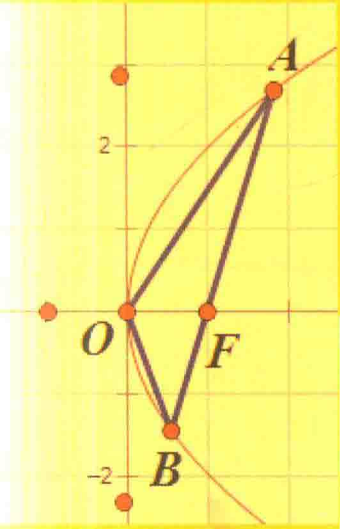

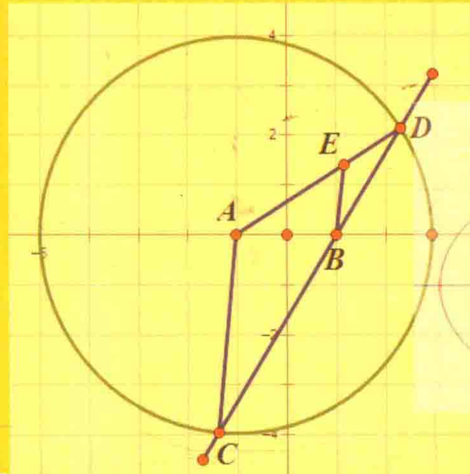

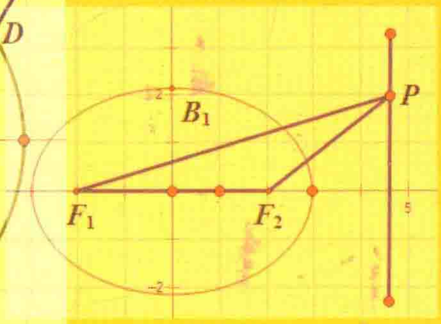

初等数学研究

官运和 编著

清华大学出版社

初等数学研究

官运和 编著

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书紧密结合现行中小学数学教学内容，对中小学数学中的基本概念、基本理论进行适当的阐述、加深与拓广，力求用较高的数学观点、思想与方法，对初等数学作比较深入的研究，力求使用通俗的语言、严密的论述，结合典型实例研究解题思路与方法，使教材具有较好的可读性与思考性.

全书共分11章，包含数、整除与同余、解析式、初等函数、方程、不等式、数列、解析几何、求解与三角形有关的几何量、几何证明，几何作图等内容，每章之后均精选有各种类型和不同梯度的习题，并附有参考答案.

本书可作为高等师范院校数学教育专业的教材，也可作为中小学教师继续教育、各类数学教育工作者的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

初等数学研究/官运和编著. —北京：清华大学出版社，2017
ISBN 978-7-302-48792-0

Ⅰ. ①初…　Ⅱ. ①官…　Ⅲ. ①初等数学—研究　Ⅳ. ①O12

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 272626 号

责任编辑：刘　颖
封面设计：常雪影
责任校对：王淑云
责任印制：杨　艳

出版发行：清华大学出版社
　网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
　社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京密云胶印厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　张**：16.25　　**字　　数**：394 千字
版　　次：2017 年 12 月第 1 版　　**印　　次**：2017 年 12 月第1次印刷
印　　数：1～2000
定　　价：39.80 元

产品编号：075951-01

前言

FOREWORD

“初等数学研究”是高等师范院校数学教育专业的必修课程.本书根据“初等数学研究”课程标准的要求进行编写.本书中的初等数学泛指基础教育阶段的中小学数学.本书紧密结合现行中小学数学教学内容,对中小学数学中的基本概念、基本原理、基本方法等基本理论进行适当的阐述、加深与拓广,力求用较高的数学观点、思想与方法,对初等数学作比较深入的研究,力求使用通俗的语言、严密的论述,结合典型实例,使教材具有较好的可读性与思考性,力求在总结自己教学经验的同时充分吸收各位前辈和同仁的经验和方法,丰富本书内容.

全书共分11章,包含数、整除与同余、解析式、初等函数、方程、不等式、数列、解析几何、求解与三角形有关的几何量、几何证明、几何作图等内容,每章之后均精选有各种类型和不同梯度的习题供读者练习,并附有参考答案.

本书在编写的过程中,得到了宋杰、简国明、孙宇锋、邓四清、李银等领导的支持和帮助.同事李善佳、罗静、盛维林等老师,岭南师范学院张映姜、陈美英等老师,嘉应学院蔺云、侯新华、陈星荣等老师,肇庆学院王传利、吴振英、苏丽卿等老师,惠州学院沈威、王海清等老师,北京师范大学珠海分校马迎秋老师,韩山师范学院欧慧谋、张磊、黄红梅等老师,五邑大学吴淼生、盛业青、金迎迎等老师,南昌师范学院胡启宙老师,景德镇学院黄顺发老师,新余学院陈裕先老师,萍乡学院程丽萍老师等为本书的编写提出了许多宝贵的建议和热情鼓励,在此表示衷心的感谢.

本书在出版过程中得到了清华大学出版社的大力支持,特别是清华大学出版社刘颖编审付出了大量的心血.在此表示衷心的感谢.

本书可作为高等师范院校数学教育专业的教材,也可作为中小学教师继续教育、各类数学教育工作者的参考书.

本书在编写过程中,引用或参考了现有初等数学研究教材、数学专著、数学丛书、数学论文、数学帖子及中小学教师课堂教学中的内容等方面的内容,在此谨向有关作者表示由衷的谢意.

由于编者水平有限,错误和缺点在所难免,恳请读者批评指正.

编　者

2017年5月于广东韶关

目录

CONTENTS

第 1 章 数

虽然我们已学习了不少关于数的知识，知道了正整数、整数、有理数、实数、复数等，但是，我们对数的理论与体系还有不少疑问，比如，数有什么作用？为什么$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$？为什么两个负数相乘得正数？数学归纳法的依据是什么？实数与有理数的本质区别是什么？等等.因此，为了深刻了解、掌握数的本质，有必要建立科学的数的理论体系.

1.1 数的扩充

1.1.1 自然扩充

数是数学最基本的概念之一，“数”概念的形成比较古老.数的概念是人类由于生产和生活的实际需要而逐步形成并加以扩充的，它产生于数数和测量，人类最初为了实际需要，要对某种物体的集合作出量的估计，最早是手指计数，十进制、五进制多发于此，然后有石子计数、结绳计数、刻痕计数等，这种计数方法，实际上是把“绳结”“石子”与被计数事物之间建立一一对应关系，逐渐形成了“多少”的概念，随后把数与具体事物相分离，引进了数字符号，希腊人使用了正整数 1，2，…的集合，公元六世纪，印度数学家运用了“0”，我国古代也在筹算中利用空位来表示“0”.

在数的发展史中，零作为数被引进数系是比较迟的，而数的概念的最早一次扩充，则是引进正分数.生产、生活的发展，需要丈量土地、计算产量、分配劳动果实等，对于象长度、时间、重量等量，仅用正整数就不能把它们完全表示出来，正整数的局限性，促使人们引进正分数，形成非负有理数集，即算术数集.我国的古代数学名著《九章算术》中一开头就讲了分数，并给出了加、减、乘、除四则运算的法则.

由于表示具有相反意义的量的需要，在算术数的基础上，引进负数形成有理数集.阿拉伯人受印度的影响而发明了代数之后，提出了求解像 $3x+2=0$ 之类的方程，“负数”也就应运而生了.后来，笛卡儿把正负数用有向线段来表示.《九章算术》第八章“方程”里，提出了“正负术”，完整地叙述了正负数的不同表示法和正负数的加减法则，这是数学史上的一大成就.

公元六世纪，希腊数学家华达哥拉斯在研究用一个正方形的边长作为单位长度，去度量这个正方形的对角线时，发现两者是不可公度的，不能用分数表示二者之间的比.为了解决这个矛盾，导致了无理数概念的产生，但这时对实数系统$\mathbb{R}$仅停留在直观的理解上，直到19世纪70年代才由戴德金、康托、维尔斯特拉斯建立了严格的实数理论.

16世纪中叶，欧洲工商业十分繁荣，航海、测量、天文、建筑等方面都提出了大量的、新的数学问题.1545年，意大利数学家卡丹在解三次方程中引用了负数开平方的运算，并引进了新的数——虚数i，但许多数学家都不承认这种新数.1572年意大利数学家邦别利第一次在代数里给复数的运算以正式的论据，1777年数学家欧拉建立了复数的系统理论，对这种数才有了进一步的认识.19世纪，数学家高斯用他的代数基本定理，说明了复数系为一切多项式方程提供了足够的解后，复数得到了广泛的应用.

数的概念是逐步发展的，新数的产生是交错的.例如，在人们没有认识负数之前，早已有了无理数概念；在实数理论还没有建立之前，已经产生了虚数概念.但是从大体上看，数的概念的历史发展按照以下的顺序：

正整数集(添正分数)→正有理数集(添负数和零)→有理数集(添无理数)→实数集(添虚数)→复数集.

中小学数学课程关于数的扩展过程如下：

正整数集(添零)→自然数集(添正分数)→算术数集(添负数)→有理数集(添无理数)→实数集(添虚数)→复数集.

1.1.2 理论扩充

数的理论扩充就是，从理论上构造一个集合，即通过定义和等价类来建立新的数系，然后指出新数系的某一个子集与以前的数系是同构①的.

数系扩充的方法有添加元素法和构造法.

作为科学的数系建立过程一般采用如下的扩充过程：

正整数集($\mathbb{N}$)→整数集($\mathbb{Z}$)→有理数集($\mathbb{Q}$)→实数集($\mathbb{R}$)→复数集($\mathbb{C}$).

其后的几节将具体介绍数的理论扩充.

1.1.3 扩充原则

从一个数系A扩充到新的数系B，应当遵循如下的结构主义原则：

(1) A是B的真子集，即$A\subset B$.

(2) 在B上建立各种运算，A的元素间所定义的运算关系，在B的元素间也有相应的定义，且B的元素间的这些关系和运算对B中的A的元素来说与原定义一致，这保证老结构和新结构彼此相容.

---

① 同构是指数集A到数集B的一一映射f，对任意的$m,n\in A$，满足：

$$f(m+n)=f(m)+f(n),$$

$$f(mn)=f(m)f(n).$$

(3) B 的结构和 A 的结构可能有本质不同. 某种运算在 A 中不是总能实施，在 B 中却总能实施.

(4) 在 A 的具有上述三个性质的所有扩充中，在同构意义下，B 是唯一最小的扩充.

数系的每一次扩充，解决了原数系的某些矛盾，从而适用范围扩大了，但每次扩充也失去了一些性质，如实数域中有顺序性，但在复数域中失去了.

1.2 正整数的序数理论

1.2.1 皮亚诺公理

基于正整数具有表示次序(第几个)的意义，建立了正整数的序数理论.

序数理论是完全采用公理化的方法，以两个原始的概念："集合""后继"与四条公理为基础，并且还使用"对应"的概念而建立起来的.

1891 年意大利数学家皮亚诺证明了正整数的一切性质都可以由下面四个公理推出，这些公理叫做皮亚诺公理.

定义 1.1 一个非空集合 $\mathbb{N}^*$ 的元素叫做正整数，在这个集合里的元素之间有一个叫做"直接后继"的基本关系(即对 $\mathbb{N}^*$ 中每个元素 a 来说，都相应地有一个叫做 a 的直接后继的元素 $a^+\in\mathbb{N}^*$)，且满足下面的公理：

(1) 存在一个元素，记作 1，它不是 $\mathbb{N}^*$ 中任何元素的后继元素(即 $1\in\mathbb{N}^*$，对于任意元素 $a\in\mathbb{N}^*$，$a^+\neq 1$).

(2) $\mathbb{N}^*$ 中每个元素 a，有且仅有一个后继元素 a^+(即如果 $a=b$，那么 $a^+=b^+$).

(3) 除 1 以外，任何元素只能是一个元素的后继元素(即如果 $a^+=b^+$，那么 $a=b$).

(4) (归纳公理). 若 $\mathbb{N}^*$ 的子集 M 满足：

① $1\in M$;

② 当 $a\in M$ 时，有 $a^+\in M$,

则 $M=\mathbb{N}^*$.

公理(1)说明 1 是正整数，而且是 $\mathbb{N}^*$ 里最前面的数；

公理(2)，公理(3)说明任何一个数都有唯一的后继数(指直接后继数)，不同的正整数的后继数也不同.

这样，1 的后继数 1^+ 是正整数，记作 2(即 $1^+=2$)；2 的后继数 2^+ 是正整数，记作 3(即 $2^+=3$)……这样继续下去就得到正整数：

$$1,2,3,\cdots,n,\cdots.$$

公理(4)是第一数学归纳法原理的理论根据.

1.2.2 正整数的运算

1. 正整数的加法与乘法

定义 1.2(加法的定义) 正整数的加法是指这样的对应，对于每一对正整数 a, b 有且

仅有一个正整数 $a+b$ 与它对应，而且具有下面的性质：

(1) 对于任何 a，$a+1=a^+$；

(2) 对于任何 a,b，$a+b^+=(a+b)^+$.

这里数 a 和 b 分别叫做被加数和加数，而 $a+b$ 叫做它们的和.

例 1.1 求 $2+3$.

解 求 $2+1$，$2+1=2^+=3$；

再求 $2+2$，$2+2=2+1^+=(2+1)^+=3^+=4$；

然后求 $2+3$，$2+3=2+2^+=(2+2)^+=4^+=5$.

定理 1.1 正整数的加法满足结合律，即对于任意正整数 a,b,c，有

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

证明 设对给定两个正整数 a,b，M 是所有使等式成立的正整数 c 的集合.

(1) $(a+b)+1=(a+b)^+=a+b^+=a+(b+1)$，所以，$1\in M$.

(2) 假设 $c\in M$，即 $(a+b)+c=a+(b+c)$，则

$$(a+b)+c^+=[(a+b)+c]^+=[a+(b+c)]^+=a+(b+c)^+=a+(b+c^+),$$

所以，$c^+\in M$.

根据公理(4)，$M=\mathbb{N}^*$，即等式对于任意 $a,b,c\in\mathbb{N}^*$ 都是正确的.

定理 1.2 正整数的加法满足交换律，即对于任意正整数 a,b，有 $a+b=b+a$.

证明 (1) 首先证明 $a+1=1+a$.

对 a 用归纳公理，设 M 是使 $a+1=1+a$ 成立的所有正整数 a 的集合.

① 因为 $1+1=1+1$，所以 $1\in M$.

② 假设 $a\in M$，即 $a+1=1+a$，则

$$a^++1=(a+1)+1=(1+a)+1=(1+a)^+=1+a^+,$$

所以 $a^+\in M$.

根据公理(4)，对于任意正整数 a，$a+1=1+a$ 成立.

(2) 再对 b 用归纳公理证明 $a+b=b+a$.

设 M 是对于给定的 a 而使等式成立的所有正整数 b 的集合.

① 按照已证过的(1)，$1\in M$.

② 如果 $b\in M$，即 $a+b=b+a$，利用定理 1.1，于是得到

$$\begin{aligned}a+b^+&=(a+b)^+=(b+a)^+=b+a^+=b+(a+1)\\&=b+(1+a)=(b+1)+a=b^++a,\end{aligned}$$

所以 $b^+\in M$.

按照公理(4)，定理 1.2 得证.

定义 1.3(乘法的定义) 正整数的乘法是指这样的一个对应，对于每一对正整数 a,b，有且仅有一个正整数 ab(或者 $a\cdot b$，或者 $a\times b$)与它对应，且具有下面的性质：

(1) 对于任意正整数 a，$a\cdot 1=a$；

(2) 对于任意正整数 a,b，$ab^+=ab+a$.

数 a 叫做被乘数，b 叫做乘数，a 和 b 都叫因数，ab 叫做积.

例 1.2 求 2 和 3 的积.

解 先求 2×1，$2\times1=2$；

再求 2×2，$2\times 2=2\times 1^{+}=2\times 1+2=2+2=4$；

最后求 2×3，$2\times 3=2\times 2^{+}=2\times 2+2=4+2=6$.

所以，$2\times 3=6$.

定理 1.3 乘法对于加法满足右分配律，即设 a,b,c 是正整数，则

$$(a+b)c=ac+bc.$$

证明 对于给定的正整数 a,b，设 M 是所有使等式成立的正整数 c 的集合.

① $(a+b)\cdot 1=a+b=a\cdot 1+b\cdot 1$，所以 $1\in M$.

② 如果 $c\in M$，即 $(a+b)c=ac+bc$. 利用加法结合律和交换律，我们得到

$$\begin{aligned}(a+b)c^{+}&=(a+b)c+(a+b)=(ac+bc)+(a+b)\\&=(ac+a)+(bc+b)=ac^{+}+bc^{+},\end{aligned}$$

即 $c^{+}\in M$.

按照公理(4)，右分配律成立.

定理 1.4 乘法满足交换律，即设 a,b 是正整数，则 $ab=ba$.

证明 (1) 首先证明 $a\cdot 1=1\cdot a$. 对 a 用归纳公理.

设 M 是使等式 $a\cdot 1=1\cdot a$ 成立的所有正整数 a 的集合.

① 因为 $1\cdot 1=1\cdot 1$，所以 $1\in M$.

② 假设 $a\in M$，即 $a\cdot 1=1\cdot a$，则

$$a^{+}\cdot 1=a^{+}=a+1=a\cdot 1+1=1\cdot a+1=1\cdot a^{+}.$$

所以，$a^{+}\in M$.

根据归纳公理(4)，对于任意正整数 a，$a\cdot 1=1\cdot a$.

(2) 再对 b 用归纳公理.

对于给定正整数 a，设 M 是使等式 $ab=ba$ 成立的所有正整数 b 的集合.

① 由(1)，$1\in M$.

② 假设 $b\in M$，即 $ab=ba$，则

$$a\cdot b^{+}=ab+a=ba+a=ba+a\cdot 1=ba+1\cdot a=(b+1)a=b^{+}\cdot a.$$

所以，$b^{+}\in M$.

由归纳公理(4)，定理得证.

推论 乘法对加法满足左分配律，即设 a,b,c 是正整数，则 $c(a+b)=ca+cb$.

左分配律和右分配律统称为分配律.

定理 1.5 乘法满足结合律，即设 a,b,c 是正整数，则 $(ab)c=a(bc)$.

证明 设给定正整数 a 与 b，M 是使这个等式成立的所有正整数 c 的集合.

① $(ab)\cdot 1=ab=a(b\cdot 1)$，所以，$1\in M$.

② 设 $c\in M$，即 $(ab)c=a(bc)$. 利用左分配律，得

$$(ab)c^{+}=(ab)c+ab=a(bc)+ab=a(bc+b)=a(bc^{+}),$$

所以，$c^{+}\in M$.

根据公理(4)，乘法结合律得证.

2. 正整数的顺序

正整数的顺序这个概念是建立在正整数加法及其性质的基础上的. 下面给出定义.

定义 1.4 对于给定两个正整数 a,b，如果存在一个正整数 k，使得 $a=b+k$ 成立，那么，就说 a 大于 b，或 b 小于 a，记为 $a>b$，或 $b<a$.

定理 1.6 (1)(三分律) 对于任意两个正整数 a,b，三个关系式 $a=b,a>b,b>a$ 中有一个且仅有一个成立；

(2)(传递性) 设 a,b,c 是正整数，如果 $a>b,b>c$，那么 $a>c$.

证略.

3. 正整数的减法和除法

定义 1.5 满足条件 $b+x=a$ 的正整数 x 叫做正整数 a 减去正整数 b 的差，记作 $a-b$，a 叫做被减数，b 叫做减数. 求两数差的运算叫做减法.

减法是加法的逆运算.

在正整数集中，减法不是总能实施的. 差 $a-b$ 存在的充要条件是 $a>b$. 如果 $a-b$ 存在，它是唯一的.

定义 1.6 满足条件 $bx=a$ 的正整数 x 叫做正整数 a 除以正整数 b 的商，记作 $a\div b$ 或 $\frac{a}{b}$，a 叫做被除数，b 叫做除数，求两数商的运算叫做除法.

除法是乘法的逆运算.

在正整数集中，除法不是总能实施的. 商 $\frac{a}{b}$ 存在的必要条件是 $a\geqslant b$. 如果 $\frac{a}{b}$ 存在，它是唯一的.

1.2.3 正整数的性质

定理 1.7(阿基米德性质) 设 a,b 为任意两个正整数，则存在正整数 n，使得 $nb>a$.

证略.

定理 1.8 1 是正整数中最小的数，即对任意正整数 a，有 $a\geqslant 1$.

证略.

定理 1.9(最小数原理) 正整数集的任何非空子集都有最小数.

最小数原理与归纳公理等价.

证明 (1) 用归纳公理证明最小数原理(反证法).

设非空集合 $A\subseteq \mathbb{N}^*$，但 A 没有最小数. 令所有小于 A 中任何一个数的正整数组成的集合为 M. 因为 1 是正整数集的最小数，而 A 没有最小数，所以 1 不属于 A，这说明 $1\in M$.

假设 $m\in M$，现在证明 $m^+\in M$.

事实上，如果 m^+ 不属于 M，则存在 $a\in A$，使 $a\leqslant m^+$. 又因 A 中没有最小数，a 不是 A 中最小数，故存在 $b\in A$，使 $b<a\leqslant m^+$，于是 $b<m^+$，故 $b\leqslant m$，与 $m\in M$ 矛盾.

所以 $M=\mathbb{N}^*$.

因为 A 非空，A 中至少有一数 t，且 $t\in \mathbb{N}^*=M$，由集 M 的定义知 $t<t$，矛盾. 所以集 A 有最小数.

(2) 用最小数原理证明归纳公理(反证法).

设 $M\subseteq\mathbb{N}^*$,且①$1\in M$; ②若 $a\in M$,则 $a^+\in M$,但是 $M\neq\mathbb{N}^*$.

令 $B=\{b|b$ 不属于 $M,b\in\mathbb{N}^*\}$,显然 B 非空. 于是 $B\subseteq\mathbb{N}^*$,B 有最小数 b,且 $b\neq1$,故存在正整数 c,使 $b=c^+$. 这样,$c<b$,c 不属于 B,由 B 的定义知 $c\in M$. 由②知 $c^+=b\in M$,与 $b\in B$ 矛盾.

所以 $M=\mathbb{N}^*$.

由上述证明可知,正整数的归纳公理与最小数原理等价.

1.3 数学归纳法

数学归纳法是证明与正整数有关的命题 $p(n)$的一种重要的证明方法,也是一种完全归纳法.

数学归纳法的理论依据是正整数的"归纳公理".

1. 数学归纳法的基本形式(第一数学归纳法)

对于与所有正整数有关的命题 $P(n)$,满足:

(1) 命题 $P(1)$成立;

(2) 假设对于任意正整数 k,$P(k)$成立,能推出 $P(k+1)$也成立.

则命题 $P(n)$对所有正整数 n 都成立.

2. 数学归纳法的另一种形式(第二数学归纳法)

对于与所有正整数有关的命题 $P(n)$,满足:

(1) 命题 $P(1)$成立.

(2) 假设对于任一正整数 k,当 $1\leqslant n\leqslant k$ 时,$P(n)$成立,能推出 $P(k+1)$也成立.

则对所有正整数 n,命题 $P(n)$都成立.

3. 应用数学归纳法时应注意以下几个问题

A. 命题 $p(n)$的 n 取的第一个值不一定是 1.

(1) 第一数学归纳法

设 $P(n)$是一个与正整数有关的命题,如果:

① 当 $n=n_0(n_0\in\mathbb{N})$时,$P(n)$成立;

② 假设 $n=k(k\geqslant n_0,k\in\mathbb{N})$成立,由此推得 $n=k+1$ 时,$P(n)$也成立.

那么,根据①,②对一切正整数 $n\geqslant n_0$,$P(n)$成立.

(2) 第二数学归纳法

设 $P(n)$是一个与正整数有关的命题,如果:

① 当 $n=n_0(n_0\in\mathbb{N})$时,$P(n)$成立;

② 假设 $n\leqslant k(k\geqslant n_0,k\in\mathbb{N})$成立,由此推得 $n=k+1$ 时,$P(n)$也成立.

那么,根据①,②对一切正整数 $n\geqslant n_0$ 时,$P(n)$成立.

B. 两个步骤缺一不可.

比如,对错误的命题

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}+1.$$

满足步骤②,即,假设 $n=k$ 时等式成立,能推出当 $n=k+1$ 时等式成立.

又比如,经过计算,$n=1,2,3,\cdots,100$ 时,式子 $n^2+n+72491$ 都是素数,但当 $n=72490$ 时,$n^2+n+72491=72491^2$,可见它不是素数.

C. 两个步骤紧密联系,步骤②假设 $n=k$ 时命题成立,其中 $k\geqslant 1$.

比如对错误的命题:任何 n 个人都一样高.

错证 当 $n=1$ 时,命题变为"任何一个人都一样高",结论显然成立.

设 $n=k$ 时,结论成立,即"任何 k 个人都一样高",那么,当 $n=k+1$ 时,将 $k+1$ 个人记为 $A_1,A_2,\cdots,A_k,A_{k+1}$,由归纳假设,$A_1,A_2,\cdots,A_k$ 都一样高,而 $A_2,A_3,\cdots,A_k,A_{k+1}$ 也都一样高,故 $A_1,A_2,\cdots,A_k,A_{k+1}$ 都一样高.

根据数学归纳法,任何 n 个人都一样高.

4. 数学归纳法应用举例

数学归纳法应用广泛,可以涉及代数、几何、三角、数列等.

数学归纳法常用来解决以下几类问题:

(1) 证明恒等式;

(2) 证明整除问题;

(3) 证明不等式;

(4) 证明某些几何问题.

例 1.3 已知数列 $a_n=\dfrac{8n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$,$S_n$ 为其前 n 项和,即 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$,求 S_1,S_2,S_3,S_4,推测 S_n 公式,并用数学归纳法证明.

解 计算得 $S_1=\dfrac{8}{9},S_2=\dfrac{24}{25},S_3=\dfrac{48}{49},S_4=\dfrac{80}{81}$,猜测 $S_n=\dfrac{(2n+1)^2-1}{(2n+1)^2}\quad(n\in\mathbb{N})$.

证明 当 $n=1$ 时,等式显然成立.

假设当 $n=k$ 时等式成立,即 $S_k=\dfrac{(2k+1)^2-1}{(2k+1)^2}$. 当 $n=k+1$ 时,有

$$\begin{aligned}S_{k+1}&=S_k+\frac{8(k+1)}{(2k+1)^2(2k+3)^2}\\&=\frac{(2k+1)^2-1}{(2k+1)^2}+\frac{8(k+1)}{(2k+1)^2(2k+3)^2}\\&=\frac{(2k+1)^2(2k+3)^2-(2k+3)^2+8(k+1)}{(2k+1)^2(2k+3)^2}\\&=\frac{(2k+1)^2(2k+3)^2-(2k+1)^2}{(2k+1)^2(2k+3)^2}=\frac{(2k+3)^2-1}{(2k+3)^2},\end{aligned}$$

由此可知,当 $n=k+1$ 时等式也成立.

综上所述,等式对任何 $n\in\mathbb{N}$ 都成立.

例 1.4 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=0,a_2=1$,当 $n\in\mathbb{N}^*$ 时,$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$. 求证:数列 $\{a_n\}$ 的第 $4m+1$ 项($m\in\mathbb{N}^*$)能被 3 整除.

证明 ① 当 $m=1$ 时，有

$$a_{4m+1}=a_5=a_4+a_3=(a_3+a_2)+(a_2+a_1)=a_2+a_1+a_2+a_2+a_1=3,$$

能被 3 整除.

② 假设当 $m=k$ 时，a_{4k+1}能被 3 整除，那么当 $n=k+1$ 时，有

$$\begin{aligned} a_{4(k+1)+1} &= a_{4k+5}=a_{4k+4}+a_{4k+3} \\ &= a_{4k+3}+a_{4k+2}+a_{4k+2}+a_{4k+1} \\ &= a_{4k+2}+a_{4k+1}+a_{4k+2}+a_{4k+2}+a_{4k+1} \\ &= 3a_{4k+2}+2a_{4k+1}. \end{aligned}$$

由假设 a_{4k+1}能被 3 整除，又 $3a_{4k+2}$能被 3 整除，故 $3a_{4k+2}+2a_{4k+1}$能被 3 整除. 因此，当 $m=k+1$ 时，$a_{4(k+1)+1}$也能被 3 整除.

由①，②可知，对一切正整数 $m\in\mathbb{N}$，数列$\{a_n\}$中的第 $4m+1$ 项都能被 3 整除.

例 1.5 用数学归纳法证明等式

$$\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\cos\frac{x}{2^3}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$$

对一切正整数 n 都成立.

证明 当 $n=1$ 时，左边$=\cos\frac{x}{2}$，而

$$\text{右边}=\frac{\sin x}{2\sin\frac{x}{2}}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}=\cos\frac{x}{2}.$$

所以当 $n=1$ 时等式成立.

假设当 $n=k$ 时等式成立，即

$$\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\cos\frac{x}{2^3}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{x}{2^k}=\frac{\sin x}{2^k\sin\frac{x}{2^k}},$$

于是，根据归纳假设可得

$$\begin{aligned} &\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2^2}\cdot\cos\frac{x}{2^3}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{x}{2^k}\cdot\cos\frac{x}{2^{k+1}} \\ &=\frac{\sin x\cdot\cos\frac{x}{2^{k+1}}}{2^k\sin\frac{x}{2^k}}=\frac{\sin x\cdot\cos\frac{x}{2^{k+1}}}{2^k\cdot 2\sin\frac{x}{2^{k+1}}\cos\frac{x}{2^{k+1}}}=\frac{\sin x}{2^{k+1}\sin\frac{x}{2^{k+1}}}. \end{aligned}$$

故当 $n=k+1$ 时等式成立.

所以，等式对于任意正整数 n 都成立.

注 本题也可以用三角函数的方法证明，利用积化和差等公式.

例 1.6 设数列$\{a_n\}$满足关系式：

(1) $a_1=\frac{1}{2}$，

(2) $a_1+a_2+\cdots+a_n=n^2a_n(n\geqslant 1)$.