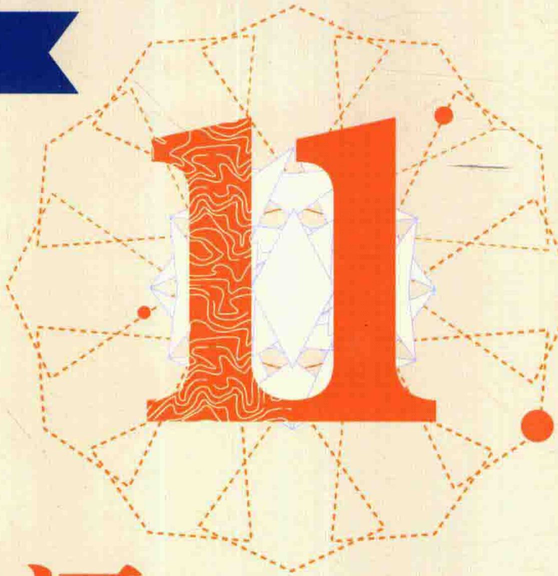
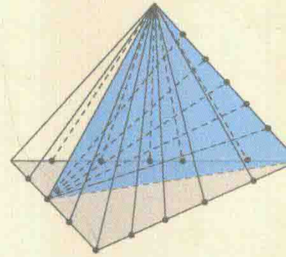
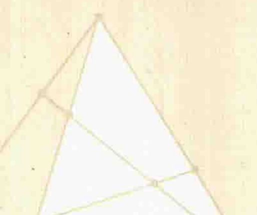
中学生数学思维方法丛书



冯跃峰 著

借桥过河





中国科学技术大学出版社

生数学思维方法丛书

11 借桥过河

冯跃峰 著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书介绍了数学思维方法的一种形式：借桥过河．其中许多内容都是本书首次提出的．比如，结构中间量、主元中间量、恒等回归、r-子集、关联元等，这是本书的特点之一．书中选用了一些数学原创题，有些问题还是第一次公开发表，这是本书的另一特点．此外，书中对每一个问题，并不是直接给出解答，而是详细分析如何发现其解法，这是本书的又一特点．

本书适合高等院校数学系师生、中学数学教师、中学生和数学爱好者阅读．

图书在版编目(CIP)数据

借桥过河/冯跃峰著．—合肥：中国科学技术大学出版社，2016.6
（中学生数学思维方法丛书）
ISBN 978-7-312-03975-1

Ⅰ.借…　Ⅱ.冯…　Ⅲ.中学数学课—教学参考资料　Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 113971 号

出版　中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号，230026
http://press.ustc.edu.cn
http://shop109383220.taobao.com
印刷　合肥市宏基印刷有限公司
发行　中国科学技术大学出版社
经销　全国新华书店
开本　880 mm×1230 mm　1/32
印张　11.625
字数　302 千
版次　2016 年 6 月第 1 版
印次　2016 年 6 月第 1 次印刷
定价　28.00 元

序

问题是数学的心脏，学数学离不开解题. 我国著名数学家华罗庚教授曾说过：如果你读一本数学书，却不做书中的习题，那就犹如入宝山而空手归. 因此，如何解题，也就成为了一个千古话题.

国外曾流传着这样一则有趣的故事，说的是当时数学在欧几里得的推动下，逐渐成为人们生活中的一个时髦话题（这与当今社会截然相反），以至于托勒密一世也想赶这一时髦，学点数学. 虽然托勒密一世见多识广，但在学数学上却很吃力. 一天，他向欧几里得请教数学问题，听了半天，还是云里雾里不知所云，便忍不住向欧几里得要求道："你能不能把问题讲得简单点呢？"欧几里得笑着回答："很抱歉，数学无王者之路." 欧几里得的意思是说，要想学好数学，就必须扎扎实实打好基础，没有捷径可走. 后来人们常用这一故事讥讽那些凡事都想投机取巧之人. 但从另一个角度想，托勒密一世的要求也未必过分，难道数学就只能是"神来之笔"，不能让其思路来得更自然一些吗？

记得我少年时期上学，每逢学期初发新书的那个时刻是最令我兴奋的，书一到手，总是迫不及待地看看书中有哪些新的内容，一方面是受好奇心的驱使，另一方面也是想测试一下自己，看能不能不用老师教也能读懂书中的内容. 但每每都是失望而终：尽管书中介绍的知识都弄明白了，书中的例题也读懂了，但一做书中的练习题，却还

是不会.为此,我曾非常苦恼,却又万思不得其解.后来上了大学,更是对课堂中老师那些"神来之笔"惊叹不已,严密的逻辑推理常常令我折服.但我未能理解的是,为什么会想到这么做呢?

20世纪中叶,美国数学教育家G.Polya的数学名著《怎样解题》风靡全球,该书使我受益匪浅.这并不是说,我从书中学到了"怎样解题",而是它引发了我对数学思维方法的思考.

实际上,数学解题是一项系统工程,有许许多多的因素影响着它的成败.本质的因素有知识、方法(指狭义的方法,即解决问题所使用的具体方法)、能力(指基本能力,即计算能力、推理能力、抽象能力、概括能力等)、经验等,由此构成解题基础;非本质的因素有兴趣、爱好、态度、习惯、情绪、意志、体质等,由此构成解题的主观状态;此外,还受时空、环境、工具的约束,这些构成了解题的客观条件.但是,具有扎实的解题基础,且有较好的客观条件,主观上也做了相应的努力,解题也不一定能获得成功.这是因为,数学中真正标准的、可以程序化的问题(像解一元二次方程)是很少的.解题中,要想把问题中的条件与结论沟通起来,光有雄厚的知识、灵活的方法和成功的解题经验是不够的.为了判断利用什么知识,选用什么方法,就必须对问题进行解剖、识别,对各种信息进行筛选、加工和组装,以创造利用知识、方法和经验的条件.这种复杂的、创造性的分析过程就是数学思维过程.这一过程能否顺利进行,取决于思维方法是否正确.因此,正确的思维方法亦是影响解题成败的重要因素之一.

经验不止一次地告诉我们:知识不足还可以补充,方法不够也可以积累,但若不善思考,即使再有知识和方法,不懂得如何运用它们解决问题,也是枉然.与此相反,掌握了正确的思维方法,知识就不再是孤立的,方法也不再是呆板的,它们都建立了有血有肉的联系,组成了生机勃勃的知识方法体系,数学思维活动也就充满了活力,得到了更完美的发挥与体现.

G. Polya 曾指出，解题的价值不是答案本身，而在于弄清“是怎样想到这个解法的”，“是什么促使你这样想、这样做的”. 这实际上都属于数学思维方法的范畴. 所谓数学思维方法，就是在基本数学观念系统作用下进行思维活动的心理过程. 简单地说，数学思维方法就是找出已有的数学知识和新遇的数学问题之间联系的一种分析、探索方法. 在一般情况下，问题与知识的联系并非是显然的，即使有时能在问题中看到某些知识的“影子”，但毕竟不是知识的原形，或是披上了“外衣”，或是减少了条件，或是改变了结构，从而没有现成的知识、方法可用，这就是我在学生时代“为什么知识都明白了，例题也看懂了，还是不会做习题”的原因. 为了利用有关的知识和方法解题，就必须创造一定的“条件”，这种创造条件的认识、探索过程，就是数学思维方法作用的过程.

但是，在当前数学解题教学中，由于“高考”指挥棒的影响，教师往往只注重学生对知识方法掌握的熟练程度，不少教师片面地强调基本知识和解决问题的具体方法的重要性，忽视思维方法方面的训练，造成学生解决一般问题的困难. 为了克服这一困难，各种各样的、非本质的、庞杂零乱的具体解题技巧统统被视为规律，成为教师谆谆告诫的教学重点，学生解题也就试图通过记忆、模仿来补偿思维能力的不足，利用胡猜乱碰代替有根据、有目的的探索. 这不仅不能提高学生的解题能力，而且对于系统数学知识的学习，对于数学思维结构的健康发展都是不利的.

数学思维方法通常又表现为一种解题的思维模式. 例如，G. Polya就在《怎样解题》中列出了一张著名的解题表. 容许我们大胆断言，任何一种解题模式均不可能囊括人们在解题过程中表现出来的各种思维特征，诸如观察、识别、猜想、尝试、回忆、比较、直觉、顿悟、联想、类比、归纳、演绎、想象、反例、一般化、特殊化等. 这些思维特征充满解题过程中的各个环节，要想用一个模式来概括，那就像用

数以千计的思维元件来构造一个复杂而庞大的解题机器.这在理论上也许是可行的,但在实际应用中却很不方便,难以被人们接受.更何况数学问题形形色色,任何一个模式都未必能适用所有的数学问题.因此,究竟如何解题,其核心内容还是学会如何思考.有鉴于此,笔者想到写这样一套关于数学思维方法的丛书.

本丛书也不可能穷尽所有的数学思维方法,只是选用一些典型的思维方法为代表做些介绍.这些方法,或是作者原创发现,或是作者从一个全新的角度对其进行了较为深入的分析与阐述.

囿于水平,书中观点可能片面武断,错误难免,敬请读者不吝指正.

冯跃峰

2015 年 1 月

目　录

1 中 间 量

想象你在途中遇到了河流阻隔，你的第一反应是什么？当然是四处寻找哪里有可以过河的桥．而一旦到达了河的彼岸，桥相对于此次旅行也就完成了使命．

数学解题中也是如此：当我们解题遇到困难，难以建立相关量之间的联系时，我们不妨设法寻找类似的“桥梁”，借助“桥梁”的纽带作用，建立相关量之间的联系．我们称这样一种处理问题的思维方法为“借桥过河”．

本章介绍“借桥过河”的一种方式：借助“中间量”．

与题中各个对象都接近的量，我们称为“中间量”．所谓借助“中间量”，就是将题中的量用“中间量”表示，或者与“中间量”进行比较，由此建立题中各个对象之间的联系，使问题获解．

1.1 数值中间量

所谓数值中间量，就是“中间量”在数值上与题中的其他量都较为接近．利用数值中间量，可建立题中其他各个量之间的数量关系．

例 1　比较下列各组数的大小．

(1) $0.3^{0.4}$与$0.4^{0.3}$；

(2) $0.8^{0.5}$, $0.9^{0.4}$, $\log_{0.9}0.8$;

(3) $\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}$, $\log_2\frac{1}{3}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$.

分析与解 (1) 题中涉及的两个数 $0.3^{0.4}$, $0.4^{0.3}$ 都是 a^b 的形式,自然想到选择这样的中间量 x,使 x 与 $0.3^{0.4}$ 的指数相同,与 $0.4^{0.3}$ 的底数相同,取 $x=0.4^{0.4}$ 即可.

因为函数 $x^{0.4}$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数,所以 $0.3^{0.4}<0.4^{0.4}$;

又函数 0.4^x 在 $\mathbf{R}$ 上为减函数,所以 $0.4^{0.4}<0.4^{0.3}$,故 $0.3^{0.4}<0.4^{0.3}$.

(2) 显然 $\log_{0.9}0.8>1$,而 $0.8^{0.5}<1$, $0.9^{0.4}<1$,所以 $\log_{0.9}0.8$ 是题中 3 个量中的最大者,从而只需比较 $0.8^{0.5}$ 与 $0.9^{0.4}$ 的大小.

与(1)类似,取中间值 $0.8^{0.4}$,则易知

$$0.8^{0.5}<0.8^{0.4}<0.9^{0.4}<1<\log_{0.9}0.8.$$

(3) 易知 $\log_2\frac{1}{3}<0$,而 $\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}>0$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}>0$,所以只需比较 $\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}$ 与 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ 的大小.

因为难于找到同时接近两者的中间值,所以只能先用特殊值作为中间量进行比较.

首先想到的特殊值是 1,但

$$\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}<\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}=1,\quad \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{0}=1,$$

特殊值“1”并不能区分它们的大小.

再取特殊值 $\frac{1}{2}$,此时,将 $\frac{1}{2}$ 化为以 $\frac{1}{3}$ 为底数的对数,有

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}=\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{1}{3}},$$

现在只需比较 $\sqrt{\frac{1}{3}}$ 与 $\frac{1}{2}$ 的大小.

注意到$\frac{1}{3}>\left(\frac{1}{2}\right)^2$，所以

$$\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}>\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{\frac{1}{3}}=\frac{1}{2},\quad \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}>\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{1}{2}.$$

于是，特殊值“$\frac{1}{2}$”也不能区分它们的大小，但可以看出它们都在$\left(\frac{1}{2},1\right)$中.

再取该区间中的特殊值$\frac{2}{3}$，解题便可获得成功.

实际上，将$\frac{2}{3}$化为以$\frac{1}{3}$为底的对数，有

$$\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\cdot\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2}{3}}=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

现在要比较$\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{3}}$与$\frac{1}{2}$的大小，两数同时立方后，显然有$\frac{1}{9}<\left(\frac{1}{2}\right)^3$，所以

$$\frac{2}{3}=\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{3}}>\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2},$$

而

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}>\frac{2}{3}\quad\text{(立方即证)},$$

故

$$\log_2\frac{1}{3}<0<\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{2}<\frac{2}{3}<\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

例 2 设$\log_3 10=a$，$6^b=25$，求$\log_4 45$(用a，b表示).

分析与解 目标中的量$\log_4 45$是以4为底的对数，比较复杂，应转化为简单的常用对数，于是，先将目标变为$\frac{\lg 45}{\lg 4}$.

同样的理由，将条件变为

$$\frac{1}{\lg 3}=a,\quad \frac{\lg 25}{\lg 6}=b.$$

这两者无法发生直接联系，但它们都可用“中间量”lg 2，lg 3 表示，于是，再将目标简化为$\frac{2\lg 3+1-\lg 2}{2\lg 2}$.

现在，只需将 lg 2，lg 3 都用 a，b 表示即可.注意到条件可变为

$$\frac{1}{\lg 3}=a,\quad \frac{2-2\lg 2}{\lg 2+\lg 3}=b.$$

视 a，b 为常数，解上述关于 lg 2，lg 3 的方程，得

$$\lg 2=\frac{2a-b}{a(2+b)},\quad \lg 3=\frac{1}{a}.$$

所以

$$\log_4 45=\frac{\lg 45}{\lg 4}=\frac{2\lg 3+1-\lg 2}{2\lg 2}=\frac{ab+3b+4}{4a-2b}.$$

如果充分利用题中条件与目标所含的量中相关数值之间的关系：

$$6=2\times 3,\quad 45=5\times 3^2,$$

可将题中的对数都转化为以 3 为底的对数求解.此时，目标可化为

$$\log_4 45=\frac{\log_3 45}{\log_3 4}=\frac{2+\log_3 5}{2\log_3 2},$$

从而解题的本质要求是将 $\log_3 2$，$\log_3 5$ 用 a，b 表示，这只需对条件等式也取以 3 为底的对数即可.

实际上，由 $\log_3 10=a$，$6^b=25$，得

$$a=\log_3 10=\log_3 2+\log_3 5,$$

$$b=\log_6 25=\frac{\log_3 25}{\log_3 6}=\frac{2\log_3 5}{1+\log_3 2},$$

解得

$$\log_3 2=\frac{2a-b}{2+b},\quad \log_3 5=\frac{ab+b}{2+b},$$

于是

$$\log_4 45=\frac{\log_3 45}{\log_3 4}=\frac{2+\log_3 5}{2\log_3 2}=\frac{ab+3b+4}{4a-2b}.$$

例 3 设 $x_i\in\mathbf{R}^+$ $(1\leqslant i\leqslant n)$, $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=n$,求证:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1+x_i^2}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_i}.$$

(1988 年 IMO 苏联代表队训练题)

分析与证明 本题原来的解答很繁,利用"中间量"技巧,我们得到该不等式的一个非常简单的证明.

因为

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{1+x_i^2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\frac{1}{x_i}+x_i}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}=\frac{n}{2},$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_i}\geqslant\frac{n^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(1+x_i)}=\frac{n^2}{2n}=\frac{n}{2},$$

所以不等式成立.

例 4 设 $a_i\in\mathbf{R}^+$, $n>2$,试确定 $P=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_i+a_{i+1}}$ 的范围.

(1990 年日本数学奥林匹克试题)

分析与解 本题原来的解答很繁,利用"中间量"技巧,我们得到该问题的一个非常简单的解答.

与题中各分式的分母都很接近的一个中间量是 $a_1+a_2+\cdots+a_n$,令

$$S=a_1+a_2+\cdots+a_n,$$

则利用统一放缩变形,得

$$P=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_i+a_{i+1}}>\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{S}=1.$$

为了从另一个方向估计 P,可通过“分离整数部分”,使流动变量产生一个负系数,从而估计方向变得相反.这样,我们有

$$P=\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{a_{i+1}}{a_i+a_{i+1}}\right)<\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{a_{i+1}}{S}\right)=n-1,$$

所以 $1<P<n-1$.

下面证明 P 可无限接近于 1 和 $n-1$.

为此,适当取 a_i 的值,使 P 易于计算.注意到

$$\frac{a_i}{a_i+a_{i+1}}=\frac{1}{1+\frac{a_{i+1}}{a_i}},$$

可取 $\{a_i\}$ 为等比数列.

令 $a_i=x^i(x>0,i=1,2,\cdots,n)$,则

$$P=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{a_i+a_{i+1}}=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{x^i}{x^i+x^{i+1}}+\frac{x^n}{x^n+x^1}$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{1+x}+\frac{x^n}{x^n+x}=\frac{n-1}{1+x}+\frac{1}{1+x^{1-n}}.$$

令 $x\to0^+$,则 $P\to n-1$;

令 $x\to+\infty$,则 $P\to1$.

综上所述,P 的取值范围是 $(1,n-1)$.

例 5 设两个三角形的三边分别为 a,b,c 及 x,y,z,面积分别为 Δ_1,Δ_2,则 $a^2(y^2+z^2-x^2)+b^2(z^2+x^2-y^2)+c^2(x^2+y^2-z^2)\geqslant16\Delta_1\Delta_2$(匹多(Pedoe)不等式).

分析与证明 考察题中涉及的量:

$$y^2+z^2-x^2,\quad z^2+x^2-y^2,\quad x^2+y^2-z^2,$$

想到选择一个中间量作为“统一项”.

与上述一些量都很接近的一个量是 $x^2+y^2+z^2$,于是,我们将上述一些量都向 $x^2+y^2+z^2$ 转化.

考察 $a^2(y^2+z^2-x^2)$，为了将其配成 $a^2(x^2+y^2+z^2)$，则要加上一个项 $2a^2x^2$，类似考察其他项，便知原不等式两边应加上 $2(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)$，这样，不等式变为

$$\sum a^2\sum x^2 \geqslant 16\Delta_1\Delta_2+2\sum a^2x^2, \qquad ①$$

其中 $\sum f(a)$ 表示对 a,b,c 轮换求和，$\sum f(x)$ 表示对 x,y,z 轮换求和，$\sum f(a,x)$ 则表示同时对"双变元" a,b,c 及 x,y,z 轮换求和.

观察不等式呈现的结构特征，想到利用柯西(Cauchy)不等式，得

$$\begin{aligned}
\text{式 ① 右边} &= 16\Delta_1\Delta_2+2\sum a^2x^2\\
&\leqslant 16\Delta_1\Delta_2+2\sqrt{\sum(a^2)^2\sum(x^2)^2}\\
&= 4\Delta_1\cdot 4\Delta_2+\sqrt{2\sum a^4}\sqrt{2\sum x^4}\\
&\leqslant \sqrt{(4\Delta_1)^2+2\sum a^4}\cdot\sqrt{(4\Delta_2)^2+2\sum x^4}\\
&= \sum a^2\sum x^2=\text{式 ① 左边}.
\end{aligned}$$

其中注意：由海伦公式，有

$$\begin{aligned}
16\Delta^2 &= 16p(p-a)(p-b)(p-c)\\
&= (a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)\\
&= ((a+b)^2-c^2)(c^2-(a-b)^2)\\
&= 2\sum a^2b^2-\sum a^4=(\sum a^2)^2-2\sum a^4,
\end{aligned}$$

即

$$16\Delta^2+2\sum a^4=(\sum a^2)^2.$$

例 6 设 $0\leqslant a,b,c\leqslant 1$，求证：

$$\sum\frac{a}{b+c+1}+(1-a)(1-b)(1-c)\leqslant 1,$$

其中 $\sum$ 表示对 a,b,c 轮换求和.(美国数学竞赛试题)

分析与证明 该不等式的难点,是所含 3 个分式的分母

$$b+c+1,\quad c+a+1,\quad a+b+1$$

各不相同.注意到不等式关于 a,b,c 对称,从而不妨设 $0<a\leqslant b\leqslant c\leqslant 1$,则

$$a+b+1\leqslant a+c+1\leqslant b+c+1.$$

于是,可选择 $a+b+1$ 为中间量,将不等式中的分母统一"换成"$a+b+1$,通过放缩变形,得

$$\text{不等式左边}\leqslant\frac{a+b+c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c).$$

下面可用分析法证明:

$$\frac{a+b+c}{a+b+1}+(1-a)(1-b)(1-c)\leqslant 1.$$

实际上,上述不等式等价于(去分母)

$$(a+b+c)+(a+b+1)(1-a)(1-b)(1-c)\leqslant a+b+1,$$

移项,得

$$(a+b+1)(1-a)(1-b)(1-c)\leqslant 1-c,$$

约去 $1-c$,得

$$(1+a+b)(1-a)(1-b)\leqslant 1.$$

因为

$$\begin{aligned}(1+a+b)(1-a)(1-b)&\leqslant(1+a)(1+b)(1-a)(1-b)\\&=(1-a^2)(1-b^2)\leqslant 1,\end{aligned}$$

所以,原不等式成立.

例 7 设 n 是大于 2 的自然数,求证:当且仅当 $n=3$ 和 5 时,对所有自然数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,有

$$\begin{aligned}A_n=&(a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdots(a_1-a_n)\\&+(a_2-a_1)(a_2-a_3)\cdots(a_2-a_n)+\cdots\\&+(a_n-a_1)(a_n-a_2)\cdots(a_n-a_{n-1})\\\geqslant&\ 0.\end{aligned}$$