的极限特性 …… 147
参考文献 …… 148
第 9 章 超对称方程的拟周期波解及其极限特性分析 …… 149
9.1 超空间、超 Hirota 双线性算子和超 Riemann Theta 函数 …… 149
9.2 超对称方程的超 Hirota-Riemann 方法 …… 153
9.2.1 超对称方程的超 Hirota 双线性形式 …… 153
9.2.2 超对称方程的超周期波解 …… 154
9.3 超对称 KdV-Burgers 方程 …… 160
9.3.1 超对称 KdV-Burgers 方程的超周期波解 …… 161
9.3.2 超对称 KdV-Burgers 方程超周期波解的极限渐近特性 …… 162
参考文献 …… 165
第 10 章 超离散方程的拟周期波解及其极限特性分析 …… 166
10.1 广义的离散 mKdV 方程的拟周期波解及其超离散化形式 …… 166

10.1.1 广义的离散 mKdV 方程的拟周期波解 ······ 166
10.1.2 广义的离散 mKdV 方程的超离散化及其超周期波解 ······ 171
10.2 广义的 (2+1) 维 Toda Lattice 方程的超离散化及其超周期波解 ······ 173
参考文献 ······ 174

第五部分　可积性质

第 11 章　非线性微分方程的可积性质 ······ 177
11.1 多维的二元 Bell 多项式 ······ 177
11.2 广义变系数 KP 方程的可积性质 ······ 179
11.3 5 阶 KdV 方程的可积性质 ······ 198
参考文献 ······ 201
第 12 章　超空间上微分方程的可积性质 ······ 203
12.1 多维的超 Bell 多项式 ······ 203
12.2 多维的二元超 Bell 多项式 ······ 205
12.3 超对称方程的可积性质 ······ 207
12.4 广义超离散方程的 Lax 可积性 ······ 212
12.4.1 超离散 Lattice Krichever-Novikov 方程的 Lax 可积性 ······ 213
12.4.2 几类广义超离散方程的 Lax 可积性 ······ 217
12.5 有限亏格 $\mathscr{G}$ 的 Riemann Theta 函数的超离散化及其应用 ······ 221
12.5.1 带有有限亏格 $\mathscr{G}$ 的 Riemann Theta 函数的超离散化 ······ 221
12.5.2 广义耦合的超离散 mKdV 方程 ······ 223
参考文献 ······ 225

附录　非线性扩散方程的局部与非局部对称表 ······ 227

Part 1

第一部分

非线性波的发展史

第 1 章　孤立子理论与可积系统的发展史

本章主要综述孤立子理论与可积系统的国内外发展概况. 以计算机数学及计算机代数为基础, 介绍几类非线性波方程 (如非线性方程、超对称方程和超离散方程) 的可积性质与求解方法等.

1.1　孤立子的研究概要

孤立波是在研究非线性水波时发现的一种非线性波, 其特点是波形不随时间的变化而改变, 犹如粒子, 因而称为孤立子. 在非线性科学中, 孤立子理论被视为最重要的研究课题之一, 并在光学、力学和物理等领域有着非常重要的应用. 另外, 孤立子理论还与微分几何、代数几何、辛几何、李对称群 (Lie symmetric group) 与李代数及表示论等[1-3] 有密切关系, 许多数学家、物理学家对孤立子理论产生了浓厚的兴趣, 进而促进了数学与物理等学科的交错发展.

1834 年, 英国工程师 Russell[4] 在爱丁堡到格拉斯哥的河流里首次发现了孤立子现象：水波的形状在河面上保持不变向前传播, 直至河流拐角处消失. 10 年后, 他在英国科学促进协会名为“Report on Waves”的报告中提出了这一现象. 之后为了从理论上证明这一现象, Russell 做了大量的实验, 均得到相同特性的波, 因此, 将具有这种特性的波称为孤立波. 因为线性方程无法产生此类波的解, 所以当时从数学理论的角度没有给出孤立波的进一步合理的解释, 这在一定程度上阻碍了孤立波的发展.

1895 年, 荷兰数学家 Korteweg 和 de Vries[5] 导出非线性波方程, 后来用其名字命名, 即 KdV(Korteweg-de Vries) 方程:

$$u_t + u_{xxx} + 6uu_x = 0. \tag{1.1}$$

这个模型解决了 60 多年前 Russell 提出的有争议的孤立波的存在性问题, 但是波传播的稳定性和多波叠加干涉性仍然没有得到解决. 因此, 孤立波理论再次被“抛出”. 在 20 世纪中期, Gardner 和 Morikawa 在研究电磁波的传播时再次发现了 KdV 方程. 由于 KdV 方程分别在固体、液体和气体中产生, 它被证明是一个丰富多样性的模型.

19 世纪, Bäcklund 在研究伪球面时给出了描述孤立子相互作用的解的一般变换方法, 即负 Gaussian 曲率 $K = -1/\rho^2$ 的常曲面法. 对于这种曲面的研究要追溯到

1862 年, Edmond Bour 在研究渐近坐标参数化伪球面上的 Gauss-Mainardi-Codazzi 系统时给出了著名的 Sine-Gordon 方程:

$$\omega_{uv} = \frac{1}{\rho^2}\sin\omega. \tag{1.2}$$

1867 年和 1868 年, Bonnet 和 Enneper 分别独立地用类似的方法重新导出了 Sine-Gordon 方程. 1879 年, Bianchi 在数学上重新提出在伪球面上纯几何构造的方法. 1882 年, Bäcklund 详细地提出可以在伪球面上迭代的构造性变换 B_σ, 事实上这个变换是带有独立参数 Bianchi 变换 $\mathrm{B}_{\pi/2}$ 的李变换 L_σ, 即 L_σ^{-1} 的共轭变换. 李变换有助于为原始的 Bianchi 变换引入重要参数 σ.

1962 年, Perring 和 Skyrme[6] 在研究粒子的相互作用时导出了高维的 Sine-Gordon 方程. 1965 年, Josephson 在研究超导性隧道现象时导出了同样的高维 Sine-Gordon 方程, 并以此获得了诺贝尔奖. 1967 年, Lamb 在分析超短波脉冲时导出了经典的 Sine-Gordon 方程. 1965 年, Zabusky 和 Kruskal[7] 通过置换迭代定理研究原始 KdV 多孤立子解时得到了一个新型的脉冲性质. 1973 年, Wahlquist 和 Estabrook 解释了类似 Sine-Gordon 方程的 KdV 方程具有在 Bäcklund 变换下不变的性质, 此外也满足一个类似的置换性叠加定理. 1974 年, Lamb 利用经典的方法 (1910 年 Clairin 提出) 构造了 Nonlinear Schrödinger (NLS) 方程

$$iq_t + q_{xx} + vq^2|q| = 0 \tag{1.3}$$

的 Bäcklund 变换, 非线性叠加原理再一次被 Bäcklund 变换所验证. 1965 年, Kelley 和 Talanov 在研究非线性 Kerr 介质上下独立自焦时发现 NLS 方程在光纤维中有很重要的应用. 1968 年, Zakharov 在研究深水重力波时导出了 NLS 方程. Hasimoto 于 1971 年在研究薄孤立波的流体逼近运动时发现了相同的方程.

自此以来, 孤立子的研究不仅在数学非线性学科得到了飞跃的发展, 也在其他相关学科如物理学、流体力学、空气动力学和生物学等得到了充分的发展. 1984 年美国数学科学基金特别委员会关于“美国数学的现在与未来”的报告中指出“数学理论的重新统一是一件令人兴奋的正在进行的事情”, 这个报告表明数学的孤立子理论与其他学科的密切关系, 特别是与物理学科的密切相关性. 现在, 孤立子虽然被广泛地应用, 但至今没有给出明确的定义. 在数学里, 将孤立子解释为微分方程局域化的行波解, 多波相互作用之后, 原来波的形状和速度都不会改变; 在物理学中, 孤立子的本质解释为: ① 在固定区域内的能量集中表征; ② 多孤立子相互作用时有弹性散射的现象, 即波的形状和各自的速度能还原到碰撞初始状态. 经过大量的研究, 人们意外地发现不仅 KdV 方程具有孤立子解, 大量的物理界微分方程也都具有这种特性的解, 同时这些特性的解分别表现出多样化的形式, 如 Bell-shaped 孤立子、Kink 孤立子、Envelope 孤立子、Positive 孤立子、Negative 孤立子、Breather

孤立子和叠加作用之后生成的多种多样的其他类型孤立子等. 这些类型的孤立子为研究微分方程孤立子解提供了很好的依据.

1.2 可积系统的研究概要

什么是可积系统? 这是一个不容易精确回答的问题. Zakharov [8]、Hitchin 等[9]、Babelon 等[10] 分别在各自著作中解释了这个问题. 在本书中, 认为可积系统具有守恒量、代数几何和解析解等显著的特征. 这些特征具有非常广泛的意义: 代数几何通常具有超自然的特性, 其可解性不能精确地表示为三角函数、指数函数和有理函数的组合形式. 最能表现出这些特征的经典例子为刚体围绕其中心质量的运动. 如果 $\mathcal{J}$ 表示刚体的矢量角速度, $\mathcal{I}_1$、$\mathcal{I}_2$、$\mathcal{I}_3$ 表示相应的转动惯量, 则这样的经典方程可用如下方程表示:

$$\mathcal{I}_1\dot{\mathcal{J}}_1=(\mathcal{I}_2-\mathcal{I}_3)\mathcal{J}_2\mathcal{J}_3,\quad \mathcal{I}_2\dot{\mathcal{J}}_2=(\mathcal{I}_3-\mathcal{I}_1)\mathcal{J}_3\mathcal{J}_1,\quad \mathcal{I}_3\dot{\mathcal{J}}_3=(\mathcal{I}_1-\mathcal{I}_2)\mathcal{J}_1\mathcal{J}_2,\tag{1.4}$$

式中, $\dot{\mathcal{J}}_j=\mathrm{d}\mathcal{J}_3/t$.

分析式 (1.4), 得到下面的简洁系统:

$$\dot{u}_1=u_2u_3,\quad \dot{u}_2=u_3u_1,\quad \dot{u}_3=u_1u_2.\tag{1.5}$$

1. 守恒量

下面分析式 (1.5) 的守恒量.

对 $u_1^2-u_2^2$ 求微分可以得到 $2u_1(u_2u_3)-2u_2(u_3u_1)=0$, 故 $u_1^2-u_2^2$ 是一个常数, 并可得

$$u_1^2-u_2^2=A,\quad u_1^2-u_3^2=B.\tag{1.6}$$

至此, 得到两个关于变量 u_1、u_2、u_3 的守恒量 A 和 B.

2. 代数几何

取第一个方程 $\dot{u}_1=u_2u_3$, 并将守恒量表达式 (1.6) 中的 u_2、u_3 代入此方程, 可得

$$\dot{u}_1^2=(u_1^2-A)(u_1^2-B).\tag{1.7}$$

假定 $x=u_1$, $y=\dot{u}_1$, 可以将式 (1.7) 重写为

$$y^2=(x^2-A)(x^2-B),\tag{1.8}$$

它是一个代数曲线方程, 事实上是一个椭圆曲线, 且 $\mathrm{d}t=\mathrm{d}x/y$ 是曲线上的正则微分形式.

3. 解析解

任意椭圆曲线都可以写为一个标准形式:

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3, \tag{1.9}$$

它是一个全纯函数. 下面的 Weierstrass $\wp$ 函数是一个双周期函数:

$$\wp(u + 2m\omega_1 + 2n\omega_2) = \wp(u), \quad \wp(u)'^2 = 4\wp(u)^3 - g_2\wp(u) - g_3. \tag{1.10}$$

利用 $\wp$ 函数的性质, 解析解可以写为

$$\mathrm{d}t = \mathrm{d}\wp/\wp' = \mathrm{d}u. \tag{1.11}$$

此时不仅利用 $\wp$ 函数得到了原系统的解析解, 也将原非线性刚体系统化为 u 的线性系统.

1.2.1 有穷维哈密顿系统

研究一个 $2n$ 维相空间 M 的动力哈密顿系统, 引用经典坐标 p_i、q_i 使得其满足非退化的泊松括号:

$$\{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{p_i, q_j\} = \delta_{ij}. \tag{1.12}$$

通常, 相空间 M 上的非退化泊松括号等价于 M 上非退化的闭二形式, 称为辛形式, 即

$$\omega = \sum_j \mathrm{d}p_j \wedge \mathrm{d}q_j. \tag{1.13}$$

非线性微分方程的可积形式有 Liouville 可积、Lax 可积、无穷维守恒律可积和 Painlevé可积等. 一个系统成为 Liouville 可积的, 当且仅当它拥有 n 个独立的守恒量 F_i, $i = 1, 2, \cdots, n$, $\{H, F_j\} = 0$, 且具有对合形式 $\{F_i, F_j\} = 0$.

Liouville 定理　如果运动方程 $\dot{q}_i = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}$, $\dot{p}_i = -\dfrac{\partial H}{\partial q_i}$ 是 Liouville 可积的, 则这个运动方程的解可以由积分形式给出.

研究非线性波系统不仅是利用技巧方法求得其解析解, 更要研究其可积性质. 每个非线性波系统的可积性质都会有略微的差异，目前具有可积性质的系统主要有 Calogero-Moser 系统、Calogero-Sutherland 系统、Euler-Arnold 刚体、Clebsch 刚体、Euler-Poinsot 陀螺、Lagrange 陀螺、Gamier 系统、Gaudin 系统、Goryachev-Chaplyagin 陀螺、Henon-Heiles 系统、Kepler 问题、Kirchoff 刚体、Kowalewski 陀螺和 Neumann 问题等.

1.2.2 无穷维哈密顿系统

除了求单个方程的解析解，数学家的另一个任务是研究这些可积系统的统一理论. 例如，给定的非线性波系统是否具有可积性质. 可积性质最多的讨论点是从微分方程系统是否具有 Lax 对的思想开始的. 下面首先从有限维可积系统出发介绍这一理论:

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=[L,M],\tag{1.14}$$

式中, $L=L(z)=L_0+zL_1+\cdots+z^nL_n$, $M=M(z)=M_0+zM_1+\cdots+z^mM_m$ 为 $k\times k$ 矩阵多项式.

由式 (1.14) 可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{tr}(L^p)=\mathrm{tr}(p[L,M]L^{p-1})=p\mathrm{tr}(LML^{p-1}-ML^p)=p\mathrm{tr}(ML^p-ML^p)=0,\tag{1.15}$$

对任意的 p, 所有多项式 $\mathrm{tr}L(z)^p$ 的系数都是守恒量. 特征多项式的分量可以表示为这些迹的组合形式, 能够保持 $L(z)$ 的整个谱的不变性. 显然, 具有 Lax 对型的方程满足可积系统的第一准则. 事实上, 代数几何的特性也很容易得到.

特征方程 $\det(y-L(z))=0$ 定义了一个代数曲线, 称为谱曲线, 它在流的作用下保持不变. 对于这个曲线上的每一个点 (y,z), 有 1 维空间 $L_{y,z}=\mathrm{Ker}(y-L(z))$, 这些变量连同时间形成了谱曲线上的线丛. 对于这类方程, 必须研究代数曲线上的代数几何及其上面的线丛.

众所周知, 线丛是一个复环面, 是 Lattice 子群的向量空间 $\mathbb{C}^g$ 上的商群. 如果线丛 L 在这个向量空间上关于时间 t 作线性形式的运动, 则称这类方程为可积的. 在这种情况下, 这类方程的解可以写为 Theta 函数的形式. 下面介绍满足这一特性的矩阵 $M(z)$. 一个任意矩阵 $M(z)$ 可以给出一个非线性等谱形式的 $L(z)$, 许多有限维可积系统满足这一框架, 特别是刚体, 这里取

$$L(z)=\begin{pmatrix}0 & u_1+u_2\\ u_2-u_1 & 0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}-2u_3 & 0\\ 0 & 2u_3\end{pmatrix}+z^2\begin{pmatrix}0 & u_1-u_2\\ -u_1-u_2 & 0\end{pmatrix}.\tag{1.16}$$

有限维的情形非常特殊, 但是它的广义情形是一个很好的模型以至于不用过多担心它们的解析问题. 在无限维情形中, 仍然需要考虑其 Lax 对公式. 对一个无穷维形式的方程:

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=[L,M],\tag{1.17}$$

式中, L、M 是一些用微分算子替代了有穷维情形的矩阵, 最著名的例子是 KdV 方程:

$$u_t-6uu_x+u_{xxx}=0,\tag{1.18}$$