高等院校公共课教材

高等数学

同步辅导（上册）

马　燕　主　编
任秋艳　姚小娟　蒙　頔　李建生　郭中凯　副主编

清华大学出版社

高等数学同步辅导(上册)

马　燕　主　编

任秋艳　姚小娟　蒙　頔
李建生　郭中凯　副主编

清华大学出版社
北　京

内 容 简 介

针对“高等数学”这门课程中涉及的概念、公式、定理抽象难懂，解题方法多样，学习难度系数大的现状，我们编写了这本与高等数学课程配套的同步辅导教材.

本书分为上、下两册，共 12 章，以小节为单位编写. 每章以“本章知识导航”开篇，简明扼要地总结了主要学习内容，然后按节展开，每节均包括重要知识点、典型例题解析和课后练习题. 其中，“重要知识点”部分归纳总结了每小节的主要内容，包括基本概念、性质、定理、公式、基本解题方法等；“典型例题解析”部分精选具有代表性的例题进行分析讲解，示范做题方法和技巧；“课后练习题”部分按难易程度分为基础训练和能力提升两级，基础训练题主要用于学生课后夯实基础，提升能力题主要用于加强学生对知识点的应用.

本书可作为理工科院校“高等数学”课程的教学参考书和学习指导书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步辅导(上册)/马燕主编. --北京：清华大学出版社，2017
ISBN 978-7-302-48460-8

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①马…　Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教学参考资料　Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 224416 号

责任编辑：陈立静
封面设计：李　坤
责任校对：周剑云
责任印制：沈　露
出版发行：清华大学出版社
　　网　　址：http://www.tup.com.cn, http://www.wqbook.com
　　地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
　　社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
　　投稿与读者服务：010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　　质量反馈：010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
　　课件下载：http://www.tup.com.cn, 010-62791865
印 装 者：北京鑫海金澳胶印有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　张**：11.75　　**字　数**：282 千字
版　　次：2017 年 9 月第 1 版　　**印　次**：2017 年 9 月第 1 次印刷
印　　数：1～3000
定　　价：29.00 元

产品编号：076944-01

前　言

本书是在顺应教学改革发展的需求下，为高等院校“高等数学”课程编写的教学参考书和学习指导书，对于优化学生的知识结构、培养学生的逻辑思维能力、提高学生的数学素质起着重要的作用，同时也可以为后续课程的学习打下坚实的数学基础.

本书除具有基本知识点全面、文字阐述清楚易懂等特点外，还具有以下特色：

(1) 内容按章节展开，理论知识体系完整，按板块构建框架，条理清楚、层次分明，突出了辅导书的实用性功能.

(2) 知识点总结紧扣大纲，力求概念阐述准确，符号使用规范，公式书写简明.

(3) 例题的选编具有针对性，分析解答全面准确，对解题方法起到了很好的示范作用.

(4) 课后习题分级选编，兼顾不同水平的读者需求.

本书由马燕任主编，具体章节编写分工是：马燕编写第 1、4、5、6、9 章；姚小娟编写第 2、3 章；任秋艳编写第 7 章；李建生编写第 8 章；蒙頔编写第 10、11 章；郭中凯编写第 12 章.

本书的编写得到了兰州理工大学技术工程学院的大力支持与帮助，在此表示衷心的感谢.

由于作者水平有限，时间比较仓促，书中难免有疏漏及错误之处，敬请读者及同行批评指正.

编　者

目　录

第 1 章　函数的极限与连续

本章知识导航：

- 函数
  - 基础知识：集合，数集，区间，邻域
  - 函数的概念
  - 函数的特性：奇偶性，单调性，有界性，周期性
  - 几个重要概念：反函数，复合函数，初等函数
- 极限
  - 极限的定义
    - 数列的极限(ε-N定义)：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$
    - 函数的极限
      - (ε-δ定义)
        - $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$
        - $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$
      - (ε- X定义)
        - $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$
        - $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$
  - 极限的性质
    - 数列极限的性质：唯一性，有界性，四则运算
    - 函数极限的性质：唯一性，局部有界性，局部保号性，四则运算
  - 极限存在判别准则
    - 数列极限判别准则
      - 夹逼准则
      - 单调有界准则
    - 函数极限判别准则：夹逼准则
  - 无穷大量与无穷小量
    - 定义
    - 无穷大与无穷小的关系
    - 无穷小的性质
    - 无穷小的阶
  - 求极限的方法：四则运算法则，极限存在准则，两个重要极限，等价无穷小代换，函数的连续性
- 连续
  - 连续的定义：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$
  - 间断点
    - 第一类
      - 可去：$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$
      - 跳跃：$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$
    - 第二类：$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$与中至少有一个不存在
  - 闭区间上连续函数的性质：最值定理，有界性定理，介值定理，零点存在定理

1.1 函 数

1.1.1 重要知识点

1. 邻域的定义

设点 a 与 δ 是两个实数,且 $\delta>0$，称集合 $E=\{x\,|\,|x-a|<\delta\}$ 为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$. 称集合 $E=\{x\,|\,0<|x-a|<\delta\}$ 为点 a 的 δ 去心邻域，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$.

注意：区间是个实数集，而邻域是个特殊的对称开区间.

2. 函数的定义

设 x,y 是两个变量，x 的取值范围是非空数集 D，f 是某个对应法则. 如果对每一个 $x\in D$，按照此法则，f 都能确定唯一的一个 y 值与之对应，则称此对应法则 f 为定义在 D 上的函数，或称变量 y 是变量 x 的函数，记作

$$y=f(x),\quad x\in D.$$

其中，x 称为自变量，y 称为因变量或函数，D 称为函数的定义域，常记作 D_f，D_f 中每个数 x 在 f 下的像 $f(x)$ (即对应的 y 值)，也称为函数在点 x 处的函数值，全体函数值的集合称为函数的值域，记作 R_f 或 $f(D)$，即

$$R_f=f(D)=\{y\,|\,y=f(x),x\in D_f\}.$$

平面点集 $\{(x,y)\,|\,y=f(x),\ x\in D_f\}$ 称为函数 $f(x)$ 的图像. 一元函数的图像通常是一条曲线.

确定函数的两要素：定义域和对应法则.

3. 函数的几种特性

(1) 奇偶性

设 $y=f(x)$ 是一给定的函数，如果对所有的 $x\in D_f$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是偶函数，其图像关于 y 轴对称；如果对所有的 $x\in D_f$，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 是奇函数，其图像关于原点对称.

(2) 单调性

设 $f(x)$ 是一给定的函数，区间 $I\subset D_f$，对区间 I 上任意两点 x_1,x_2，且 $x_1<x_2$，如果恒有

$$f(x_1)<f(x_2)\qquad (f(x_1)>f(x_2)),$$

则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加(单调减少). 单调增加或单调减少的函数统称为单调函数. 区间 I 上的增(减)函数的图形是沿 x 轴正向上升(下降)的.

(3) 有界性

设 $f(x)$ 是一给定函数，区间 $I \subset D_f$，如果存在正常数 M，使对区间 I 上任一点 x，恒有

$$|f(x)| \leqslant M,$$

则称 $f(x)$ 在区间 I 上有界；如果这样的 M 不存在，则称 $f(x)$ 在区间 I 上无界.

(4) 周期性

设 $f(x)$ 是一给定函数，如果存在正常数 T，使对 D_f 内任意一点 x 都有

$$f(x+T) = f(x),$$

则称 $f(x)$ 为周期函数，正常数 T 称为周期，把满足上式的最小正常数 T 称为函数的最小正周期或基本周期，简称周期. 通常所说的周期一般指最小正周期.

4. 几个重要概念

(1) 反函数

设 $y = f(x)$ 是一给定函数，如果对每个 $y \in R_f$，都有唯一的一个满足 $y = f(x)$ 的 $x \in D_f$ 与之对应，则 x 也是 y 的函数，称此函数为原函数 $y = f(x)$ 的反函数，记作 $x = f^{-1}(y)$，而把 $y = f(x)$ 称为直接函数，或说它们互为反函数. 为与习惯一致，常将反函数改写为 $y = f^{-1}(x)$.

$y = f(x)$ 存在反函数的充分必要条件是 $y = f(x)$ 是一一映射，也就是说，只有严格单调的函数才存在反函数；$D_{f^{-1}} = R_f$；$R_{f^{-1}} = D_f$；$f^{-1}[f(x)] = x$；$f[f^{-1}(x)] = x$；$y = f^{-1}(x)$ 与 $y = f(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称.

(2) 复合函数

设 y 是 u 的函数：$y = f(u)$，而 u 是 x 的函数：$u = \varphi(x)$. 如果 $D_f \cap R_\varphi \neq \varnothing$，则 $y = f[\varphi(x)]$ 是定义于数集 $\{x \mid u = \varphi(x) \in D_f,\ x \in D_\varphi\}$ 上的函数，称此函数为由 $y = f(u)$ 与 $u = \varphi(x)$ 复合而成的复合函数，x 仍为自变量，y 仍为因变量，而 u 称为中间变量.

(3) 初等函数

基本初等函数：

常数函数 $y = c$（c 为实常数)；

幂函数 $y = x^\alpha$（α 为实常数，$\alpha \neq 0$)；

指数函数 $y = a^x$ $(0 < a \neq 1)$；

对数函数 $y = \log_a x$ $(0 < a \neq 1)$；

三角函数 $y = \sin x$，$y = \cos x$，$y = \tan x$，$y = \cot x$；

反三角函数 $y = \arcsin x$，$y = \arccos x$，$y = \arctan x$，$y = \operatorname{arccot} x$.

初等函数是由六种基本初等函数经过有限次的四则运算以及有限次的复合运算所得到的，由一个式子表示的函数称为初等函数.

1.1.2 典型例题解析

例 1.1.1 求下列函数的定义域.

分析 函数的定义域就是使函数的解析表达式有意义的自变量 x 的集合或有特殊规定的自变量 x 的取值范围，往往归结为不等式组的解集合．求函数的定义域一般有以下几种情形：①分式的分母不等于 0；②偶次方根下的式子非负；③取对数运算的式子大于 0；④取正切运算的式子不等于 $k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in Z$；⑤取余切运算的式子不等于 $k\pi$，$k\in Z$；⑥取反正弦、反余弦运算的式子绝对值不大于 1.

(1) $y=\dfrac{1}{\lg(1-x)}$.

解：$\begin{cases}1-x>0,\\1-x\neq 1.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x<1,\\x\neq 0.\end{cases}$ $D_f=(-\infty,0)\cup(0,1)$.

(2) $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{x^2-25}$.

解：$\begin{cases}\sin x\geqslant 0,\\x^2-25\geqslant 0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2k\pi\leqslant x<(2k\pi+1)\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots),\\x\leqslant -5\text{或}x\geqslant 5.\end{cases}$

$\Rightarrow -2\pi\leqslant x\leqslant -5$ 或 $2k\pi\leqslant x<(2k\pi+1)\pi\qquad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$,

$D_f=[-2\pi,-5]\cup(\bigcup\limits_{\substack{k\in Z\\k\neq -1,0}}[2k\pi,(2k+1)\pi])$.

(3) $y=\log_2\log_{\frac{1}{2}}\lg x$.

解：$\begin{cases}x>0,\\\lg x>0,\\\log_{\frac{1}{2}}\lg x>0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0,\\x>1,\\0<\lg x<1.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0,\\x>1,\\1<x<10.\end{cases}\Rightarrow 1<x<10$,

$D_f=(1,10)$.

例 1.1.2 已知 $y=f(2^x)$ 的定义域为$[-1,1]$，求函数 $y=f(\log_2 x)+f(x-1)$ 的定义域.

分析 先由 $f(2^x)$ 的定义域求出 $f(x)$ 的定义域，再求所给函数的定义域.

解：因 $-1\leqslant x\leqslant 1$，所以 $\frac{1}{2}\leqslant 2^x\leqslant 2$，即 $f(x)$ 的定义域为$\left[\frac{1}{2},2\right]$；

再由$\begin{cases}\frac{1}{2}\leqslant\log_2 x\leqslant 2,\\\frac{1}{2}\leqslant x-1\leqslant 2.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\sqrt{2}\leqslant x\leqslant 4,\\\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant 3.\end{cases}$

所求定义域为$\left[\frac{3}{2},3\right]$.

例 1.1.3 下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同，为什么？

分析 如果两个函数的定义域和对应法则都相同，那么这两个函数就是相同的，此时二者的值域一定相同，与函数表达形式及自变量用什么符号表示没有直接关系；否则就是

不同的函数.

(1) $f(x)=x$，$g(x)=\sqrt{x^2}$；

解： 不同，定义域相同，但 $g(x)=|x|$ 与 $f(x)=x$ 的函数关系不同.

(2) $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$，$g(x)=x\cdot\sqrt[3]{x-1}$.

解： 相同，定义域和函数关系都相同，所以是相同的函数.

例 1.1.4　求函数的解析表达式.

设 $f(x+1)=x^2+x+3$，求 $f(x)$.

分析　把 $x+1$ 看成一个整体，先用拼凑法，再用换元法求解函数的表达式.

解法 1： $f(x+1)=(x+1)^2-(x+1)+3$，则 $f(x)=x^2-x+3$.

解法 2： 令 $u=x+1$，则 $x=u-1$，代入得

$$f(u)=(u-1)^2+(u-1)+3=u^2-u+3,$$

所以，$f(x)=x^2-x+3$.

例 1.1.5　判断函数的奇偶性.

分析　用奇函数和偶函数的定义，判断 $f(-x)$ 是否等于 $f(x)$.

(1) $y=\begin{cases}x(1+x), & x<0;\\ x(1-x), & x\geqslant 0.\end{cases}$

解： $f(x)=\begin{cases}x(1+x), & x<0;\\ x(1-x), & x\geqslant 0.\end{cases}$

$$f(-x)=\begin{cases}-x(1-x), & -x<0;\\ -x(1+x), & -x\geqslant 0.\end{cases}=\begin{cases}-x(1+x), & x\leqslant 0;\\ -x(1-x), & x>0.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-x(1+x), & x<0;\\ -x(1-x), & x\geqslant 0.\end{cases}=-f(x),$$

所以，$f(x)$ 是奇函数.

(2) $F(x)=f(x)\left(\dfrac{1}{2^x+1}-\dfrac{1}{2}\right)$，其中 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数.

解： $$F(-x)=f(-x)\left(\frac{1}{2^{-x}+1}-\frac{1}{2}\right)=-f(x)\left(\frac{2^x}{2^x+1}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=-f(x)\left(1-\frac{1}{2^x+1}-\frac{1}{2}\right)=f(x)\left(\frac{1}{2^x+1}-\frac{1}{2}\right)=F(x).$$

所以，$F(x)$ 是偶函数.

例 1.1.6　判断函数的有界性.

分析　关键是要理解对定义域中的所有 x，都要满足的某种关系.

(1) 证明 $y=\dfrac{x}{1+x^2}$ 是有界函数.

证明： $\forall x\in\mathbf{R}$，有 $|y|=\dfrac{|x|}{1+x^2}$. 因 $1+x^2\geqslant 2|x|\geqslant |x|$，

所以，$|y|=\dfrac{|x|}{1+x^2}\leqslant 1$，故　$y=\dfrac{x}{1+x^2}$ 是有界函数.

(2) 证明 $y=\dfrac{x+\sin x}{x}$ 是有界函数.

证明：此函数的定义域为 $x\neq 0$，即 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

因为 $|y|=\left|\dfrac{x+\sin x}{x}\right|=\left|1+\dfrac{\sin x}{x}\right|\leqslant 1+\dfrac{|\sin x|}{|x|}$.

又 $\forall x\in\mathbf{R}$，有 $|\sin x|\leqslant|x|$. 当 $x\neq 0$ 时，$\dfrac{|\sin x|}{|x|}\leqslant 1$，

所以，$\forall x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，有 $|y|\leqslant 1+\dfrac{|\sin x|}{|x|}\leqslant 2$.

故 $y=\dfrac{x+\sin x}{x}$ 是有界函数.

例 1.1.7 求下列函数的反函数.

分析 首先要判断原函数的定义域，其次必须求原函数的值域.

(1) $y=2\arcsin\dfrac{4x+1}{3}-5$.

解：$D_f=\left[-1,\dfrac{1}{2}\right]$，$R_f=[-\pi-5,\pi-5]$.

$\arcsin\dfrac{4x+1}{3}=\dfrac{y+5}{2}$，$\dfrac{4x+1}{3}=\sin\dfrac{y+5}{2}$，

$x=\dfrac{3}{4}\sin\dfrac{y+5}{2}-\dfrac{1}{4}$，

$y=\dfrac{3}{4}\sin\dfrac{x+5}{2}-\dfrac{1}{4}\qquad x\in[-\pi-5,\pi-5]$.

(2) $y=\cos x, x\in[-\pi,0]$.

解法 1：$D_f=[-\pi,0]$，$R_f=[-1,1]$.

因为 $-\pi\leqslant x\leqslant 0$，所以 $0\leqslant x+\pi\leqslant\pi$，

$y=\cos x=-\cos(x+\pi)$，$x+\pi=\arccos(-y)$，

$x=-\pi+\arccos(-y)=-\pi+\pi-\arccos y=-\arccos y$

即 $y=-\arccos x$，$x\in[-1,1]$.

解法 2：因为 $-\pi\leqslant x\leqslant 0$，所以 $0\leqslant -x\leqslant\pi$.

$$y=\cos x=\cos(-x)\text{，}\quad -x=\arccos y\ .$$

即 $y=-\arccos x$，$x\in[-1,1]$.

(3) $y=\begin{cases}-x^2-1, & -2<x<0;\\ \sqrt{1-x^2}, & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ 2^{x-1}, & x>1.\end{cases}$

解：当 $-2<x<0$ 时，$y=-x^2-1\in(-5,-1)$，$x=-\sqrt{-y-1}$，

即 $y=-\sqrt{-x-1}$，$x\in(-5,-1)$.

当$0\leqslant x\leqslant 1$时，$y=\sqrt{1-x^2}\in[0,1]$，$x=\sqrt{1-y^2}$，

即　$y=\sqrt{1-x^2}$，$x\in[0,1]$.

当$x>1$时，$y=2^{x-1}\in(1,+\infty)$，$x=\log_2(y+1)$，

即　$y=\log_2(x+1)$，$x\in(1,+\infty)$.

所以，反函数为　$y=\begin{cases}-\sqrt{-x-1}, & -5<x<-1;\\ \sqrt{1-x^2}, & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ \log_2(x+1), & x>1.\end{cases}$

例 1.1.8　求复合函数.

设$f(x)=\begin{cases}2x, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ x^2, & 1<x\leqslant 4,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}4x, & x\leqslant 2,\\ x-2, & x>2.\end{cases}$求$f[g(x)]$与$g[f(x)]$.

分析　求$f[g(x)]$的方法是：在内函数$g(x)$的每一段上，讨论使$g(x)$的值落在外函数$f(x)$的定义域各个段内的自变量x的取值范围. 在每个取值范围内，将$g(x)$代入$f(x)$的相应表达式. 若某个范围是空集，则在该范围内$f[g(x)]$无意义.

解：(1) 当$x\leqslant 2$时，使$g(x)=4x$的值落在外函数$f(x)$的定义域的两段$[-1,1]$和$(1,4]$内的自变量x的取值范围分别为$\begin{cases}x\leqslant 2\\ -1\leqslant 4x\leqslant 1\end{cases}$的解集：$-\dfrac{1}{4}\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{4}$和$\begin{cases}x\leqslant 2\\ 1<4x\leqslant 4\end{cases}$的解集：$\dfrac{1}{4}<x\leqslant 1$.

当$x>2$时，使$g(x)=x-2$的值落在$[-1,1]$和$(1,4]$内的自变量x的取值范围分别为不等式组$\begin{cases}x>2\\ -1\leqslant x-2\leqslant 1\end{cases}$的解集：$2<x\leqslant 3$及不等式组$\begin{cases}x>2\\ 1<x-2\leqslant 4\end{cases}$的解集：$3<x\leqslant 6$.

所以，$f[g(x)]=\begin{cases}2\cdot(4x), & -\dfrac{1}{4}\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{4};\\ (4x)^2, & \dfrac{1}{4}<x\leqslant 1;\\ 2\cdot(x-2), & 2<x\leqslant 3;\\ (x-2)^2 & 3<x\leqslant 6.\end{cases}=\begin{cases}8x, & -\dfrac{1}{4}\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{4};\\ 16x^2, & \dfrac{1}{4}<x\leqslant 1;\\ 2x-4, & 2<x\leqslant 3;\\ (x-2)^2 & 3<x\leqslant 6.\end{cases}$

(2) 当$-1\leqslant x\leqslant 1$时，使$f(x)=2x$的值落在外函数$g(x)$的定义域内的两段$(-\infty,2]$及$(2,+\infty)$内的自变量x的取值范围分别是不等式组$\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 1\\ 2x\leqslant 2\end{cases}$的解集：$-1\leqslant x\leqslant 1$及不等式组$\begin{cases}-1\leqslant x\leqslant 1\\ 2x>2\end{cases}$的解集：空集$\varnothing$.

当$1<x\leqslant 4$时，使$f(x)=x^2$的值落在外函数$g(x)$的定义域内的两段$(-\infty,2]$及$(2,+\infty)$内的自变量x的取值范围分别是不等式组$\begin{cases}1<x\leqslant 4\\ x^2\leqslant 2\end{cases}$的解集：$1<x\leqslant\sqrt{2}$及不等式组

$\begin{cases}1<x\leqslant 4\\ x^2>2\end{cases}$ 的解集：$\sqrt{2}<x\leqslant 4$.

综上所述，可得 $g[f(x)]=\begin{cases}8x, & -1\leqslant x\leqslant 1;\\ 4x^2, & 1<x\leqslant\sqrt{2};\\ x^2-2, & \sqrt{2}<x\leqslant 4.\end{cases}$

例 1.1.9 函数建模实例.

某产品的单价为 400 元/台，当年产量在 1000 台时，可以全部售出，当年产量超过 1000 台时，经广告宣传可以再多售出 200 台，每台平均广告费 40 元，生产再多时本年就售不出去. 试将本年的销售总收入 R 表示为年产量 x 的函数.

分析 函数的定义域就是使函数的解析表达式有意义的自变量 x 的集合或有特殊规定的自变量 x 的取值范围. 往往归结为不等式组的解集合.

解：当 $0\leqslant x\leqslant 1000$ (台)时，可全部售出，此时总收入：$R(x)=400x$ (元)；

当 $1000<x\leqslant 1200$ (台)时，前 1000 台按 400 元/台售出，后 $x-1000$ 台按 360 元/台售出，此时总收入为

$$R(x)=1000\times 400+(x-1000)\times 360=360x+40000\ (\text{元});$$

当 $x>1200$ (台)时，前 1000 台按 400 元/台售出，后 200 台按 360 元/台售出，再多余的 $x-1200$ 台没有收入，此时总收入为

$R(x)=1000\times 400+200\times 360=472000$ (元).

综上所述，收入函数为

$$y=\begin{cases}400x, & 0\leqslant x\leqslant 1000;\\ 40000+360x, & 1000<x\leqslant 1200;\\ 472000 & x>1200.\end{cases}$$

1.1.3 课后练习题

习题 1.1(基础训练)

1. 求函数 $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}+\ln(2x^2-x)$ 的定义域.

2．已知函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $[0,3]$，求函数 $y=f(3+2x)$ 的定义域.

3．问下列各对函数是否表示同一个函数，为什么？

(1) $y=\sin x$ 与 $y=\sqrt{1-\cos^2 x}$；

(2) $y=\ln x^3$ 与 $y=3\ln x$.

4．已知 $f\left(\dfrac{x+1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$，求 $f(x)$.

5．求函数 $y=\sqrt[3]{2x+1}$ 的反函数.

6．设 $f(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$，$g(x)=2x+1$．求 $f[g(x)]$．

7．若 $f(x)$ 为定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的偶函数，且图形关于直线 $x=2$ 对称．证明：$f(x)$ 为周期函数，并求出周期 T.

习题 1.1(能力提升)

1．求函数 $y=\dfrac{4}{x^2-1}-\sqrt{2x-1}+\lg(3-x)$ 的定义域.

2．设函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，求函数 $f(x+a)+f(x-a)$ $(a>0)$ 的定义域.